Comment (ne pas) accrocher un cadre

Jean-Philippe Chassé

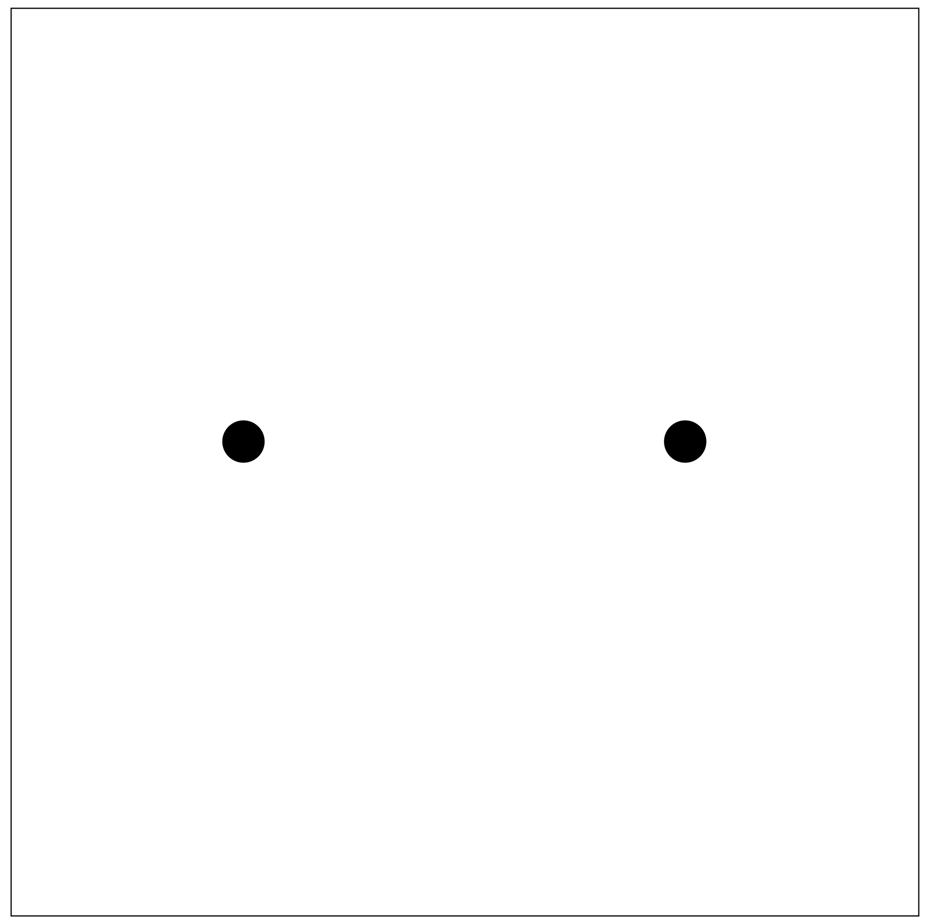
chasseje@dms.umontreal.ca
Université de Montréal

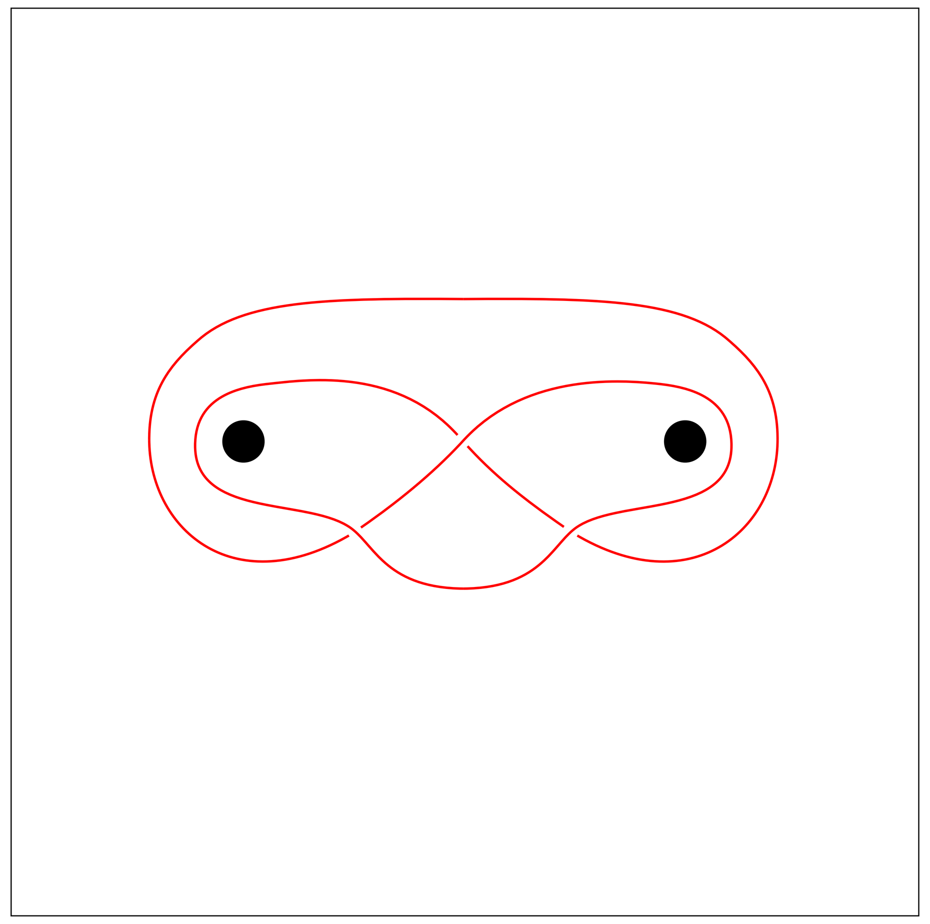
Mise en situation

C'est la bière du samedi soir des SUMM et, sans grande surprise, vous vous retrouvez dans une discussion endiablée où chacun et chacune lance divers problèmes mathématiques et énigmes de tout genre. C'est alors que quelqu'un vous lance la problématique suivante :

> *Supposons que vous ayez deux clous bien fixés au mur auxquels vous voulez accrocher un cadre à l'aide d'une (longue) ficelle. Vous pourriez bien sûr y aller de la façon évidente, mais la fantaisie s'empare de votre esprit : y aurait-il une manière d'installer fermement le cadre de sorte à ce que dès que vous enleviez un seul clou, peu importe lequel, le cadre tombe sur-le-champ ?*

Équipé.e de votre cocarde (ou de la ficelle ci-dessous), vous tentez de trouver une configuration possible...





Mathématisation du problème

Après avoir essayé pendant un moment, vous vous dites qu'il doit bien y avoir une façon de mathématiser le problème afin de le rendre plus facile d'approche. C'est alors qu'un éclair de génie vous frappe : la topologie algébrique est la solution à vos problèmes ! Après quelques calculs sur une serviette de table et plusieurs tentatives de réalisation de votre solution avec une vraie corde donnant éventuellement une réponse concluante, vous expliquez votre logique à votre collègue :

Action	Mathématisation
▪ Enrouler une corde autour de deux clous.	▪ Choisir un **lacet**, c.-à-d. une fonction continue $$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)$.
▪ Enlever un clou.	▪ Considérez les compositions $i \circ \gamma$ et $j \circ \gamma$, où i et j sont respectivement les inclusions naturelles $$\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1,0)\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$$ $$\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1,0)\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}.$$
▪ Le cadre tombe lorsqu'il n'y a qu'un seul clou.	▪ Les compositions $i \circ \gamma$ et $j \circ \gamma$ sont **contractiles**, c.-à-d. continuement déformables en un seul point.

Ainsi, la problématique admet la reformulation mathématique suivante : existe-t-il un lacet non-contractile γ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ tel que $i \circ \gamma$ et $j \circ \gamma$ soient eux contractiles dans leur espace respectif ?

Étude de la contractibilité

Pour la suite des choses, X dénotera soit $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$, soit $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, soit $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$. Pour étudier la contractibilité des lacets dans X, il faut étudier le **groupe fondamental** de X :

$$\pi_1(X) := \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)\} / \simeq,$$

où $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ si γ_1 est continuement déformable en γ_2 dans X, ceci en fixant les extrémités de γ_1. On dit alors que γ_1 est **homotope** à γ_2. On dénotera par $\varnothing$ la classe du chemin constant.

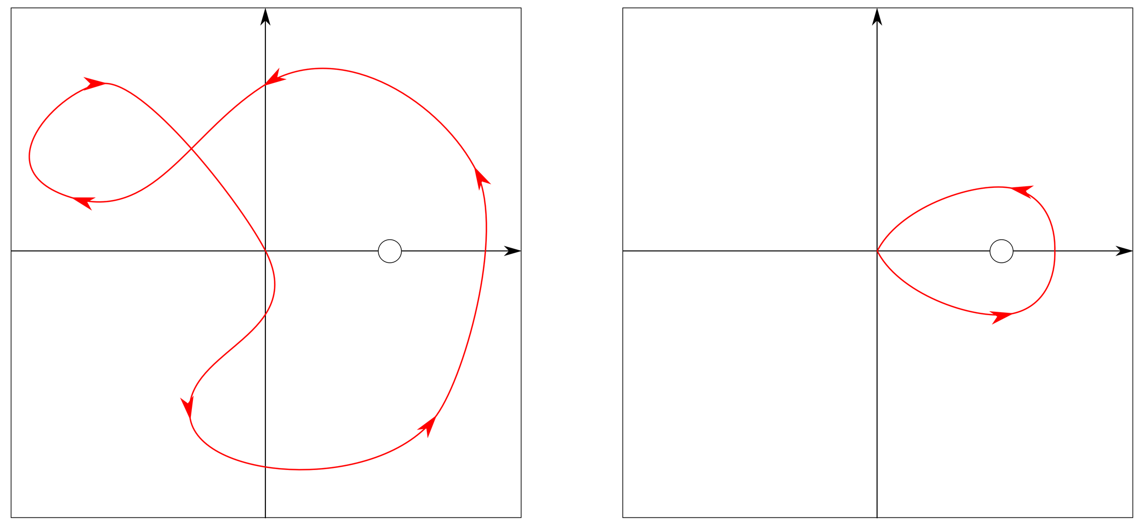


FIGURE – Deux chemins homotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

De la topologie à l'algèbre

Il y a une « multiplication » naturelle sur $\pi_1(X)$: le chemin $\gamma_1\gamma_2$ est celui obtenu en parcourant d'abord γ_1, puis γ_2. Cette opération a plusieurs propriétés désirables :

- Associativité
- Élément neutre : $\varnothing$
- Élément inverse : $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$, où $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$

Autrement dit, $\pi_1(X)$ est un *groupe*.

De même, la composition par les inclusions induit des applications $i_\sharp$ et $j_\sharp$ entre les groupes fondamentaux qui respectent cette opération, c.-à-d. des *homomorphismes*. Alors, la question revient à démontrer que

$$\ker i_\sharp \cap \ker j_\sharp \neq \{\varnothing\}.$$

Calcul des groupes fondamentaux

Comme le montre la figure de la section précédente, la classe d'homotopie d'un lacet dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ est uniquement déterminée par le nombre de tour (avec orientation) que ledit lacet fait autour du point $(1,0)$. Si l'on note par a la classe représentée par les lacets de la figure précédente, on a

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}) = \{\dots, a^{-1}, \varnothing, a, a^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}.$$

La même logique donne $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\})$ en fonction d'un générateur b.

Un peu de réflexion convainc que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1,0)\})$ est engendré par des produits de a et b et qu'il n'y a pas de relation entre ces générateurs. Attention : comme la figure suivante le montre, l'ordre des a et b importe. Autrement dit,

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1,0)\}) = \{a^{n_1}b^{m_1} \dots a^{n_k}b^{m_k} \mid n_i, m_i \in \mathbb{Z}\},$$

avec $a^0 = b^0 = \varnothing$.

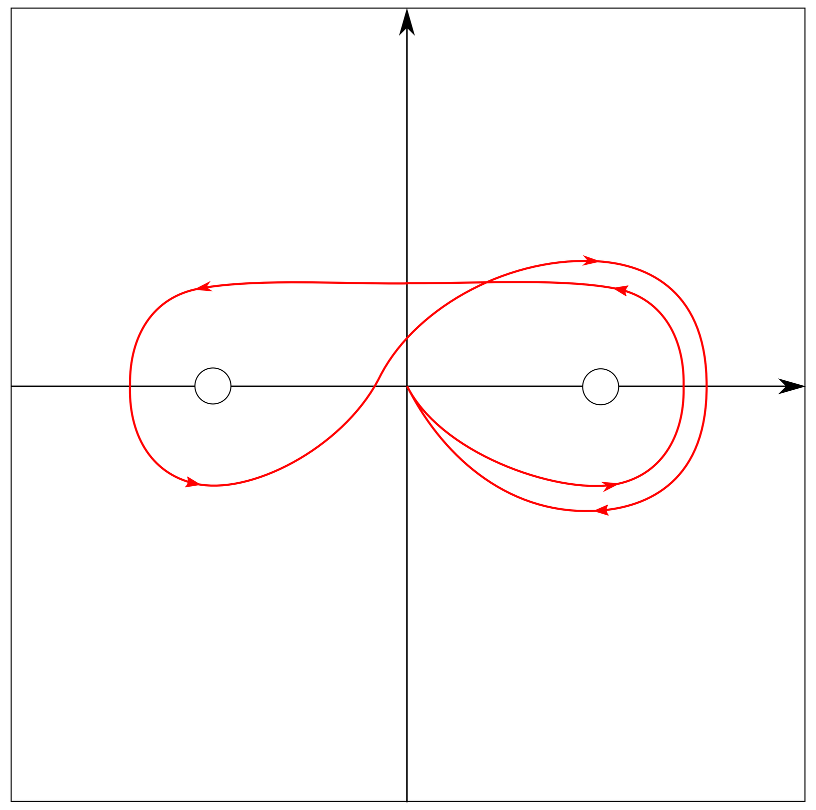


FIGURE – $aba^{-1} \neq b$ dans $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\})$

De plus, le dessin ci-haut supporte l'intuition que

$$i_\sharp(a) = a, \quad i_\sharp(b) = \varnothing$$
$$\text{et} \quad j_\sharp(a) = \varnothing, \quad j_\sharp(b) = b.$$

Conclusion

Plaçant tous ces éléments ensemble, vous obtenez finalement la réponse désirée : $\ker i_\sharp \cap \ker j_\sharp$ est donné par

$$\{a^{n_1}b^{m_1} \dots a^{n_k}b^{m_k} \mid n_1 + \dots + n_k = m_1 + \dots + m_k = 0\}.$$

Par exemple, la solution donnée en bas à gauche correspond à $aba^{-1}b^{-1}$ lorsqu'on oriente correctement la ficelle.

Votre exposé terminé, votre collègue est bouche bée : non seulement avez vous démontré qu'il était possible d'accrocher le cadre comme il était demandé, mais vous avez trouvé toutes les façons de le faire !

Bien sûr, il est possible de rendre les arguments utilisés ici rigoureux à l'aide de la théorie de revêtements et du théorème de Seifert-van Kampen, mais cela sera pour une autre fois...

Vers diverses généralisations

Armé.e de cet outil théorique qu'est le groupe fondamental, vous pouvez alors attaquer la généralisation directe à k clous du problème. Ceci vous mènera alors à la problématique plus générale de calculer le groupe fondamental d'un *espace topologique* X. Par exemple, pouvez-vous calculer le groupe fondamental du tore ?

Ceci mène alors à une toute autre généralisation du problème, dont l'indice « 1 » dans la notation du groupe fondamental laisse présager : étudier

$$\begin{aligned}\pi_n(X, x_0) :&= \{f : [0,1]^n \to X \mid f(\partial[0,1]^n) = x_0 \in X\} / \simeq \\ &\cong \{f : S^n \to X \mid f(1, 0 \dots, 0) = x_0 \in X\} / \simeq,\end{aligned}$$

où $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ est l'ensemble des points à distance 1 de l'origine et $\simeq$ est la relation d'homotopie appropriée. Pour un petit défi, pouvez-vous répondre au problème

$$\pi_n\left(S^k, (1, 0, \dots, 0)\right) = \ ?$$

pour diverses valeurs de n et k ?

Références

[1] Allen Hatcher.
Algebraic Topology.
Self-published, 2001.

[2] Jeffrey Strom.
Modern Classical Homotopy Theory, volume 127 of *Graduate Studies in Mathematics.*
American Mathematical Society, 2011.