MAT6340 - Topologie symplectique

Présentation: Géométrie de contact

Jean-Philippe Chassé, Université de Montréal

La géométrie de contact est souvent décrite comme l'analogue en dimension impaire de la géométrie symplectique. De ce fait, plusieurs résultats importants de la théorie symplectique se transportent assez naturellement dans celle de contact. Cependant, il ne faut pas se détromper, cette géométrie a ses particularités qui lui sont propres.

Comme pour la géométrie symplectique, la géométrie de contact a son origine dans la mécanique classique : si l'espace de phase physique est une variété symplectique, alors les hypersurfaces d'énergie constante dans cet espace peuvent souvent être données une structure de contact. On peut également augmenter l'espace de phase par une dimension temporelle pour obtenir une variété de contact. Cependant, son utilité n'est pas limitée à ce sujet : les variétés de contact trouvent diverses applications en topologie de basse dimension, puisque toute variété de dimension 3 admet une structure de contact.

I. Définitions de base

A. Structure de contact et intégrabilité

Définition I.1 *Une **structure de contact** sur une variété lisse M est un champ d'hyperplans $\ker\alpha = \xi \subseteq TM$, où α est une 1-forme sur M, tel que $d\alpha|_\xi$ est non-dégénéré. Alors, α est appelée une **forme de contact** pour ξ.*

Remarque: Localement, on peut toujours décrire un champ d'hyperplan ξ par une 1-forme α : il suffit de prendre une métrique auxiliaire g sur M et une section locale X de $\xi^\perp$, alors $\alpha = g(X, \cdot)$ est la 1-forme recherchée. Demander l'existence globale de α revient donc à demander l'existence d'une section globale nulle part nulle de $\xi^\perp$, i.e. la co-orientabilité de ξ. On pourrait développer une bonne partie de ce qui sera présenté ici sans cette supposition, mais pour les besoins de cette présentation, on se tiendra au cas lorsque ξ est co-orientable.

Tout d'abord, avant de se lancer plus loin dans l'analyse de telle structure, tentons de comprendre davantage ce que signifie cette définition. Pour cela, rappelons-nous la condition d'intégrabilité du théorème de Frobenius : une distribution $\nu = \ker\beta$ est intégrable si et seulement si $d\beta|_\nu \equiv 0$. Ici on demande donc totalement le contraire, une sorte de non-intégrabilité complète. Du coup, on peut déjà s'attendre à ce qu'il n'existe pas de variété maximalement intégrale de la distribution d'hyperplans sur une variété de contact. Comme on le verra plus tard, cela joue un rôle primordial en théorie de contact.

Finalement, notons que la non-dégénérescence de $d\alpha|_\xi$ nous assure que $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ désigne une forme volume sur la variété de contact. En particulier, M doit être orientable. De plus, M doit être de dimension impaire, car comme on l'a vu au début du cours, la non-dégénérescence de $d\alpha|_\xi$ oblige ξ a être de rang pair.

B. Exemple important : Variété des éléments de contact

On considère pour cet exemple une variété lisse N de dimension quelconque. Un **élément de contact** sur N est un hyperplan dans T_xN pour un certain $x \in \mathbb{N}$; alors, x est appelé le **point de contact** de cet hyperplan. On appelle le fibré obtenu en considérant l'ensemble des éléments de contact en chaque point de N la **variété des éléments de contact** de N.

Proposition I.1 *La variété des éléments de contact d'une variété N de dimension n est la projectivisation du fibré cotangent de N et donc, une variété de dimension $2n-1$.*

Preuve. Un élément de contact dans T_xN pour un certain $x \in N$ est donné, à une constante près, par une fonctionnelle linéaire sur T_xN, i.e. une droite dans T_x^*N. Alors, PT_x^*N est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des éléments de contact en x. Par la structure de fibré préexistante de T^*N, il est facile de vérifier qu'il en résulte une fibration de rang $n-1$ sur N. □

Alors, la variété des éléments de contact M de N possède naturellement un champ d'hyperplans non-dégénéré ξ : $\forall (x,p) \in M$, $\xi_{(x,p)}$ est l'hyperplan tel que $\pi_*\xi_{(x,p)} = \ker p$, où $\pi : M \to N$ dénote la fibration de M sur N. Notons que c'est bien défini, car $\ker \lambda p = \ker p \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$. Nous montrerons plus tard que la 1-forme associée à ξ est bien non-dégénérée sur ce champ.

De façon analogue, on peut définir la variété des éléments de contact orientés, en considérant, comme le nom l'indique, l'orientation des éléments de contact, naturellement donnée par le vecteur normal à l'hyperplan dans l'espace tangent ambiant. On obtient alors une autre fibration sur N qui est un revêtement à deux feuillets de la variété des éléments de contact. Cet exemple est important en optique, comme on le verra par la suite.

C. Contactomorphismes et champs vectoriels de contact

Définition I.2 *Soit (M_1, ξ_1) et (M_2, ξ_2), des variétés de contact. Un difféomorphisme $\psi : M_1 \to M_2$ est appelé un **contactomorphisme** si $\psi_*\xi_1 = \xi_2$, ou de façon équivalente, $\psi^*\alpha_2 = f\alpha_1$, où $\ker \alpha_i = \xi_i$, $i = 1, 2$, et $f : M_1 \to \mathbb{R}^+$.*

Un bon exemple d'un contactomorphisme est donné lorsqu'on considère la variété des éléments de contact orientés M d'une variété riemannienne complète (dans le sens que toutes géodésiques s'allongent à l'infini). Alors, on considère un flot géodésique sur M en faisant évoluer la variété sous-jacente selon les géodésiques et en gardant l'élément de contact qui est orthogonal au vecteur tangent à la courbe géodésique et dont le vecteur normal va dans le sens de ladite courbe. Le fait que cela est bien un contactomorphisme de M en elle-même n'est qu'une reformulation du principe de Huygens. Effectivement, considérons un front d'onde, i.e. une hypersurface dans une certaine variété riemannienne N, et le front d'onde produit par un seul des points de cette hypersurface. Alors, dire que c'est un contactomorphisme revient à dire qu'après un certain temps t (l'évolution temporelle d'un front d'onde se fait perpendiculairement aux géodésiques par le principe de Fermat), les fronts d'onde seront toujours tangents.

Définition I.3 *Un **champ vectoriel de contact** sur une variété de contact* $(M, \xi = \ker \alpha)$ *est un champ de vecteurs X qui préserve le champ d'hyperplan ξ. Autrement dit, c'est le champ de vitesse d'un contactomorphisme de M dans M.*

Remarque: Par la définition de la dérivée de Lie, ceci est équivalent à demander à ce que $\mathcal{L}_X\alpha = f_X\alpha$ pour une certaine fonction $f_X : M \to \mathbb{R}$ qui dépend du champ X.

Par la remarque et la propriété que $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X$, on voit facilement que l'ensemble des champs vectoriels de contact forme une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs vectoriels sur M.

Un exemple important de champ vectoriel de contact est donné par l'unique champ R_α tel que $d\alpha(X, \cdot) \equiv 0$ et $\alpha(X) = 1$ pour une forme de contact donnée α sur M, appelé **champ de Reeb**. C'est bien un champ vectoriel de contact, car on a alors

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = d(\iota_{R_\alpha}\alpha) + \iota_{R_\alpha}d\alpha = 0$$

Notons que même si R_α dépend explicitement de la forme α choisie, il est possible d'obtenir des invariants topologiques à partir de celui-ci.

D. Sous-variétés isotropes et de contact

Définition I.4 *Soit* $(M, \xi = \ker \alpha)$*, une variété de contact.*

*(a) Une sous-variété intégrale $L \subset M$ de la distribution ξ est dite **isotrope**.*

*(b) Une sous-variété $N \subset M$ avec structure de contact ξ' est appelée une **sous-variété de contact** si $TN \cap \xi = \xi'$ en considérant $TN \subset TM$, ou de façon équivalente, si $\xi' = \ker(\iota^*\alpha)$, où $\iota : N \hookrightarrow M$ dénote l'inclusion de N dans M.*

Proposition I.2 *Soient $(M^{2n+1}, \xi = \ker \alpha)$, une variété de contact, et L, une sous-variété isotrope de M. Alors, $\dim L \leq n$.*

Preuve. Si L est isotrope, on doit avoir que $\alpha|_L \equiv 0$. Or, L est une variété intégrale de ξ et donc, ses champs vectoriels sont en involution dans M. Ceci revient à demander à ce que $\eta|_L \equiv 0$ implique $d\eta|_L \equiv 0$ pour toute forme différentielle η. Ainsi, on a automatiquement $d\alpha|_L \equiv 0$. Or, $d\alpha$ est non-dégénéré sur $\xi \supset TL$; il faut donc que $\dim L \leq (\text{rang } \xi)/2 = n$ par ce qu'on a vu de l'algèbre linéaire symplectique. □

On voit finalement ici une partie de la dynamique intéressante qu'amène la condition de non-intégrabilité complète : cela restreint de façon assez particulière les sous-variétés « intéressantes ».

Définition I.5 *Une sous-variété isotrope de dimension maximale d'une variété de contact est dite* ***legendrienne****.*

Remarque: Comme on le verra plus tard, les sous-variétés legendriennes jouent un rôle très important en géométrie de contact. En fait, leur rôle est analogue à celui des sous-variétés lagrangiennes en géométrie symplectique ; ce lien se fera plus concret dans la symplectification.

Puisqu'un contactomorphisme préserve la structure de contact et qu'un difféomorphisme envoie des sous-variétés sur d'autres, il faut nécessairement qu'un contactomorphisme envoie des sous-variétés legendriennes sur des sous-variétés du même type.

II. Théorèmes fondamentaux

Théorème II.1 (Stabilité de Gray) *Soit ξ_t, $t \in [0,1]$, une famille à 1 paramètre de champs d'hyperplan non-dégénérés sur une variété fermée M. Alors, il existe une isotopie $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ sur M telle que*

$$\psi_{t*}\xi_t = \xi_0 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Preuve. L'énoncé est équivalent à dire qu'il existe une famille à 1 paramètre de fonctions positives λ_t sur M telle que $\psi_t^*\alpha_t = \lambda_t\alpha_0$ $\forall t \in [0,1]$, où $\xi_t = \ker \alpha_t$. Alors, on applique simplement l'argument de Moser, i.e. supposons que l'on a une telle isotopie et que $\frac{d}{dt}\psi_t = X_t(\psi_t)$. Alors,

$$\left(\frac{d}{dt}\lambda_t\right)\alpha_0 = \frac{d}{dt}\psi_t^*\alpha_t = \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t\right)$$

Donc, par la formule de Cartan, la définition de ψ_t et en posant $\mu_t := \frac{1}{\lambda_t}\left(\frac{d}{dt}\lambda_t\right) \circ \psi_t^{-1}$, on a alors

$$\psi_t^* \left(\mu_t \alpha_t\right) = \psi_t^* \left(d(\iota_{X_t}\alpha_t) + \iota_{X_t} d\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t \right)$$

Ainsi, il suffit de prendre X_t dans ξ_t et de telle sorte que

$$\iota_{X_t} d\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t = \mu_t \alpha_t$$

car alors $\iota_{X_t}\alpha_t = 0$. Il nous faut cependant spécifier μ_t plus explicitement pour avoir une forme plus explicite pour X_t. Pour cela, en évaluant selon le champ de Reeb R_{α_t} de α_t, on obtient

$$\frac{d\alpha_t}{dt}(R_{\alpha_t}) = \mu_t$$

On a ainsi faire la preuve à l'envers pour obtenir un unique champ X_t (car $d\alpha_t|_{\xi_t}$ est non-dégénéré) et l'intégrer pour obtenir l'isotopie recherchée. $\square$

Théorème II.2 (Théorème de Darboux) *Soient α, une forme de contact sur la variété M de dimension $2n+1$, et $p \in M$. Alors, il existe des coordonnées locales $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z$ sur un voisinage $U \subseteq M$ de p telles que*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + dz$$

Preuve. Puisqu'on ne s'intéresse qu'à un voisinage dans M, on peut considérer sans perte de généralité que $M = \mathbb{R}^{2n+1}$ et $p = 0$. Alors, prenons des coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ telles que

$$\partial_z = R_\alpha \quad \text{et} \quad \partial_{x_i}, \partial_{y_j} \in \ker\alpha, \quad \text{avec} \quad d\alpha = \sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

sur $T_0\mathbb{R}^{2n+1}$, ce que l'on peut toujours faire par ce qu'on sait de l'algèbre linéaire.

Définissons alors $\alpha_0 := dz + \sum_{i=0}^{n} x_i dy_i$ et la famille de 1-forme

$$\alpha_t := (1-t)\alpha_0 + t\alpha$$

de telle sorte à ce que $\alpha_t = \alpha$ et $d\alpha_t = d\alpha$ $\forall t \in [0,1]$ à l'origine. Or, puisque la non-dégénérescence est une condition ouverte et que la dérivée extérieure est linéaire, α_t est une forme de contact sur un petit voisinage de l'origine.

Assumons que l'on aie un flot ψ_t sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $\psi_t^*\alpha_t = \alpha_0$ et considérons son champ de vitesse X_t. Alors,

$$0 = \frac{d}{dt}\alpha_0 = \frac{d}{dt}\psi_t^*\alpha_t = \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t\right)$$

D'où,

$$0 = \psi_t^*\left(\iota_{X_t}d\alpha_t + d(\iota_{X_t}\alpha_t) + \alpha - \alpha_t\right)$$

Ainsi, en décomposant $X_t = H_tR_{\alpha_t} + Y_t$ pour des familles de fonctions H_t et de champs de vecteurs Y_t appropriées, il suffit à ce que

$$\iota_{Y_t}d\alpha_t + dH_t + \alpha - \alpha_t = 0$$

avec la famille de fonctions H_t donnée en évaluant cette équation en R_{α_t} pour obtenir $dH_t(R_{\alpha_t}) + \alpha(R_{\alpha_t}) = 1$, qui peut toujours être résolue localement. Ainsi, on obtient H_t et Y_t dans un voisinage de l'origine et on peut relire la preuve dans l'autre sens pour construire le flot ψ_t désiré. $\square$

Pour continuer dans les théorèmes fondamentaux de la géométrie de contact, il faudra introduire une structure importante des sous-variétés d'une variété de contact :

Définition II.1 *Soient $L, N \subseteq (M, \xi = \ker\alpha)$, des sous-variétés isotrope et de contact respectivement de la variété de contact M de dimension $2n+1$.*

*(a) On note par $TL^{\perp_{d\alpha}}$ le complément symplectique de TL dans ξ par $d\alpha|_\xi$. On remarque que $TL \subseteq TL^{\perp_{d\alpha}}$, car $\dim L \leq n$. Alors, on définit le **fibré normal symplectique conforme** par*

$$\mathrm{CSN}(M, L) := TL^{\perp_{d\alpha}}/TL$$

*(b) On note par $(\xi')^{\perp_{d\alpha}}$ le complément symplectique de $\xi' = TN \cap \xi|_N$ dans $\xi|_N$ par $d\alpha|_\xi$. Alors, on définit le **fibré normal symplectique conforme** par*

$$\mathrm{CSN}(M, N) := (\xi')^{\perp_{d\alpha}}$$

Remarque: Dans le premier cas, on a

$$(TL)^\perp \cong (TM|_L)/(TL^{\perp_{d\alpha}}) \oplus \mathrm{CSN}(M, L)$$

et dans le second

$$(TN)^\perp \cong \mathrm{CSN}(M, N)$$

Alors, on peut obtenir un théorème analogue au théorème de Weinstein pour les voisinages de sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique.

Théorème II.3 *Soient (M_i, ξ_i), $i = 1, 2$, des variétés de contact avec sous-variétés isotropes fermées (resp. de contact compactes) M_i'. Supposons qu'il existe un isomorphisme de fibrés symplectiques conformes $\Phi : \mathrm{CSN}(M_1, M_1') \to \mathrm{CSN}(M_2, M_2')$ qui couvre un difféomorphisme (resp. un contactomorphisme) $\varphi : M_1' \to M_2'$. Alors, φ s'étend en un contactomorphisme $\psi : \mathcal{N}(M_1') \to \mathcal{N}(M_2')$ tel que $\psi_*|_{\mathrm{CSN}(M_1, M_1')}$ et Φ soient homotopes en tant qu'isomorphisme de fibrés symplectiques conformes (resp. à conformalité près).*

Preuve. La preuve est assez technique et surtout trop longue pour cet exposé, et ne sera donc pas faite. Par contre, elle a quelques différences avec le cas symplectique, puisqu'elle utilise le champ de Reeb des formes de contact des M_i. Pour les intéressés, la preuve est dans [3], dans les sections 2.4.2 et 2.4.3. □

Remarque: Un fibré conforme symplectique est un fibré équipé d'une classe d'équivalence de forme symplectique $[\omega]$ avec $\omega = \omega'$ si et seulement si $\exists \lambda > 0$ tel que $\omega' = \lambda\omega$.

Corollaire II.1 *Deux sous-variétés legendriennes fermées difféomorphes ont un voisinage contactomorphe.*

Preuve. Si les M_i' sont legendriennes, alors $TM'^{\perp d\alpha}_i = TM_i'$ et donc, $CSN(M_i, M_i')$ a rang 0. Ainsi, si on a un difféomorphisme $\varphi : M_1' \to M_2'$, les hypothèses sur Φ sont trivialement respectées. □

III. Géométrie symplectique en géométrie de contact

A. Symplectification d'une variété de contact

On voudrait trouver une manière d'à partir d'une variété de contact (M, ξ) de dimension $2n - 1$, construire une variété symplectique $2n$. Inspiré par la variété des éléments de contact, où l'on avait projectivité l'espace cotangent, on définit la **symplectification** de M comme $\widetilde{M} := M \times \mathbb{R}$ avec 1-forme canonique $\lambda = e^t\alpha$, où t dénote la composante en $\mathbb{R}$. Ainsi, on a une fibration $\pi : \widetilde{M} \to M$ avec une action naturelle par le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^+$.

On voit bien ainsi par cette définition que la non-dégénérescence de $\omega = d(e^t\alpha)$ est équivalente à celle de α et ω est exacte, donc fermée. Ainsi, le résultat est bel et bien symplectique. De plus, la forme symplectique sur $\widetilde{M}$ ne dépend pas de la forme de contact α spécifique choisie à symplectomorphisme près, puisque changer par une fonction non-nulle α ne fait que changer l'identification avec la fibre $\mathbb{R}$.

Par la construction de la symplectification, on voit bien que la préimage par π d'une sous-variété legendrienne, qui a dimension $n-1$ pour une variété de contact M de dimension $2n-1$, donne une sous-variété isotrope de dimension n de la symplectification $\widetilde{M}$, i.e. une sous-variété lagrangienne. Cela permet en fait de relier plusieurs problèmes de géométrie de contact à des problèmes d'intersection lagrangienne dans la symplectification.

Revenons à la variété des éléments de contact construite précédemment. Puisque dans le cas où l'on prend les éléments de contact sans orientation, ξ n'est pas coorientable, il faut essentiellement faire le produit avec $\mathbb{R}^*$ à la place, mais c'est la même idée. Il devient alors clair par la remarque précédente que c'est bien une variété de contact. Effectivement, on voit bien la symplectification de cette variété redonne au fibré cotangent ce qu'on lui avait enlever dans la projectivisation et que donc, la variété résultante est difféomorphe à T^*N qui est bien sûr symplectique. En fait, un calcul direct donne que localement, $\lambda = pdq$ et ainsi, $d\lambda = dp \wedge dq$ est la forme symplectique standard.

B. Symplectification de contactomorphismes et champs vectoriels de contact

La question devient alors si l'on peut relever les contactomorphismes de M en elle-même en des symplectomorphismes de la symplectification. Or, il y a une façon bien naturelle de faire cela :

Définition III.1 *Soit $f : (M, \xi) \to (M, \xi)$, un contactomorphisme. Alors, sa* ***symplectification*** *$\tilde{f}$ est définie par*

$$\tilde{f}(x,t) = (f(x), t - h(x))$$

où $h : M \to \mathbb{R}$ est la fonction telle que $f^*\alpha = e^h\alpha$

Remarque: On obtient bien ainsi un symplectomorphisme, car la forme symplectique de $\widetilde{M}$ ne dépend que de α, qui est préservé par f.

Théorème III.1 *Tout symplectomorphisme $F : (\widetilde{M}, d\lambda) \to (\widetilde{M}, d\lambda)$ dont l'application commute avec l'action de $\mathbb{R}^+$ se projette sur un contactomorphisme de la variété de contact sous-jacente (M, ξ) et préserve la 1-forme canonique λ.*

Preuve. Tout d'abord, notons que tout difféomorphisme qui commute avec l'action de $\mathbb{R}^+$ a une projection bien définie sur la variété de contact, qui est lui-même un difféomorphisme, car alors F doit nécessairement envoyer chaque fibre sur une autre de telle sorte que la projection fonctionne correctement.

Notons également que le fait que F préserve λ implique que l'application projetée est bien un contactomorphisme, car les vecteurs v de $T\widetilde{M}$ qui sont envoyés sur ξ ceux sont tels que $\lambda(v) = 0$. Nous allons donc uniquement montrer cette partie de l'énoncé.

Considérons un chemin γ dans $\widetilde{M}$. Alors,

$$\int_\gamma \lambda = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial\sigma(\varepsilon)} \lambda = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{\sigma(\varepsilon)} d\lambda \tag{1}$$

où $\sigma(\varepsilon) := \{t\gamma : t \in [\varepsilon, 1]\}$. La première égalité tient puisque $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon\gamma} \lambda = 0$, car la courbe s'écrase alors en un point, et que λ est nulle sur n'importe quel bord vertical possible. La seconde vient du théorème de Stokes.

Or, $F^* d\lambda = d\lambda$ et F commute avec la multiplication de γ par un nombre réel. Ainsi, on a que

$$\int_{F(\gamma)} \lambda = \int_\gamma \lambda$$

Puisque γ est quelconque, F doit préserver λ. □

Définition III.2 *Il est alors facile de définir la* ***symplectification*** *d'un champ vectoriel de contact en prenant son flot, qui est un contactomorphisme de la variété en elle-même, et en symplectifiant ce dernier. Alors, la symplectification du champ est le champ du contactomorphisme symplectifié.*

IV. Géométrie de contact en géométrie symplectique

A. Contactification et préquantification

Soit $(M^{2n}, \omega = d\lambda)$, une variété symplectique exacte. Alors, $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}$ possède naturellement une forme de contact donnée par $\alpha = \pi^*\lambda + dt$, où t dénote la coordonnée en $\mathbb{R}$ et $\pi : \widetilde{M} \to M$ est la projection évidente. Notons que $\xi = \ker \alpha$ est naturellement associé à TM et ainsi, $d\alpha|_\xi$ est la forme symplectique ω sur M qui est bien sûr non-dégénérée. Physiquement, cela revient simplement à ajouter une dimension temporelle à l'espace de phase.

Une autre construction très semblable, parfois appelée contactification également, mais en général préquantification, est donnée dans le cas où ω n'est pas nécessairement exacte, mais telle que $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Alors, il existe une S^1-fibration $\pi : \widetilde{M} \to M$ avec première classe de Chern $[\omega]$ et ce fibré admet une connection A (vue en tant que champ d'hyperplan horizontaux ici) qui décrit une structure de contact $\xi = \ker \alpha$ sur $\widetilde{M}$ telle que $d\alpha = \pi^*\omega$.

B. Champs de Liouville et conjecture de Weinstein

Définition IV.1 *Soit (M^{2n}, ω), une variété symplectique. Alors, un champ vectoriel sur M est dit* ***de Liouville*** *si $\mathcal{L}_X \omega = \omega$.*

Toute variété symplectique avec champ vectoriel de Liouville possède une sous-variété de contact. Effectivement, par la formule de Cartan,

$$\omega = \mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) + \iota_X d\omega = d(\iota_X \omega)$$

par la fermeture de ω. En particulier, une variété symplectique avec un champ de Liouville global est exacte. Notons que le flot ψ_t d'un tel champ vectoriel est symplectique conforme, car

$$\psi_t^* \omega = \psi_t^* \mathcal{L}_X \omega = \frac{d}{dt} \psi_t^* \omega$$

et donc, $\psi_t^* \omega = e^t \omega$.

Alors, toute sous-variété N transverse à X a comme forme de contact $\alpha = \iota_X \omega|_N$, car alors $d(\iota_X \omega)|_{\ker \alpha} = \omega|_{\ker \alpha}$ est non-dégénérée. Notons que $\partial/\partial t$ est transverse à une variété de contact M dans sa symplectification $M \times \mathbb{R}$.

Cela est relié à un résultat très important de la géométrie de contact, mais il faut quelques définitions avant de l'introduire ! Pour la suite, M est une variété symplectique avec forme ω et $S \subset M$ est une surface de niveau d'un hamiltonien H sur M, donc une hypersurface de M, orientable telle que $dH_x \neq 0 \ \forall x \in S$.

Définition IV.2 *Puisque ω est non-dégénérée et que S a codimension un dans M, $\omega|_S$ a un noyau de dimension un dans TS ; on appelle alors le fibré formé par les vecteurs dans ce noyau le* ***fibré ligne caractéristique*** *de S, noté $\mathcal{L}_S$. Alors, une* ***caractéristique fermée*** *est un cercle plongé $P \subset S$ tel que $TP = \mathcal{L}_S|_P$.*

Remarque: Si X_H dénote le champ vectoriel associé à H, on note que $X_H|_S \in \mathcal{L}_S$. Effectivement, par définition $H(x) = c \ \forall x \in S$ donc, $\forall v \in T_x S$, $\omega_x(X_H(x), v) = dH_x(v) = 0$ puisque H ne varie pas sur S.

Définition IV.3 *On dit que S est de* ***type contact*** *s'il existe une forme de contact α sur S telle que $d\alpha = \omega|_S$. Alors, $\alpha|_{\mathcal{L}_S} \neq 0$ et donc, le champ de Reeb de α est dans le fibré ligne caractéristique.*

Conjecture IV.1 (Conjecture de Weinstein) *Toute hypersurface de type contact S dans (M, ω) a une caractéristique fermée.*

REMARQUE: Bien que ce reste non-démontré dans le cas général, Viterbo a montré en 1986 que c'était vrai pour $(M,\omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$. Ce résultat a ensuite été étendu pour une grande classe de variété symplectique, incluant les fibrés cotangents avec la forme standard, principalement par le travail de Floer-Hofer-Viterbo avec les capacités symplectiques.

Notons que, puisque toute variété de contact est une hypersurface de type contact dans sa symplectification (cela se voit bien dans la construction de la symplectification), ce problème est en fait intrinsèque à la géométrie de contact et peut être reformulé en terme d'orbites fermées d'un champ vectoriel de Reeb sur une variété de contact quelconque. Cela vient du fait que l'existence de caractéristique fermée ne dépend pas de l'hamiltonien, mais plutôt de la fibration caractéristique, dont le champ de Reeb fait partie.

Or, tout cela est profondément relié aux champs vectoriel de Liouville par la proposition suivante :

Proposition IV.1 *Si S est compacte, alors S est de type contact si et seulement si il existe un champ vectoriel de Liouville défini sur un voisinage U de S qui est transverse à S.*

PREUVE. La preuve est encore une fois trop longue pour cette présentation, mais [7] et [5] proposent les deux des preuves intéressantes de l'énoncé respectivement dans la section du chapitre 3 sur les structures de contact et dans la section 4.3. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2^{nd} ed. No. 60 in Graduate Text in Mathematics. Springer, 1989.

[2] ELIASHBERG, Y., HOFER, H., AND SALAMON, D. Lagrangian intersections in contact geometry. *Geometric and Functional Analysis 5*, 2 (1995).

[3] GEIGES, H. Contact geometry, 2004.

[4] GEIGES, H. Christiaan huygens and contact geometry. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (5) 6 (2005), 117–123.

[5] HOFER, H., AND ZEHNDER, E. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, 1994.

[6] LIN, X.-S. An introduction to 3-dimensional contact topology, 2001.

[7] MCDUFF, D., AND SALAMON, D. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, 1995.