Comment distinguer deux espaces?

Jean-Philippe Chassé

Département de mathématiques et statistique
Université de Montréal

4 avril 2019

Plan

Introduction

- La question la plus fondamentale en topologie : comment savoir si deux espaces sont équivalents l'un à l'autre ?

- **Note :** Des bonnes notions d' « espace » et d' « équivalence » ont pris du temps à être développées, mais nous allons nous permettre un peu de révisionnisme historique.

- Cela permet d'étudier aussi les applications continues $f : X \to Y$ en leur associant leur cône

$$C_f := (X \times [0,1] \sqcup Y) \,/\, ((x,1) \sim (x',1), (x,0) \sim f(x))\,.$$

Plan

La classification des surfaces

- **(1850's)** Travaux de Riemann sur les équations polynomiales complexes le mène à considérer des surfaces fermées orientables.

- **(Fin du XIX^e siècle)** Clifford, van Dyck, etc. termine de démontrer le théorème de classification de ces objets.

Théorème (Classification des surface fermées orientables)

Soit Σ, une surface fermée orientable. Il existe $g \in \mathbb{N}_0$ tel que Σ soit homéomorphe à un tore à g trous.

Une définition intuitive des nombres de Betti

- **(Fin du XIX^e siècle)** Betti généralise des idées sur les surfaces aux variétés de dimension supérieure.

Définition

Pour une variété compacte M de dimension n et $0 \leq i \leq n$, le i-ième **nombre de Betti**, noté β_i, est « le nombre de trous de dimension i dans M ».

Deux espaces indistinguables

FIGURE – Les deux espaces ont les mêmes nombres de Betti : $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$ et $\beta_2 = 1$.

Plan

La définition d'*Analysis Situs*

- **(1895)** Publication d'*Analysis Situs* par Poincaré, considéré comme la naissance de la topologie algébrique.

Définition

Soient M, une variété fermée orientée. Une **homologie** est une relation

$$v_1 + \cdots + v_\lambda \sim 0$$

où les v_i sont des sous-variétés de même dimension telles qu'il existe une sous-variété W telle que $\partial W = v_1 \sqcup \cdots \sqcup v_\lambda$.

Alors, $\beta_i - 1$ est le nombre maximal de sous-variétés de dimension i sans homologie.

- Il note qu'on peut en fait considérer des homologies $k_1 v_1 + \cdots + k_\lambda v_\lambda \sim 0$ pour $k_i \in \mathbb{Z}$.
- Il donne une preuve louche que $\beta_p = \beta_{\dim M - p}$.

Les deux premiers compléments

- **(1898)** Heegard trouve un contre-exemple à la dualité de Poincaré.
- Poincaré réalise la différence entre ses nombres de Betti et ceux de Betti : la torsion.
- **(1899,1900)** Publication des deux premiers compléments d'*Analysis Situs* où Poincaré fait bien les choses cette fois-ci.

  Il y introduit le concept de chaînes et de bords en considérant des sommes de simplexes d'une triangulation.

Un exemple de torsion

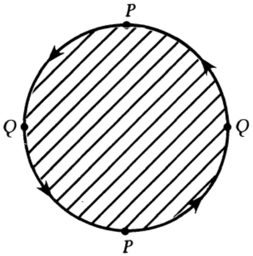

FIGURE – Le plan projectif est un espace avec de la torsion.

Plan

L'observation de Noether

- **(1925)** Alors que Hopf et Alexandroff sont à Göttingen, Noether les entend parler d'homologie. Elle réalise quelque chose :

  Les i-chaînes forment un groupe C_i et le bord est un homomorphisme $d_i : C_i \to C_{i-1}$ tel que $d_{i-1} \circ d_i = 0$. Alors, on peut définir les groupes d'homologie

$$H_i = \frac{\operatorname{Ker} d_i}{\operatorname{Im} d_{i+1}}.$$

Théorème (Classification des groupes abéliens de type fini)

Soit H, un groupe abélien de type fini. Il existe $\beta \in \mathbb{N}_0$ et $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{N}$ tels que

$$H \cong \mathbb{Z}^{\beta} \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_d}.$$

L'explosion des saveurs homologiques

Outre les homologies pour des complexes simpliciaux, il apparaît éventuellement des homologies pour des espaces plus généraux :

- **(1922)** Alexandroff développe une homologie pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$.
- **(1930-1935)** Les travaux de Pontrjagin, Vietoris et Alexandroff mènent Čech à développer l'homologie qui porte maintenant son nom.
- **(1943)** Eilenberg développe l'homologie singulière à partir des idées de Lefschetz.
- **(1952)** Eilenberg et Steenrod axiomatisent les théories d'homologie et démontrent qu'elles sont toutes les mêmes sur des espaces gentils.

La recette du succès

Toutes ces saveurs proviennent ultimement d'une même recette, formalisée en 1929 par Mayer :

(i) À partir de concidérations topologiques, associer à un espace topologique (assez gentil) X un complexe de chaînes $(C_\bullet, d_\bullet)$, c.-à-d. une suite de groupes et d'homomorphismes

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

(ii) Construire les groupes d'homologie

$$H_i = \frac{\operatorname{Ker} d_i}{\operatorname{Im} d_{i+1}}.$$

(iii) Vérifier que ces groupes ne dépendent pas des choix faits en *(i)*.

Plan

L'introduction de différents coefficients

Peu de temps après *Analysis Situs*, les gens ont commencé à considérer des combinaisons non-entières de chaînes.

- **(1908,1913)** Tietze, puis Alexander et Veblen développent une homologie modulo 2.
- **(1926)** Alexander généralise ses travaux pour obtenir une homologie modulo n.
- **(1933)** Lefschetz développe l'homologie rationnelle et donc, sans torsion.

En terme de complexe de chaînes, si A est un groupe abélien, cela revient à considérer le complexe $(C_\bullet \otimes A, d_\bullet \otimes \mathbb{1}_A)$ plutôt que $(C_\bullet, d_\bullet)$.

Le théorème des coefficients universels

- **(1935)** Čech relie les homologies avec différents coefficients en terme de générateurs et de relations.
- **(1938)** Whitney invente le produit tensoriel de modules.
- **(1952,1966)** Eilenberg, Steenrod et Spanier donne la forme moderne du théorème des coefficients universels.

Théorème (Coefficients universels pour l'homologie)

Soient $(C_\bullet, d_\bullet)$, un complexe de chaînes entier, et A, un groupe abélien. Il existe une suite courte exacte qui scinde

$$0 \longrightarrow H_i \otimes A \longrightarrow H_i(C_\bullet \otimes A) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{i-1}, A) \longrightarrow 0.$$

Donc, rien de nouveau du point de vue de la distinction d'espaces...

Plan

Les précurseurs

- **(1899-1900)** Dans sa bonne preuve de sa dualité, Poincaré associe à une i-chaîne, une $(n-i)$-chaîne duale.

- **(1920's)** Lefschetz et Alexander réalise que sur une variété fermée orientable M de dimension n, il est possible de construire un produit associatif et commutatif au sens gradué

$$\odot : H_i(M) \times H_j(M) \to H_{i+j-n}(M).$$

- **(1930)** Pour des variétés de même dimension M et N et une application continue $f : M \to N$, Hopf construit le *Umkehrhomomorphisus* : un homomorphisme de groupe

$$\varphi : H_i(N) \to H_i(M)$$

tel que $\varphi(u \odot v) = \varphi(u)\varphi(v)$.

La création de la cohomologie

- **(1935)** À la conférence internationale sur la topologie de Moscou, Alexander et Kolmogorov introduisent tous deux la cohomologie.

  De plus, le papier de Kolmogorov qui suit la conférence réinterprète la dualité de Poincaré sous la forme qu'on la connaît aujourd'hui.

Définition

Soient $(C_\bullet, d_\bullet)$, un complexe de chaînes entier, et A, un groupe abélien. On définit

$$C^i := \mathrm{Hom}(C_i, A) \quad \text{et} \quad d^i := d_i^*.$$

Le i-ième **groupe de cohomologie** avec coefficient dans A est donné par

$$H^i := \frac{\mathrm{Ker}\, d^i}{\mathrm{Im}\, d^{i-1}}.$$

Le théorème des coefficients universels (encore)

- **(1942)** Après leurs travaux sur le foncteur Ext, Eilenberg et MacLane trouvent la formulation moderne du théorème des coefficients universels pour la cohomologie.

Théorème (Coefficients universels pour la cohomologie)

Soient $(C_\bullet, d_\bullet)$, un complexe de chaînes entier, et A, un groupe abélien. Il existe une suite courte exacte qui scinde

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{i-1}, A) \longrightarrow H^i(C^\bullet; A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_i, A) \longrightarrow 0.$$

Toujours rien de nouveau du point de vue de la distinction d'espaces...

Le cup-produit

- **(1935)** En même temps qu'introduire qu'ils introduisent la cohomologie, Alexander et Kolmogorov introduisent un produit sur celle-ci.
- **(1936,1937)** Čech et Whitney corrigent indépendemment la définition du cup-produit et démontre qu'il est dual au produit d'intersection.

Définition

Soient X, un espace topologique, $(C^\bullet, d^\bullet)$, un complexe de cochaînes sur X, et A, un PID. Le cup-produit est donné par la composition

$$H^i(X;A) \times H^j(X;A) \xrightarrow{\otimes} H^{i+j}(X \times X;A) \xrightarrow{\Delta^*} H^{i+j}(X;A),$$

où $\Delta : X \to X \times X$ est la diagonale et $\otimes$ dénote le produit tensoriel des représentants des classes de cohomologie.

Deux espaces maintenant distinguables

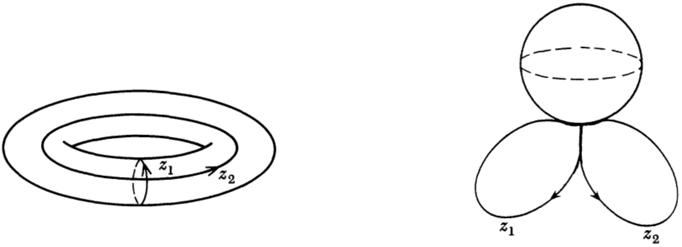

FIGURE – Sur le tore, $z_1 z_2 \neq 0$, alors que sur $S^2 \vee S^1 \vee S^1$, $z_1 z_2 = 0$.

References

[1] DIEUDONNÉ, J. : A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser (1989)

[2] HILTON, P. : A Brief, Subjective History of Homology and Homotopy Theory in This Century. Mathematics Magazine, **61**(5), 282-291 (1988)

[3] MASSEY, W.S. : A History of Cohomology Theory. In : History of Topology, Elsevier. pp.579-604 (1989)