Ellipsoïdes et escaliers infinis

Jean-Philippe Chassé

Doctorant
au département de mathématiques et statistique
de l'Université de Montréal

XXIII^e Colloque panquébécois de l'ISM
22 mai 2021

Plongements d'ellipsoïdes

Pour $b \geq a > 0$, considérons l'ellipsoïde

$$E(a,b) := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \frac{\pi |z_1|^2}{a} + \frac{\pi |z_2|^2}{b} < 1 \right\}.$$

Pour $A > 0$, on s'intéresse aux plongements lisses

$$\Psi : E(a,b) \hookrightarrow B(A) := E(A,A)$$

Plongements d'ellipsoïdes

Pour $b \geq a > 0$, considérons l'ellipsoïde

$$E(a,b) := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \frac{\pi|z_1|^2}{a} + \frac{\pi|z_2|^2}{b} < 1 \right\}.$$

Pour $A > 0$, on s'intéresse aux plongements lisses

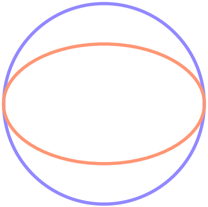
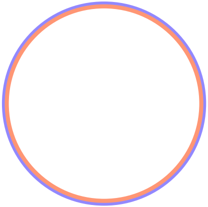
$$\Psi : E(a,b) \hookrightarrow B(A) := E(A,A)$$

respectant une certaine condition sur leur matrice jacobienne

$$d\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_4}{\partial x_4} \end{pmatrix} \in G.$$

Deux mondes

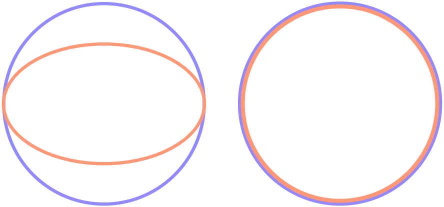
Quand est-ce qu'un tel $\Psi : E(a,b) \hookrightarrow B(A)$ existe ?

$\mathrm{SO}(4)$	$\mathrm{SL}(4)$
$\max\{a,b\} \leq A$	$ab \leq A^2$
	

Deux mondes

Quand est-ce qu'un tel $\Psi : E(a,b) \hookrightarrow B(A)$ existe ?

SO(4)	SL(4)
$\max\{a,b\} \leq A$	$ab \leq A^2$



Y a-t-il un monde entre les deux ?

Plan

Plan

Le groupe symplectique

Définition

Le **groupe symplectique** $\mathrm{Symp}(n)$ est l'ensemble des matrices A de taille $2n \times 2n$ telles que

$$A^T J_0 A = J_0 := \left(\begin{array}{c|c} 0_{n\times n} & -\mathbb{1}_{n\times n} \\ \hline \mathbb{1}_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{array} \right).$$

Le groupe symplectique

Définition

Le **groupe symplectique** $\mathrm{Symp}(n)$ est l'ensemble des matrices A de taille $2n \times 2n$ telles que

$$A^T J_0 A = J_0 := \left(\begin{array}{c|c} 0_{n\times n} & -\mathbb{1}_{n\times n} \\ \hline \mathbb{1}_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{array}\right).$$

Quelques propriétés de $\mathrm{Symp}(n)$:

- $\mathrm{Symp}(n) \subseteq \mathrm{SL}(2n)$
- $\mathrm{Symp}(n) \cap \mathrm{SO}(2n) = \mathrm{U}(n)$
- $\mathrm{Symp}(1) = \mathrm{SL}(2)$

Mais pourquoi prendre $G = \mathrm{Symp}(n)$?

- Topologie symplectique

Mais pourquoi prendre $G = \mathrm{Symp}(n)$?

- Topologie symplectique
- Mécanique classique

Mais pourquoi prendre $G = \mathrm{Symp}(n)$?

- Topologie symplectique
- Mécanique classique
- Systèmes dynamiques et EDP

Mais pourquoi prendre $G = \mathrm{Symp}(n)$?

- Topologie symplectique
- Mécanique classique
- Systèmes dynamiques et EDP
- Pourquoi pas ?

> *Mathematics is about "interesting structures". What makes a structure interesting is an aboundance of interesting problems ; we study a structure by solving these problems.*
>
> *-Mikhaïl Gromov*

Un théorème de Gromov

Mais pourquoi est-ce que le problème de plongement symplectique pourrait être intéressant alors ?

Un théorème de Gromov

Mais pourquoi est-ce que le problème de plongement symplectique pourrait être intéressant alors ?

Théorème (Théorème de non-plongement de Gromov)

S'il existe un plongement symplectique $B^{2n}(a) \hookrightarrow Z^{2n}(A) := D(A) \times \mathbb{C}^{n-1}$, alors $a \leq A$.

Plan

Plan

L'escalier de Fibonacci

Considérons la fonction

$$c_{EB}(a) := \inf\{A \mid \Psi : E(1,a) \hookrightarrow B(A),\ d\Psi \in \mathrm{Symp}(2)\},$$

pour $a \geq 1$.

L'escalier de Fibonacci

Considérons la fonction

$$c_{EB}(a) := \inf\{A \mid \Psi : E(1,a) \hookrightarrow B(A),\ d\Psi \in \mathrm{Symp}(2)\},$$

pour $a \geq 1$.

Notons les nombres de Fibonacci par

$$(F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \dots) = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$$

et le nombre d'or par $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Considérons les nombres

$$a_n := \left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}\right)^2 \quad \text{et} \quad b_n := \frac{F_{2n+3}}{F_{2n-1}}.$$

On peut vérifier que

$$\cdots < a_n < b_n < a_{n+1} < \cdots \to \tau^4.$$

L'escalier de Fibonacci (suite)

Théorème (McDuff-Schlenk, 2012)

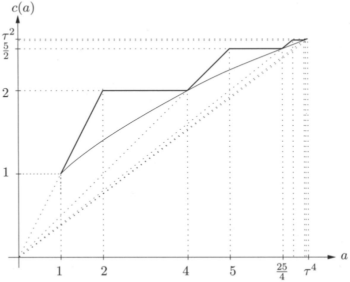
La fonction $c_{EB}(a)$ est

(i) est linéaire sur les intervalles de la forme $[a_n, b_n]$ et constante sur les intervalles de la forme $[b_n, a_{n+1}]$,

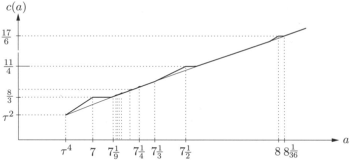
(ii) est égale à $\sqrt{a}$ sur $[\tau^4, (\frac{17}{6})^2]$ sauf pour neuf intervalles disjoints sur lesquels elle est linéaire par morceaux,

(iii) est égale à $\sqrt{a}$ pour $a \geq (\frac{17}{6})^2$.

L'escalier de Fibonacci (suite)



(a) L'escalier



(b) Les intervalles disjoints

Un principe de Eliashberg

La clef de la preuve du théorème de non-plongement est que l'existence d'un plongement symplectique $B^{2n}(a) \hookrightarrow Z^{2n}(A)$ force l'existence d'une courbe (presque) holomorphe. L'existence d'une telle courbe impose alors la condition $a \leq A$.

Un principe de Eliashberg

La clef de la preuve du théorème de non-plongement est que l'existence d'un plongement symplectique $B^{2n}(a) \hookrightarrow Z^{2n}(A)$ force l'existence d'une courbe (presque) holomorphe. L'existence d'une telle courbe impose alors la condition $a \leq A$.

Cette idée a grandement proliférée depuis le papier original de Gromov et a mené, entre-autres, au principe suivant :

Conjecture (Principe de Eliashberg)

Toute obstruction à un plongement symplectique (outre le volume) provient d'une courbe (presque) holomorphe.

Un principe de Eliashberg

La clef de la preuve du théorème de non-plongement est que l'existence d'un plongement symplectique $B^{2n}(a) \hookrightarrow Z^{2n}(A)$ force l'existence d'une courbe (presque) holomorphe. L'existence d'une telle courbe impose alors la condition $a \leq A$.

Cette idée a grandement proliférée depuis le papier original de Gromov et a mené, entre-autres, au principe suivant :

Conjecture (Principe de Eliashberg)

Toute obstruction à un plongement symplectique (outre le volume) provient d'une courbe (presque) holomorphe.

Dans notre cas, cela se traduit en

$$c_{EB}(a) = \max\{\sqrt{a}, \text{obstructions holomorphes}\}.$$

Plan

L'approche de McDuff-Schlenk

$$E(1,a) \hookrightarrow B(A) \iff \bigsqcup_{i=1}^{N} B(a_i) \hookrightarrow B(A)$$

L'approche de McDuff-Schlenk

$$E(1,a) \hookrightarrow B(A) \iff \bigsqcup_{i=1}^{N} B(a_i) \hookrightarrow B(A)$$

$$\iff \exists \text{ certaines courbes hol. dans } \mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_N}(\mathbb{C}P^2)$$

L'approche de McDuff-Schlenk

$$E(1,a) \hookrightarrow B(A) \iff \bigsqcup_{i=1}^{N} B(a_i) \hookrightarrow B(A)$$

$$\iff \exists \text{ certaines courbes hol. dans } \mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_N}(\mathbb{C}P^2)$$

$$\iff \exists \omega_{(A,\mathbf{a})} \text{ symp. sur } \mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_N}(\mathbb{C}P^2)$$

L'approche de McDuff-Schlenk

$$E(1,a) \hookrightarrow B(A) \iff \bigsqcup_{i=1}^{N} B(a_i) \hookrightarrow B(A)$$

$$\iff \exists \text{ certaines courbes hol. dans } \mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_N}(\mathbb{C}P^2)$$

$$\iff \exists \omega_{(A,\mathbf{a})} \text{ symp. sur } \mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_N}(\mathbb{C}P^2)$$

$$\iff |\mathbf{a}| \leq A \text{ et } \sum_{i=1}^{N} a_i m_i \leq dA \text{ si}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = 3d-1 \text{ et } \sum_{i=1}^{N} m_i^2 = d^2+1$$

$$+ \text{ cond. sur transfo. de Cremona de } (d, \mathbf{m})$$

Merci de votre attention !

Y a-t-il des questions ?

Bibliographie

[1] SCHLENK, F. (2018) Symplectic embedding problems, old and new. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **55**(2), 139-182

[2] MCDUFF, D. & SCHLENK, F. (2012) The embedding capacity of 4-dimensional ellipsoids. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Second Series **175**(3), 1191-1282

[3] HUTCHINGS, M. (2011) Quantitative embedded contact homology. *Journal of Differential Geometry* **88**, 231-266