

# Dans les petites sphères, les meilleurs plongements

Jean-Philippe Chassé

Doctorat  
au département de mathématiques et statistique  
de l'Université de Montréal

Clubmath  
16 février 2022

## Ellipsoïdes

Prenons des nombres  $a$  et  $b$  tels que  $b \geq a > 0$ . Considérons l'*ellipsoïde*

$$\begin{aligned} E(a, b) &:= \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\pi|z_1|^2}{a} + \frac{\pi|z_2|^2}{b} < 1 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{\pi x_1^2}{a} + \frac{\pi y_1^2}{a} + \frac{\pi x_2^2}{b} + \frac{\pi y_2^2}{b} < 1 \right\}. \end{aligned}$$

## Ellipsoïdes

Prenons des nombres  $a$  et  $b$  tels que  $b \geq a > 0$ . Considérons l'*ellipsoïde*

$$\begin{aligned} E(a, b) &:= \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\pi|z_1|^2}{a} + \frac{\pi|z_2|^2}{b} < 1 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{\pi x_1^2}{a} + \frac{\pi y_1^2}{a} + \frac{\pi x_2^2}{b} + \frac{\pi y_2^2}{b} < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Pour  $A > 0$ , nous allons aussi considérer la *boule* de rayon  $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$  :

$$B(A) := E(A, A).$$

## Plongements entre ellipsoïdes

Nous nous intéresserons aux *plongements* de  $E(a, b)$  dans  $B(A)$ , c'est-à-dire les applications

$$\Psi : E(a, b) \rightarrow B(A)$$

telles que

## Plongements entre ellipsoïdes

Nous nous intéresserons aux *plongements* de  $E(a, b)$  dans  $B(A)$ , c'est-à-dire les applications

$$\Psi : E(a, b) \rightarrow B(A)$$

telles que

- i)  $\Psi$  est lisse, c'est-à-dire toutes les dérivées partielles existent ;

## Plongements entre ellipsoïdes

Nous nous intéresserons aux *plongements* de  $E(a, b)$  dans  $B(A)$ , c'est-à-dire les applications

$$\Psi : E(a, b) \rightarrow B(A)$$

telles que

- i)  $\Psi$  est lisse, c'est-à-dire toutes les dérivées partielles existent ;
- ii)  $\Psi$  est injective ;

## Plongements entre ellipsoïdes

Nous nous intéresserons aux *plongements* de  $E(a, b)$  dans  $B(A)$ , c'est-à-dire les applications

$$\Psi : E(a, b) \rightarrow B(A)$$

telles que

- i)  $\Psi$  est lisse, c'est-à-dire toutes les dérivées partielles existent ;
- ii)  $\Psi$  est injective ;
- iii)

$$|\mathbf{J}_\Psi| := \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_4}{\partial x_4} \end{vmatrix} \neq 0.$$

## Conditions sur la matrice jacobienne

Notons que la condition iii) revient à dire que la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_\Psi$  est dans

$$\mathrm{GL}(4) := \{A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4) \mid A^{-1} \text{ existe}\}$$

en tout point.

## Conditions sur la matrice jacobienne

Notons que la condition iii) revient à dire que la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_\Psi$  est dans

$$\mathrm{GL}(4) := \{A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4) \mid A^{-1} \text{ existe}\}$$

en tout point.

Ceci mène donc à la question principale de cette présentation :

*Soit  $G \subseteq \mathrm{GL}(4)$ . Quelles sont les conditions sur  $a, b$  et  $A$  pour qu'il existe un plongement  $\Psi : E(a, b) \hookrightarrow B(A)$  tel que  $\mathbf{J}_\Psi \in G$  en tout point ?*

## Un cas simple

Considérons le cas le plus évident :  $G = \mathrm{GL}(4)$ .

## Un cas simple

Considérons le cas le plus évident :  $G = \mathrm{GL}(4)$ .

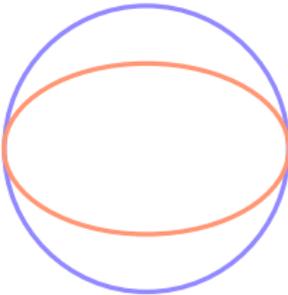
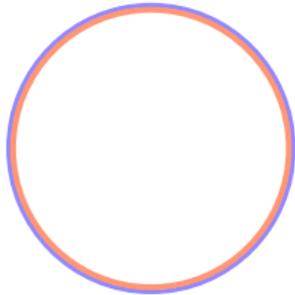
Alors, il n'y a aucune restriction puisqu'on peut toujours prendre le plongement

$$\Psi(z_1, z_2) = \left( \sqrt{\frac{A}{a}} z_1, \sqrt{\frac{A}{b}} z_2 \right).$$

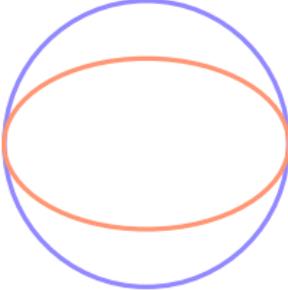
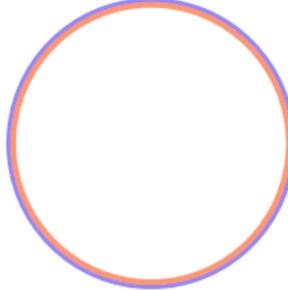
Effectivement, on peut sans trop de problème vérifier chaque condition. Par exemple,

$$|\mathbf{J}_\Psi| = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{A}{a}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{A}{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{A}{b}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{A}{b}} \end{vmatrix} = \frac{A^2}{ab} \neq 0.$$

## Deux extrêmes

$G$	$\mathrm{SO}(4)$	$\mathrm{SL}(4)$
Condition :	$a \leq b \leq A$	$ab \leq A^2$
Dessin :		

## Deux extrêmes

$G$	$\mathrm{SO}(4)$	$\mathrm{SL}(4)$
Condition :	$a \leq b \leq A$	$ab \leq A^2$
Dessin :		

Y a-t-il un monde entre les deux ?

# Plan

- ① Plongements symplectiques
- ② Étude des plongements symplectiques optimaux
  - Un escalier infini
  - Mesurer les obstructions aux plongements

# Plan

- ① Plongements symplectiques
- ② Étude des plongements symplectiques optimaux
  - Un escalier infini
  - Mesurer les obstructions aux plongements

# Le groupe symplectique

## Définition

Le **groupe symplectique**  $\text{Symp}(n)$  est l'ensemble des matrices  $A$  de taille  $2n \times 2n$  telles que

$$A^T J_0 A = J_0 := \left( \begin{array}{c|c} 0_{n \times n} & -\mathbf{1}_{n \times n} \\ \hline \mathbf{1}_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{array} \right).$$

# Le groupe symplectique

## Définition

Le **groupe symplectique**  $\text{Symp}(n)$  est l'ensemble des matrices  $A$  de taille  $2n \times 2n$  telles que

$$A^T J_0 A = J_0 := \left( \begin{array}{c|c} 0_{n \times n} & -\mathbb{1}_{n \times n} \\ \hline \mathbb{1}_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{array} \right).$$

Quelques propriétés de  $\text{Symp}(n)$  :

- 1)  $\text{Symp}(n) \subseteq \text{SL}(2n)$
- 2)  $\text{Symp}(n) \cap \text{SO}(2n) = \text{U}(n)$
- 3)  $\text{Symp}(1) = \text{SL}(2)$

## Quelques conséquences de ces propriétés

- 1) Les *plongements symplectiques*, c'est-à-dire les plongements  $\Psi$  tels que  $\mathbf{J}_\Psi \in \text{Symp}(2)$  en tout point, préservent le volume. En particulier, la borne  $ab \leq A^2$  doit être respectée.

## Quelques conséquences de ces propriétés

- 1) Les *plongements symplectiques*, c'est-à-dire les plongements  $\Psi$  tels que  $\mathbf{J}_\Psi \in \text{Symp}(2)$  en tout point, préservent le volume. En particulier, la borne  $ab \leq A^2$  doit être respectée.
- 2) La relation entre  $\text{Symp}(2)$  et  $\text{SO}(4)$  est non-triviale et passe par les nombres complexes. Par contre, on pourrait potentiellement avoir  $a < A < b$ .

## Quelques conséquences de ces propriétés

- 1) Les *plongements symplectiques*, c'est-à-dire les plongements  $\Psi$  tels que  $\mathbf{J}_\Psi \in \text{Symp}(2)$  en tout point, préservent le volume. En particulier, la borne  $ab \leq A^2$  doit être respectée.
- 2) La relation entre  $\text{Symp}(2)$  et  $\text{SO}(4)$  est non-triviale et passe par les nombres complexes. Par contre, on pourrait potentiellement avoir  $a < A < b$ .
- 3) Ça explique notre choix de définition de  $E(a, b)$  !

Mais pourquoi prendre  $G = \text{Symp}(2)$  ?

## Mais pourquoi prendre $G = \text{Symp}(2)$ ?

- Topologie symplectique

## Mais pourquoi prendre $G = \text{Symp}(2)$ ?

- Topologie symplectique
- Mécanique classique

## Mais pourquoi prendre $G = \text{Symp}(2)$ ?

- Topologie symplectique
- Mécanique classique
- Systèmes dynamiques et EDP

## Mais pourquoi prendre $G = \text{Symp}(2)$ ?

- Topologie symplectique
- Mécanique classique
- Systèmes dynamiques et EDP
- Pourquoi pas ?

*Mathematics is about "interesting structures". What makes a structure interesting is an abundance of interesting problems; we study a structure by solving these problems.*

*-Mikhail Gromov*

## Un théorème de Gromov

Mais pourquoi est-ce que le problème de plongement symplectique pourrait être intéressant alors ?

## Un théorème de Gromov

Mais pourquoi est-ce que le problème de plongement symplectique pourrait être intéressant alors ?

Pour  $A > 0$ , considérons

$$Z(A) := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\pi |z_1|^2}{A} < 1 \right\}.$$

On peut démontrer le résultat suivant.

## Un théorème de Gromov

Mais pourquoi est-ce que le problème de plongement symplectique pourrait être intéressant alors ?

Pour  $A > 0$ , considérons

$$Z(A) := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\pi|z_1|^2}{A} < 1 \right\}.$$

On peut démontrer le résultat suivant.

**Théorème (Théorème de non-plongement de Gromov)**

S'il existe un plongement symplectique  $B(a) \hookrightarrow Z(A)$ , alors  $a \leq A$ .

## Le non-plongement en image

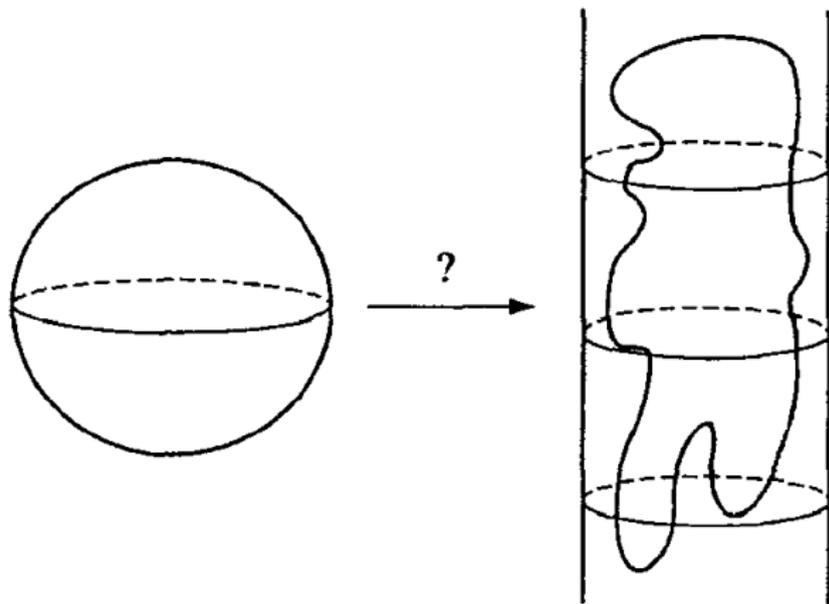


FIGURE – Une visualisation 3D du problème.

# Plan

## ① Plongements symplectiques

## ② Étude des plongements symplectiques optimaux

- Un escalier infini
- Mesurer les obstructions aux plongements

# Plan

- ① Plongements symplectiques
- ② Étude des plongements symplectiques optimaux
  - Un escalier infini
  - Mesurer les obstructions aux plongements

## Une fonction mesurant les plongements optimaux

Considérons la fonction

$$c_{EB}(a) := \inf\{A > 0 \mid \Psi : E(1, a) \hookrightarrow B(A), \mathbf{J}_\Psi \in \text{Symp}(2)\},$$

pour  $a \geq 1$ .

## Une fonction mesurant les plongements optimaux

Considérons la fonction

$$c_{EB}(a) := \inf\{A > 0 \mid \Psi : E(1, a) \hookrightarrow B(A), \mathbf{J}_\Psi \in \text{Symp}(2)\},$$

pour  $a \geq 1$ .

Autrement dit, il existe un plongement symplectique  $E(1, a) \hookrightarrow B(A)$  si et seulement si  $A \geq c_{EB}(a)$ .

## Une fonction mesurant les plongements optimaux

Considérons la fonction

$$c_{EB}(a) := \inf\{A > 0 \mid \Psi : E(1, a) \hookrightarrow B(A), \mathbf{J}_\Psi \in \text{Symp}(2)\},$$

pour  $a \geq 1$ .

Autrement dit, il existe un plongement symplectique  $E(1, a) \hookrightarrow B(A)$  si et seulement si  $A \geq c_{EB}(a)$ .

### Remarque

Soit  $c > 0$ . Un plongement  $\Psi : E(1, a) \hookrightarrow B(A)$  est symplectique si et seulement si  $\Psi_c(z_1, z_2) := \sqrt{c}\Psi(\frac{z_1}{\sqrt{c}}, \frac{z_2}{\sqrt{c}})$  définit un plongement symplectique  $E(c, ac) \hookrightarrow B(cA)$ . Ainsi, on ne perd pas de généralité par la normalisation de  $c_{EB}(a)$ .

## Quelques propriétés des nombres de Fibonacci

Rappelons que le  $n$ -ième nombre de Fibonacci  $F_n$  est défini par récurrence par l'équation

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

avec la convention  $F_{-1} = 1$  et  $F_0 = 0$ . Leur rapport converge vers le fameux nombre d'or :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} =: \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

## Quelques propriétés des nombres de Fibonacci

Rappelons que le  $n$ -ième nombre de Fibonacci  $F_n$  est défini par récurrence par l'équation

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

avec la convention  $F_{-1} = 1$  et  $F_0 = 0$ . Leur rapport converge vers le fameux nombre d'or :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} =: \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Considérons les nombres

$$a_n := \left( \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} \right)^2 \quad \text{et} \quad b_n := \frac{F_{2n+3}}{F_{2n-1}}.$$

On peut vérifier que

$$\cdots < b_{n-1} < a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1} < \cdots \rightarrow \tau^4.$$

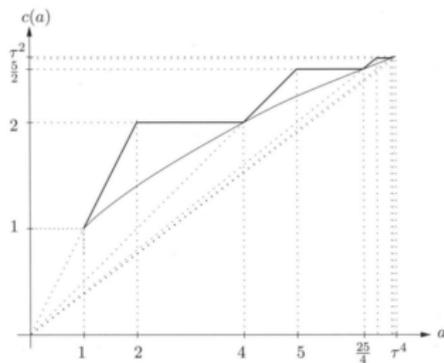
## L'escalier de Fibonacci

### Théorème (McDuff-Schlenk, 2012)

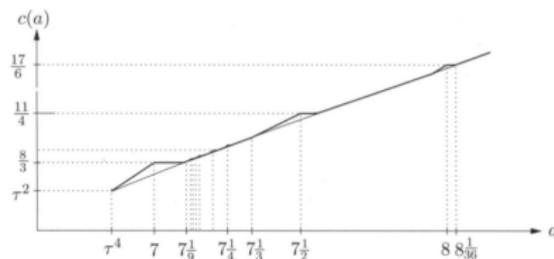
La fonction  $c_{EB}(a)$  est

- (i) est linéaire sur les intervalles de la forme  $[a_n, b_n]$  et constante sur les intervalles de la forme  $[b_n, a_{n+1}]$ ,
- (ii) est égale à  $\sqrt{a}$  sur  $[\tau^4, (\frac{17}{6})^2]$  sauf pour neuf intervalles disjoints sur lesquels elle est linéaire par morceaux,
- (iii) est égale à  $\sqrt{a}$  pour  $a \geq (\frac{17}{6})^2$ .

## L'escalier de Fibonacci (suite)



(a) L'escalier



(b) Les intervalles disjoints

# Plan

- ① Plongements symplectiques
- ② Étude des plongements symplectiques optimaux
  - Un escalier infini
  - Mesurer les obstructions aux plongements

## Un principe d'Eliashberg

La clef de la preuve du théorème de non-plongement est que l'existence d'un plongement symplectique  $B(a) \hookrightarrow Z(A)$  force l'existence d'une certaine courbe (presque) holomorphe  $u : \mathbb{C} \rightarrow Z(A)$ . L'existence d'une telle courbe impose alors la condition  $a \leq A$ .

## Un principe d'Eliashberg

La clef de la preuve du théorème de non-plongement est que l'existence d'un plongement symplectique  $B(a) \hookrightarrow Z(A)$  force l'existence d'une certaine courbe (presque) holomorphe  $u : \mathbb{C} \rightarrow Z(A)$ . L'existence d'une telle courbe impose alors la condition  $a \leq A$ .

Cette idée a grandement proliféré depuis le papier original de Gromov et a mené, entre-autres, au principe suivant :

### Conjecture (Principe d'Eliashberg)

Toute obstruction à un plongement symplectique (outre le volume) provient d'une courbe (presque) holomorphe.

## L'approche de McDuff-Schlenk

Dans notre cas, le principe d'Eliashberg se traduit en

$$c_{EB}(a) = \max\{\sqrt{a}, \text{obstructions holomorphes}\}.$$

Le but est alors de pouvoir calculer ces obstructions explicitement.

## L'approche de McDuff-Schlenk

Dans notre cas, le principe d'Eliashberg se traduit en

$$c_{EB}(a) = \max\{\sqrt{a}, \text{obstructions holomorphes}\}.$$

Le but est alors de pouvoir calculer ces obstructions explicitement.

Ceci se fait essentiellement en deux temps (mais pas trois mouvements) :

- 1) Réduire le problème du plongement en un problème de tassement symplectique de  $N$  boules  $B(a_i)$  dans  $B(A)$ .

## L'approche de McDuff-Schlenk

Dans notre cas, le principe d'Eliashberg se traduit en

$$c_{EB}(a) = \max\{\sqrt{a}, \text{obstructions holomorphes}\}.$$

Le but est alors de pouvoir calculer ces obstructions explicitement.

Ceci se fait essentiellement en deux temps (mais pas trois mouvements) :

- 1) Réduire le problème du plongement en un problème de tassement symplectique de  $N$  boules  $B(a_i)$  dans  $B(A)$ .
- 2) Utiliser beaucoup de topologie symplectique et de géométrie algébrique complexe pour démontrer que ce problème est équivalent à l'existence de certaines solutions entières d'un système d'équations compliqué (mais résolvable).

Merci de votre attention !

## Bibliographie

- [1] SCHLENK, F. (2018) Symplectic embedding problems, old and new. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **55**(2), 139-182
- [2] MCDUFF, D. & SCHLENK, F. (2012) The embedding capacity of 4-dimensional ellipsoids. *Bulletin of the American Mathematical Society, Second Series* **175**(3), 1191-1282
- [3] HUTCHINGS, M. (2011) Quantitative embedded contact homology. *Journal of Differential Geometry* **88**, 231-266