Mit konkreter Mathematik durch ein halbes Jahrhundert

Der Versuch, meine mathematischen Resultate zu ordnen, zeigt Schwerpunkte in Himmelsmechanik, Angewandter Analysis, Asymptotik, numerischer Mathematik, vielleicht auch in algorithmischer Zahlentheorie. Allem gemeinsam ist das Bestreben, Problemstellungen zu konkretisieren und bis zur vollständigen Lösung, z.B. auf dem Computer zu verfolgen. Die Methoden, die ich verwendete, hatten immer einen algorithmischen, ja fast handgreiflichen Aspekt. Häufig genügte schon die Verwendung von geeigneten Variablen, um das Problem auf übersichtliche Art darzustellen. Besonders wichtig war und ist es mir, die gefundene Lösung elegant und einfach darzustellen. So passt der von Graham, Knuth und Patashnik (1989) geprägte Begriff "Concrete Mathematics" sehr gut zu meiner Art, Mathematik zu betreiben. Bezeichnenderweise ist dieses Werk Leonhard Euler (1707-1783) gewidmet, der auch für mich das ganz große Vorbild ist.

Selbstverständlich bin ich, wie viele Leute, geprägt von meinen Lehrern auf allen Stufen, und ich möchte ihnen allen danken für die unzähligen Gedankenabläufe, Anregungen, Anstöße, Vereinfachungen, Hilfestellungen usf., ohne die ich nie in einem solchen Ausmaß in die Mathematik hätte eindringen können. Ich will im folgenden einige Schlüsselerlebnisse aufzählen, die meine späteren Interessen sehr stark beeinflusst hatten. Danach soll mein bisheriges Werk kurz geschildert werden.

Die Anfänge.

Im Alter von 10 Jahren (3. Klasse, 1948) hasste ich den Unterricht im Rechnen, und insbesondere hasste ich die einmal gestellte Aufgabe, für jede (natürliche) Zahl ≤ 100 eine (nichttriviale) Faktorzerlegung aufzuschreiben oder sie als Primzahl zu kennzeichnen. Vielleicht hatte dies aber mein bis heute andauerndes Interesse an der Zahlentheorie geweckt. Die Ausdauer, die hier nötig war, ist zudem eine Eigenschaft, die einem Mathematiker nur nützlich sein kann.

Noch im selben Jahr, in der 4. Klasse, faszinierten mich Schulrechnungen wie $25^2 = 625$, $24 \cdot 26 = 624$, $23 \cdot 27 = 621$. Die darin steckenden Zusammenhänge und die Möglichkeit einer eleganten Abürzung des Rechenvorgangs haben vielleicht meine Vorliebe für alles Algorithmische geweckt. Dies machte nun jedenfalls ungeheuer Spaß, und ich begann damals schon die Faszination der Mathematik zu erahnen und sie als etwas Spannendes, Anregendes zu erleben. Zum Beispiel versuchte ich immer wieder, die vielen Flächen- und Volumenberechnungsformeln aus dem damals sehr populären Pestalozzi-Kalender zu ergründen und anzuwenden.

Vollends hatte es mich gepackt, als mir mein Vater etwas später mehr über die Zahl π erzählte. Damals schon fragte der Klassenlehrer *mich*, wenn er mehr als 3 Dezimalstellen von π brauchte. Das Größte in jener Zeit aber war die Berechnung der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit dem Satz von Pythagoras und dem Ausziehen einer Quadratwurzel. Natürlich hatte ich damals die Zusammenhänge noch nicht wirklich verstehen können, aber die Durchführung der Rechnung und das Nachmessen in einer genauen Zeichnung waren ein absoluter Höhepunkt. Im 7. und 8. Schuljahr lernte ich einen Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras kennen und erlebte damit erstmals die Kraft und Faszination eines mathematischen Beweises. Gleichzeitig eröffneten sich neue Geheimnisse durch aufgeschnappte Wörter wie Sinus, Logarithmus, die zu ergründen ich ein starkes Bedürfnis verspürte. Dass man mit dem alten Rechenschieber von meinem Onkel richtig multiplizieren kann, war für mich ein Wunder, das dringend eine Erklärung brauchte.

Auf dem Weg zum Mathematiker.

In der Mittelschule (Oberrealschule Zürich, 9. bis 13. Schuljahr, 1953 - 1957) wurden die dringendsten Fragen in den ersten zwei Jahren beantwortet. Der unerschöpfliche Reichtum der Mathematik wurde mir aber immer deutlicher bewusst durch ständig neu dazukommende Fragen, teils mit, teils ohne Antworten. Meist spielte der Wunsch nach Aufdeckung verborgener Zusammenhänge eine wichtige Rolle, etwa bei periodischen Dezimalbrüchen. Besonders angezogen fühlte ich mich damals schon von allen algorithmischen, konkreten Fragestellungen wie dem Euklidischen Algorithmus, der Planimetrie, den regulären Polyedern (ich klebte mir eine große Anzahl davon), der Summation von unendlichen geometrischen Reihen. Meine Neugier über die Summe der Potenzen natürlicher Zahlen war erst gestillt, als mir mein Mathematiklehrer eine Zusammenfassung über die Eulersche Summenformel, Bernoulli-Zahlen und Fourierreihen geschrieben hatte. Natürlich konnte ich mit Differenzieren nicht warten, bis dies endlich im regulären Unterricht behandelt wurde.

Dass ich ein Mathematikstudium ergreifen würde, war schon früh klar; wegen meiner Vorliebe für praktische Aspekte wurde mir die ETH empfohlen. An der Abteilung IX (1957-1962) wurde ich namhaft geprägt von den Professoren H. Hopf (Lineare Algebra, Differentialgeometrie), A. Pfluger (komplexe Analysis), B. Eckmann (Algebra, Topologie), R. Jost (Analytische Mechanik, Elektrodynamik, Optik), E. Stiefel (Grundlagen der numerischen Mathematik, Asymptotik), H. Rutishauser (höhere Numerik).

Um später erfolgreiche mathematische Forschung zu betreiben, sollte im Studium ein (nicht zu kleiner) rasch abrufbarer Vorrat an Grundlagen und Grundkenntnissen angesammelt werden. Mathematische Objekte sollten mit einer gewissen Leichtigkeit manipuliert werden können, so dass der Gedankenfaden dabei nicht abbricht. Das wichtigste ist aber gewiss eine nimmersatte Neugier, Zusammenhängen auf den Grund gehen zu wollen. Dazu gehört auch eine unermüdliche Ausdauer, nicht aufzugeben, bis das Ziel erreicht ist.

Forschung und Resultate.

Zu meinem ersten Forschungsgebiet bin ich eher zufällig gekommen, nämlich durch das von Prof. E. Stiefel 1961 angebotene Proseminar über ausgewählte Kapitel der Himmelsmechanik. Das Vortragsthema "Die Regularisierung von Levi-Civita“ erlaubte mir, Aspekte der Theorie der Differentialgleichungen und der komplexen Analysis miteinander zu verknüpfen, und es war einer konkreten Behandlung zugänglich. Da der mathematische Stil von E. Stiefel mir sehr zusagte, bat ich ihn um ein Diplomthema. Es sollte sich zeigen, dass der Seminarvortrag für mich die Weichen stellte für Diplomarbeit, Dissertation und die wichtigsten Forschungsresultate.

Im folgenden werden die einzelnen Forschungsgebiete und Hauptresultate kurz beleuchtet. Die Referenzen [ ] beziehen sich auf das anschließende Literaturverzeichnis.

Regularisierung in der Himmelsmechanik.
Die Diplomarbeit [in 1 zusammengefasst] kombiniert die 2-dimensionale Regularisierungstechnik von Levi-Civita mit Ideen aus der Uniformisierungstheorie von Riemannschen Flächen. Das Hauptresultat ist ein neues Verfahren zur simultanen Regularisierung aller drei Zweierkollisionen im ebenen Dreikörperproblem. Dieses eignet sich gut zur numerischen Berechnung von Bahnen mit Kollisionen [9, 41]. In der Dissertation [2, 3] (Referent: E. Stiefel, Korreferent: B. Eckmann) wird die 3-dimensionale Regularisierung von Kustaanheimo und Stiefel zur globalen Regularisierung des räumlichen restringierten Dreikörperproblems eingesetzt. Auch hier befasst sich eine Folgearbeit mit der Verwendung der eingeführten Variablen zu numerischen Zwecken [4].

Dreikörperproblem und Dreierkollision.
Die längste Sequenz meiner Arbeiten befasst sich mit der gegenseitigen Annäherung aller Massenpunkte im Dreikörperproblem (dreifache Annäherung). Nach Vorstudien in Spezialfällen [8, 11] wird in [10, 12, 13, 15, 16] das Hauptresultat im Rahmen der singulären Störungstheorie entwickelt: Die Dreierkollisionssingularität ist nicht regularisierbar; die Bewegung nach einer dreifachen Annäherung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab. Dadurch können beliebig große Entweichgeschwindigkeiten auftreten. Es werden Variablensysteme verwendet, welche die konkrete Berechnung von solchen Bahnen erlauben. Die Arbeit [17], die von der Académie Royale de Belgique mit einem Preis ausgezeichnet wurde, fasst diese Resultate zusammen. Die frühen Arbeiten [10, 12] waren unter den ersten, welche die dreifache Annäherung beschrieben; der wirkliche Durchbruch ist McGehee 1974 mit der Einführung der Dreierstoßmannigfaltigkeit gelungen. Meine Arbeiten [21, 22, 25, 26] befassen sich mit der Beschreibung der Dreierstoßmannigfaltigkeit durch angepasste Variable. In [51] wird der Versuch unternommen, die für N-Körperkollisionen wichtigen Zentralkonfigurationen mittels Methoden der algebraischen Geometrie zu behandeln. Der erst kürzlich geschriebene Übersichtsartikel [53] vermittelt eine Rückschau auf den gesamten Problemkreis.

Die Koorbitalmonde Janus und Epimetheus von Saturn.
Im Ringsystem des Saturns gibt es mehrere Paare von kleinen Monden, die sich auf fast identischen Bahnen bewegen. Das Dreikörperproblem mit zwei kleinen Massen bildet ein gutes Modell für diese Situation, ist aber leider nicht viel einfacher als das allgemeine Dreikörperproblem. Trotzdem erlaubt die Einführung von geeigneten Variablen eine einfache Beschreibung der Bewegung der kleinen Körper im Rahmen der singulären Störungstheorie [31] (zusammen mit F. Spirig). Zum selben Thema folgten wenig später von uns unabhängige Arbeiten von Hénon und Petit (1986) . Unsere eigenen Arbeiten

fanden eine Fortsetzung in [35, 37, 43, 49], wo unter anderem auch die Asymptotik von Bahnen im Hillschen Mondproblem sowie deren chaotisches Verhalten untersucht wird.

Singuläre Störungstheorie.
Die von mir als Korreferent (zusammen mit P. Henrici) betreute schöne Dissertation von Kaspar Nipp (An algorithmic approach to singular perturbation problems in ordinary differential equations with an application to the Belousov-Zhabotinskii reaction, ETH Diss. No. 6643, 1980) entwickelt ein konstruktives Verfahren, um die für ein singulär gestörtes Problem wesentlichen Skalierungen zu finden. Mit derselben Technik habe ich den Grenzzyklus im Van-der-Pol-Oszillator mit nur 3 Variablensystemen (im Gegensatz zu den klassischen 5 Regimen) bis zu hohen Ordnungen entwickelt, siehe J. Grasman, Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications, Springer 1987, p. 67 - 70. Die singuläre Störungstheorie bildet auch die Grundlage für meine Behandlung der dreifachen Annäherung im Dreikörperproblem [17] und die Beschreibung der Bewegung der Koorbitalmonde von Saturn [31].

Differentialgleichungen und dynamische Systeme.
Die Arbeiten zu diesem Thema sind von stark unterschiedlichem Inhalt. Die frühen Arbeiten [5, 7] (zusammen mit W. Trautwein) betreffen einen Vorschlag zur Rendezvous-Steuerung, gehen also eher in Richtung Control Theory. In [28, 32] wird die Periode P(z) im Räuber-Beute-Modell von Volterra-Lotka betrachtet. Einerseits wird P(z) für große z asymptotisch entwickelt, andrerseits wird die Monotonie der Funktion P(z) bewiesen. In [24] wird die Variationsgleichung des ebenen Dreikörperproblems mittels hypergeometrischer Funktionen gelöst. In [27] wird zusammen mit U. Kirchgraber und A. Friedli ein Bifurkationsproblem theoretisch untersucht und mittels der schnellen Fouriertransformation numerisch gelöst. In [44] werden die in der Leistungselektronik häufig auftretenden linearen Differentialgleichungssysteme mit stückweise konstanter Koeffizientenmatrix unter Verwendung der Matrixexponentialfunktion praktisch gelöst. Die Arbeit [45] (zusammen mit H.J. Büttler) schließlich betrifft Optionenpreismodelle in der Finanzmathematik: die betreffenden parabolischen partiellen Differentialgleichungen werden durch Reihen nach Laguerre-Polynomen und Greensche Funktionen gelöst. Die von mir als Korreferent zusammen mit J. Moser betreute Dissertation von Alessandra Celletti (Analysis of resonances in the spin-orbit problem in celestial mechanics, ETH Diss. No. 8926, 1989) hat mich selbst auf dem Gebiet der Normalformen weitergebracht.

Allgemeine numerische Mathematik.
Unter diese Rubrik fallen 56 Vorträge quer durch die ganze numerische Mathematik, gehalten in den Jahren 1974 - 1987 am Kolloquium für Computerbenützer. Einige wenige sind im Bulletin des Rechenzentrums der ETH erschienen [18]. Weitere Arbeiten unterschiedlichen Inhalts folgen lose: In [6] wird der Algorithmus von Levinson (1947) auf die schnelle Lösung von linearen Gleichungssystemen mit Toeplitzmatrix angewendet. [19] betrifft einen exemplarisch beschriebenen Vorschlag zur numerischen Behandlung von Randwertproblemen auf unendlichen Intervallen. Die Arbeiten [30, 46] sind speziellen Integrationsverfahren für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet: den Taylorreihen-Integratoren bzw. den expliziten symplektischen Integratoren. In [48]

(zusammen mit W. Gautschi) werden Integratoren zur Erzeugung von Niveaulinien analytischer Funktionen eingesetzt (z.B. via MATLAB). [50] schließlich ist eine teils historische, teils numerische Untersuchung der Logarithmentafel von Jost Bürgi (1620).

Numerische und analytische und Integralberechnung.
Alles zu seiner Zeit! Meist ist die numerische Quadratur das einzig Mögliche oder zumindest einfacher als die analytische. Die Arbeit [29] (zusammen mit D. Kahaner) ist ein Beitrag zur Erzeugung von effizienten numerischen Quadraturregeln durch optimales Hinzufügen weiterer Punkte zu Gaußschen Regeln. Leider lässt sich die allgemeine Theorie von Kronrod nicht auf den Gauß-Laguerre-Fall übertragen. Dieser Problemkreis schien aber genügend neu und ertragreich zu sein; er hat schließlich zur gut gelungenen Dissertation von Lorenz Frey geführt (Theoretical and numerical aspects of a general extension scheme for quadrature formulas in one dimension, ETH Diss. No. 9174, 1990).

Eine Alternative zu Gauß-Quadraturen und deren Erweiterungen bilden analytische Substitutionen in Verbindung mit der Trapezregel. Für analytische Integranden ergeben sich außerordentlich einfache, anpassungsfähige Algorithmen mit exponentieller Konvergenz [33, 52]. Dies lässt sich auch für mehrfache Integrale über Rechtecksbereiche (auch Streifen, Halbstreifen, Halbräume usf.) einsetzen [36].

Gelegentlich aber lohnt sich die analytische Integralberechnung. Die explizite Darstellung des Newtonschen Potentials von homogenen Polyedern [14,23] beruht auf einer geeigneten Zerlegung des Polyeders und einer adäquaten Handhabung der zahllosen Terme. Diese lassen sich durch log- und arctan-Funktionen darstellen, und bei geeigneter Implementation gelten die Schlussformeln sogar auch im Innern des Polyeders und auf dem Rand. Dieses Arbeitsgebiet wurde in letzter Zeit von R. Broucke (Austin, Texas) wieder aufgenommen und führte zu einer erfolgreichen Berechnungsmethode für Satellitenbahnen. Die Arbeit [42] wurde von Praktikern der elektrischen Feldtheorie geschrieben, basiert aber auf einer mir geglückten effizienten Auswertung gewisser Integrale. In der Arbeit [52] (zusammen mit W. Gautschi) schließlich wird ein für die numerische Quadratur über unendliche Intervalle wichtiges Integral auf die unvollständige Gammafunktion zurückgeführt.

Komplexe Analysis und Asymptotik.
In diesen Abschnitt fallen wenige Arbeiten über spezielle komplex-analytische Funktionen [34], sowie über die Asymptotik der Nullstellen der Exponentialsummen [38] (zusammen mit R.S. Varga). Sattelpunkt-Asymptotik angewendet auf Fourierintegrale ist die Grundlage sowohl der Fehlertheorie in [52] wie auch der persönlichen Note an Prof. K. Voss vom 19. 9. 1998. Schließlich wird in [39] das an sich elementare Zweipunkt-Randwertproblem des Kreisbilliards elegant gelöst, und [47] diskutiert die glatten Lösungen einer von F. Stenger 1994 (NA Digest 10/94, item 2) erwähnten Funktionalgleichung.

Algorithmische Zahlentheorie.
Dieses Gebiet habe ich nur nebenbei, gewissermaßen als Hobby, betrieben. Neben der Ergründung der wohl nie vollständig lösbaren Rätsel der Primzahlverteilung machte ich mir zum Ziel, die RSA-Codierung didaktisch aufzuarbeiten. Dies führte 1978, 1981 zu Vorträgen am Kolloquium für Computerbenützer sowie zur Mitwirkung an der Vorlesung

Algebra II, Abt. IIIC, in den Sommersemestern 1997, 1998. Weitere Übersichtsvorträge folgten 1986, 1997, 1998. Resultate über Häufungen von Primzahlen sowie die Primzahlverteilung sind zur Publikation bereit, z.B. die spektakuläre größte positive Nullstelle der Riemannschen Primzahlzählfunktion R(x) bei $2 \cdot 10^{-14828}$ oder Clusters von 18 Primzahlen unter 71 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen bei $2 \cdot 10^{24}$ und bei $3 \cdot 10^{24}$. – In der Note [40] (zusammen mit J. Nievergelt) werden die div- und mod-Operationen bei ganzzahliger Arithmetik diskutiert.

Unterricht.
Dieser wichtige Aspekt im Wirken jedes Mathematikers spielt auch bei mir eine große Rolle. Schon als Schüler habe ich häufig Kameraden bei mathematischen Hausaufgaben geholfen – und habe dabei wohl selbst am meisten profitiert. Es kostete mich gewaltig viel Überwindung, zum ersten Mal vor einer Schulklasse zu stehen, aber der Mut, als Student eine Klasse in Darstellender Geometrie zur Maturität zu führen, hat sich für mich sehr gelohnt. Meine ersten Vorlesungen (Numerische Mathematik, Himmelsmechanik) gab ich in den USA (1967 - 1972). An der ETH folgten Vorlesungen über Numerische Mathematik, Himmelsmechanik, Differentialgeometrie, partielle Differentialgleichungen, lineare Algebra, komplexe Analysis, gehalten an fast allen mathematisch-technischen Abteilungen. Immer wieder habe ich dabei festgestellt, dass das Halten einer Vorlesung das eigene Verständnis sehr fördert. Mein Ziel war es immer, auch in Vorlesungen das Verständnis zu fördern, den anschaulichen Standpunkt zu betonen und einen engagierten Unterricht zu bieten.

29. 10. 1998 Nachgeführt 26. 2. 2003, 14. 6. 2007

Jörg Waldvogel
Seminar für Angewandte Mathematik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich, Switzerland

Publikationen

1. *Regularisierung und konforme Abbildung,* in: Mathematische Methoden der Himmelsmechanik, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Berichte **1** (1966), 33-45 (Diplomarbeit).

2. *Problème restreint des trois corps. Généralisation de la régularisation de Birkhoff pour le mouvement du mobile dans l'espace à trois dimensions* (with E. Stiefel), C.R. Acad. Sc. Paris **260** (1965), 805.

3. *Die Verallgemeinerung der Birkhoff-Regularisierung für das räumliche Dreikörperproblem,* Bulletin Astronomique, Série 3, Tome II, Fasc. 2 (1967), 295-341 (Dissertation).

4. *The restricted elliptic three-body problem,* in: E. Stiefel et. al., Methods of Regularization for Computing Orbits in Celestial Mechanics, NASA Contractor Report NASA CR **769** (June 1967), 88-115.

5. *A simple adaptive guidance scheme for minimum fuel two-finite-burns rendezvous* (with W. Trautwein), AIAA Guidance, Control, and Flight Dynamics Conference, Pasadena, California, August 12-14, 1968, Paper No. 68-858.

6. *Recursive solution of a system of linear equations related to correlation analysis,* Lockheed Missiles and Space Company, Huntsville Research and Engineering Center, Technical Report, February 1970.

7. *Optimum rendezvous guidance study,* Lockheed Missiles and Space Company, Huntsville Research and Engineering Center, Final Report D149128, August 1969.

8. *Note concerning a conjecture by A. Wintner,* Celestial Mechanics **5** (1972), 37-40.

9. *A new regularization of the planar problem of three bodies,* Celestial Mechanics **6** (1972), 221-231.

10. *Collision singularities in gravitational problems,* in: V. Szebehely and B.D. Tapley (eds.), Recent Advances in Dynamical Astronomy, Reidel 1973, 21-33.

11. *The rectilinear restricted problem of three bodies,* Celestial Mechanics **8** (1973), 189-198.

12. *Altes und Neues über das Dreikörperproblem,* Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft (1974), 77-81.

13. *The close triple approach,* Celestial Mechanics **11** (1975), 429-432.

14. *The Newtonian potential of a homogeneous cube,* ZAMP **27** (1976), 867-871.

15. *Triple collision,* in: V. Szebehely and B.D. Tapley (eds.), Long Time Prediction in Dynamics, Reidel 1976, 241-258.

16. *The three-body problem near triple collision,* Celestial Mechanics **14** (1976), 287-300.

17. *Triple collision as an unstable equilibrium,* Bull. Acad. Royale de Belgique, Classe des Sci., **63** (1977), 34-50.

18. Diverse Übersichtsartikel über Numerische Mathematik im Bulletin des Rechenzentrums der ETH (1976, 1977): *Lineare Gleichungssysteme* (Nr. 25), *Rundungsfehler* (Nr. 27), *Numerische Quadratur* (Nr. 28), *Elliptische Integrale* (Nr. 29).

19. *Boundary value problems in infinite intervals,* in: R. Bulirsch et. al. (eds.), Numerical Treatment of Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics **631**, Springer 1978, 201-208.

20. *Datenstrukturen,* in: Kombinatorische Entscheidungsprobleme, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **153**, Springer 1978, 170-183.

21. *Stable and unstable manifolds in planar triple collision,* in: V. Szebehely (ed.), Instabilities in Dynamical Systems, Reidel 1979, 263-271.

22. *La variété de collision triple,* C.R. Acad. Sc. Paris, **288** (1979), 635-637.

23. *The Newtonian potential of homogeneous polyhedra,* ZAMP **30** (1979), 388-398.

24. *The variational equation of the three-body problem,* Celestial Mechanics **21** (1980), 171-175.

25. *Symmetric and regular coordinates on the plane triple collision manifold,* Celestial Mechanics **28** (1982), 69-82.

26. *Coordonnées symétriques sur la variété de collision triple du problème plan des trois corps,* in: V. Szebehely (ed.), Applications of Modern Dynamics to Celestial Mechanics and Astrodynamics, Reidel 1982, 249-266.

27. *Bifurcation of periodic orbits in coupled chemical reactors II* (with A. Friedli und U. Kirchgraber), Math. Meth. in the Appl. Sci. **5** (1983), 216-232.

28. *The period in the Volterra-Lotka predator-prey model,* SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), 1264-1272.

29. *Addition of points to Gauß-Laguerre quadrature formulas* (with D.K. Kahaner und L.W. Fullerton), SIAM J. Sci. Stat. Comput. **5** (1984), 42-55.

30. *Der Tayloralgorithmus,* ZAMP **35** (1984), 780-789.

31. *The three-body problem with two small masses: A singular-perturbation approach to the problem of Saturn's coorbiting satellites* (with Franz Spirig), in: V. Szebehely (ed.), Stability of the Solar System and its Minor Natural and Artificial Bodies, Reidel 1985, 53-63.

32. *The period in the Lotka-Volterra system is monotonic,* J. Math. Anal. Appl. **114** (1986), 178-184.

33. *Integralberechnung,* in: H.R. Schwarz, Numerische Mathematik, Teubner 1986, 319-338. English edition: *Numerical Quadrature,* in: H.R. Schwarz, Numerical Analysis, John Wiley 1989, 330-350.

34. *Zero-free disks in families of analytic functions,* in: E.B. Saff (ed.): Approximation Theory, Tampa, Lecture Notes in Mathematics 1287, Springer 1987, 209-228.

35. *Coorbital satellites and Hill's lunar problem* (with F. Spirig), in: A.E. Roy (ed.), Long-term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems, Kluwer 1988, 223-234.

36. *Numerical quadrature in several dimensions,* in: H. Brass and G. Haemmerlin (eds.), Numerical Integration III, Birkhäuser 1988, 295-309.

37. *Chaos in coorbital motion* (with F. Spirig), in: A.E. Roy (ed.), Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems, Kluwer 1991, 395-410.

38. *Asymptotics for the zeros of the partial sums of* $\exp(z)$*, I* (with A. Carpenter and R.S. Varga), Rocky Mountain J. of Math. **21**, (1991).

39. *The problem of the circular billiard,* Elemente der Mathematik **47** (1992), 108-113.

40. *Entscheidungsgrundlagen für die Normierung der ganzzahligen Arithmetik: Varianten der div- und mod-Operationen* (with J. Nievergelt), Informatik-Spektrum **15** (1992), 107-109.

41. *Orbits in the planar problem of three bodies* (with D. Gruntz), in: W. Gander and J. Hrebicek (es.), Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and MATLAB, Springer 1993, 37-57.

42. *On the combination of MMP (Multiple Multipole Program) with MOM (Method of Moments)* (with Y. Brand, Ch. Hafner), J. Mosig, J. Zheng), ACES Journal **3** (1994), 1-10.

43. *Chaotic motion in Hill's lunar problem* (with F. Spirig), in: A.E. Roy and B.A. Steves (eds.), From Newton to Chaos, NATO ASI Series B, Plenum 1995, 217-230.

44. *Circuits in power electronics,* in: W. Gander and J. Hrebicek (eds.), Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and MATLAB, Springer 1995, 2nd ed., 299-311.

45. *Pricing callable bonds by means of Green's function* (with H.J. Büttler), Mathematical Finance **6** (1996), 53-88.

46. *Symplectic integrators for Hill's lunar problem,* in: R. Dvorak and J. Henrard (eds.), Dynamical Behaviour of our Planetary System, Kluwer 1997, 291-305.

47. *A functional equation related to the iteration of functions* (with R. Resch and F. Stenger), Aequationes Mathematicae **60** (2000), 25-37.

48. *Contour plots of analytic functions* (with W. Gautschi), in: W. Gander and J. Hrebicek (eds.), Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and MATLAB, Springer 1997, 3rd ed., 359-372.

49. *Long-term evolution of coorbital motion,* in: B.A. Steves and A.E.Roy (eds.), The Dynamics of Small Bodies in the Solar System: A Major Key to Solar System Studies, NATO ASI Series C, Plenum 1999, 257-276.

50. *Jost Bürgi, a Swiss discoverer of the logarithms,* in: H. Joss (ed.), Slide Rule '98, ISBN 3952 1605-1-2, 15-22.

51. *Central configurations revisited,* in: B.A. Steves and A.J. Maciejewski (eds.): The Restless Universe: Applications of Gravitational N-Body Dynamics to Planetary, Stellar and Galactic Systems. The Scottish Physical Society, 2001, 285-299.

52. *Computing the Hilbert transform of the generalized Laguerre and Hermite weight functions* (with W. Gautschi), BIT **41** (2001), 490-503.

53. *Triple collision and close triple encounters,* in: D. Benest and C. Froeschlé (eds.): Singularities in Gravitational Systems. Applications to Chaotic Transport in the Solar System. Lecture Notes in Physics, Springer 2002, 81 - 100.

54. *The SIAM 100-Digit Challenge* (by Folkmar Bornemann, Dirk Laurie, Stan Wagon, and Jörg Waldvogel). SIAM, Philadelphia 2004, 306 pp.

55. *Order and chaos in satellite encounters,* in: B.A. Steves, A.J. Maciejewski and M. Hendry (eds.): Chaotic Worlds: From Order to Disorder in Gravitational N-Body Dymanical Systems. Springer 2006, 231-251.

56. *Fast construction of the Fejér and Clenshaw-Curtis quadrature rules.* BIT Numerical Mathematics **46** (2006), 195-202.

57. *Quaternions and the perturbed Kepler problem.* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **95** (2006), 201-212.

58. *The Feet of the Altitudes of a Simplex* (with A. Gut). Elemente der Mathematik **63** (2008), 25-29.

59. *Quaternions for regularizing celestial mechanics – the right way.* Celest. Mech. Dyn. Astr. **102** (2008), 149-162.

60. *Towards a general error theory of the trapezoidal rule.* In: W. Gautschi, G. Mastroianni, Th.M. Rassias (eds.), Approximation and Computation. In honor of Gradimir V. Milovanović. Springer Optimization and its Applications **42**, 267–282, Springer, New York, 2011.

61. *Fundamentals of regularization in celestial mechanics and linear perturbation theories.* In: B.A. Steves, M. Hendry and A.C. Cameron (eds.), Extra-Solar Planets: The detection, formation, evolution and dynamics of planetary systems. CRC Press 2011, 169-184.

62. *The rhomboidal symmetric four-body problem.* Celest. Mech. Dyn. Astr., **113** (2012), 113 - 123.