Brève excursion dans le monde des courbes remplissantes

Jean-Philippe Chassé

Département de mathématiques et statistique
Université de Montréal

13 janvier 2018

Plan

Plan

1. Introduction
2. Construction
   - Courbe de Hilbert
   - Surjectivité
   - Continuité
   - Différentiabilité
3. Implications
   - Généricité des courbes remplissantes
   - Conséquences

Mise en contexte

Il est bien connu, grâce à Cantor, qu'il existe une bijection entre $[0,1]$ et $[0,1]^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais est-il possible de prendre cette bijection continue ?

Malheureusement, pour des raisons d'ordre topologique, il s'avère que non. Cependant, nous pourrions adoucir notre hypothèse de bijectivité pour une de surjectivité ; une telle courbe s'appelle une *courbe remplissante*.

Historiquement, la première construction d'une telle courbe dans le cas $n = 2$ est due à Peano, en 1890. Cependant, à des fins pédagogiques, nous suivrons celle due Hilbert, en réponse à Peano, un an plus tard.

Plan

Partition

Pour un entier naturel n, on subdivise $[0,1]$ et $[0,1]^2$ en sous-intervalles et sous-carrés respectivement :

$$[0,1] = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,4^n\}} \left[\frac{i-1}{4^n}, \frac{i}{4^n}\right]$$

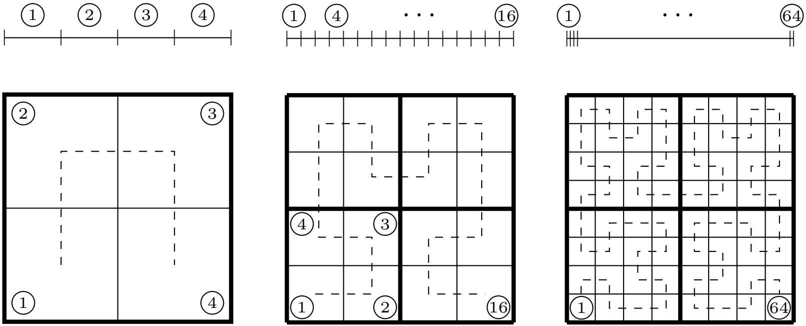
et

$$[0,1]^2 = \bigcup_{i,j \in \{1,\ldots,2^n\}} \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right] \times \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$$

et on associe à chaque sous-intervalle un sous-carré ; mais comment faire cela intelligemment ?

Partition (suite)

Une image vaut mille mots :



(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$

▸ Retour à la rigueur

Définition de la courbe de Hilbert

À tout point $t \in [0,1]$ correspond une suite de sous-intervalles imbriqués $\{[(i_n - 1)/4^n, i_n/4^n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenant chacun t. Alors, par la correspondance que l'on vient de construire, on obtient une suite de sous-carrés imbriqués convergeant vers un point du carré On définit donc l'image de t par la courbe de Hilbert φ comme étant ce point.

Resterait à vérifier que la définition ne dépend pas de la suite de sous-intervalles, mais c'est relativement clair que c'est le cas.

Vérification de la surjectivité

Vérification de la surjectivité

Trivial.

Vérification de la continuité

Si

$$0 \leq t_2 - t_1 < 4^{-n} \ ,$$

alors, à la n-ième partition, $[t_1, t_2]$ n'intersecte qu'au plus deux sous-intervalles adjacents de ladite partition. Ainsi, l'image par φ de ces points doit être contenue dans au plus deux sous-carrés adjacents de la n-ième partition, qui ont toujours un côté commun et sont de longueur 2^{-n}. Donc,

$$||\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|| \leq \sqrt{\left(\frac{2}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n} \ ,$$

d'où la continuité précédemment annoncée.

◂ Dessins

Vérification de la (non-)différentiabilité

Lorsque $n = 2$, pour un point donné, on peut toujours en trouver un autre qui sera envoyé à un sous-carré disjoint. Or, si $t \in [0, 1]$, à la n-ième partition, il résidera dans un intervalle de la forme $[16(i-1)/4^n, 16i/4^n]$. Par réciprocité, on peut prendre un point t_n dans $[16(i-1)/4^n, 16i/4^n]$ de sorte à ce que son image par φ soit dans un sous-carré de la n-ième partition disjoint de celui de $\varphi(t)$. Autrement dit,

$$|t - t_n| \leq 4^{-n+2} \quad \text{mais} \quad ||\varphi(t) - \varphi(t_n)|| \geq 2^{-n} ,$$

d'où,

$$\left\| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_n)}{t - t_n} \right\| \geq 2^{n-4} .$$

Ainsi, la suite des t_n converge vers t, mais le taux de variation entre $\varphi(t)$ et $\varphi(t_n)$ diverge. Donc, φ est différentiable en aucun point.

Dessins

Plan

Clairement, la construction se généralise pour l'hypercube $[0,1]^n$, mais à quel point l'espace d'arrivée peut être générique ?

Théorème de Hahn-Mazurkiewicz

Clairement, la construction se généralise pour l'hypercube $[0,1]^n$, mais à quel point l'espace d'arrivée peut être générique ?

Théorème (Hahn-Mazurkiewicz)

Un espace topologique non-vide et séparé X admet une courbe remplissante $\varphi : [0,1] \to X$ si et seulement si il est compact, connexe, localement connexe et métrisable.

Applications

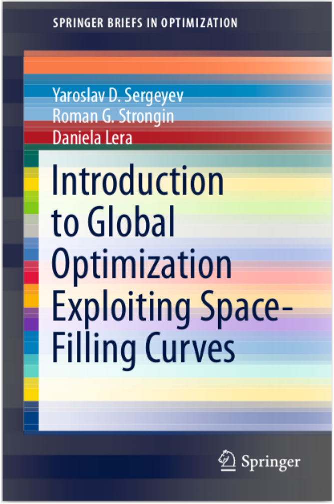
Applications

The present book introduces quite an unusual combination of such a practical field as global optimization with one of the examples *per eccellenza* of pure mathematics—space-filling curves. The reason for such a combination is the following. The curves have been first introduced by Giuseppe Peano in 1890 who has proved that they fill in a hypercube $[a,b] \subset R^N$, i.e., they pass through every point of $[a,b]$, and this gave rise to the term *space-filling curves*. Then, in the second half of the twentieth century it has been independently shown in the Soviet Union and the USA (see [9, 132, 139]) that, by using space-filling curves, the multidimensional global minimization problem over the hypercube $[a,b]$ can be turned into a one-dimensional problem giving so a number of new exciting possibilities to attack hard multidimensional problems using such a reduction.

The book proposes a number of algorithms using space-filling curves for solving the core global optimization problem—minimization of a multidimensional, multiextremal, non-differentiable Lipschitz (with an unknown Lipschitz constant) function $F(y)$ over a hypercube $[a,b] \subset R^N$. A special attention is dedicated both to techniques allowing one to adaptively estimate the Lipschitz constant during

Applications (suite)

Une source fiable :



Applications (détails)

Le résultat mathématique à la base de l'application est que si l'on a une fonction lipschitzienne $F : [0,1]^n \to \mathbb{R}$, c.-à-d. $\exists L > 0$ telle que

$$|F(y') - F(y)| \leq L||y' - y|| \qquad \forall y, y' \in [0,1]^n \ ,$$

alors

$$\min_{y \in [0,1]^n} F(y) = \min_{x \in [0,1]} F(\varphi(x))$$

par surjectivité de φ, et de plus,

$$|F(\varphi(x')) - F(\varphi(x))| \leq 2L\sqrt{n+3}\ |x' - x|^{\frac{1}{n}} \ .$$

où n est bien sûr la dimension de l'hypercube.

Implications théoriques

Our interest in measure-preserving space-filling curves stems from the fact that they allows a "change of integration variable", going from d integration variables to solely 1 variable. Indeed, given a measurable function $f : T \to \mathbb{R}$ and a continuous map $c : [0,1] \to T$, the map $f \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}$ is also measurable. Therefore, if f is integrable and if c is a measure-preserving space-filling curve of T, we have

$$\int_T f(t)\, dt = \int_{[0,1]} (f \circ c)(u)\, du \,.$$

Let G_T be a T-continuous cover of M by rB and $c : [0,1] \to T$ be a measure-preserving space-filling curve. The map $G_I := G_T \circ (c \times id) : [0,1] \times rB \to M$ is thus a $[0,1]$-continuous cover of M by rB. Given a partition of unity F_T subordinated to G_T, the map $F_I := F_T \circ (c \times id) : [0,1] \times rB \to [0,\infty)$ is a partition of unity subordinated to G_I.

Implications théoriques (suite)

CONTINUOUS COVERS ON SYMPLECTIC MANIFOLDS

FRANÇOIS LALONDE AND JORDAN PAYETTE

Abstract. In this article, we first introduce the notion of a *continuous cover* of a manifold parametrised by any compact manifold endowed with a mass 1 volume-form. We prove that any such cover admits a partition of unity where the usual sum is replaced by integrals. We then generalize Polterovich's notion of Poisson non-commutativity to such a context in order to get a richer definition of non-commutativity and to be in a position where one can compare various invariants of symplectic manifolds, for instance the relation between critical values of phase transitions of symplectic balls and eventual critical values of the Poisson non-commutativity. Our first main theorem states that our generalisation of Poisson non-commutativity depends only on real one-parameter spaces since intuitively the Hilbert curve in any high dimensional parameter space fills out the entire manifold and preserves the measure. Our second main theorem states that the Poisson non-commutativity is a (not necessarily strictly) decreasing function of the size of the symplectic balls used to cover continuously any given symplectic manifold. This function has other nice properties as well that do not prevent it from undergoing singularities similar to phase transitions.

This is a VERY preliminary version. A more definitive version will appear on ArXiv within one or two months that will contain other appropriate definitions and results.

References

[1] Sagan, H. *Space-Filling Curves.* Universitext. Springer, 1994.

[2] Sagan, H. Some reflections on the emergence of space-filling curves : The way it could have happened and should have happened, but did not happen. *Journal of the Franklin Institute*, (1991), 419-430.

[3] Peano, G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen 36*, 1 (1890), 157-160.

[4] Hilbert, D. Ueber die stetige abbildung einer linie auf ein flächenstück. *Mathematische Annalen 38*, 3 (1891), 459-460.