

DER A-TE GEBURTSTAG

J. WALDVOGEL

Am 19. September 1998 findet im Restaurant Kreuz, Jona das Fest zum A-ten Geburtstag eines bekannten emeritierten Mathematikprofessors der ETH statt. Im Einladungsschreiben vom März 1998 wurden für die Konstante A die folgenden drei unabhängigen Definitionen gegeben:

$$(1) A = \Gamma(8)/(72\pi) \int_0^1 1/\sqrt{t(1-t)} dt$$

$$(2) A = \min_{x \in \mathbf{R}} (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 102)$$

$$(3) A = \sqrt{56^2 + 42^2}.$$

Da alle drei Definitionen zum selben Resultat

$$(4) A = 70$$

führen, kann davon ausgegangen werden, dass es sich um den 70sten Geburtstag des Gastgebers handelt. Die Unterzeichneten gratulieren dem Jubilar ganz herzlich und wünschen ihm weiter gute Gesundheit und viel Freude und Erfolg bei allen mathematischen und anderen Tätigkeiten.

Unsere Antwort auf die freundliche Einladung war als

$$(5) \text{sign}(F(A))$$

formuliert, wobei

$$(6) F(A) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{iAt} f(t) dt$$

die Fouriertransformierte von

$$(7) f(t) := e^{-\cosh(t)} \cdot \cosh(t)$$

ist. Mit der Substitution $x = \sinh(t)$ ergibt sich übrigens die interessante alternative Definition

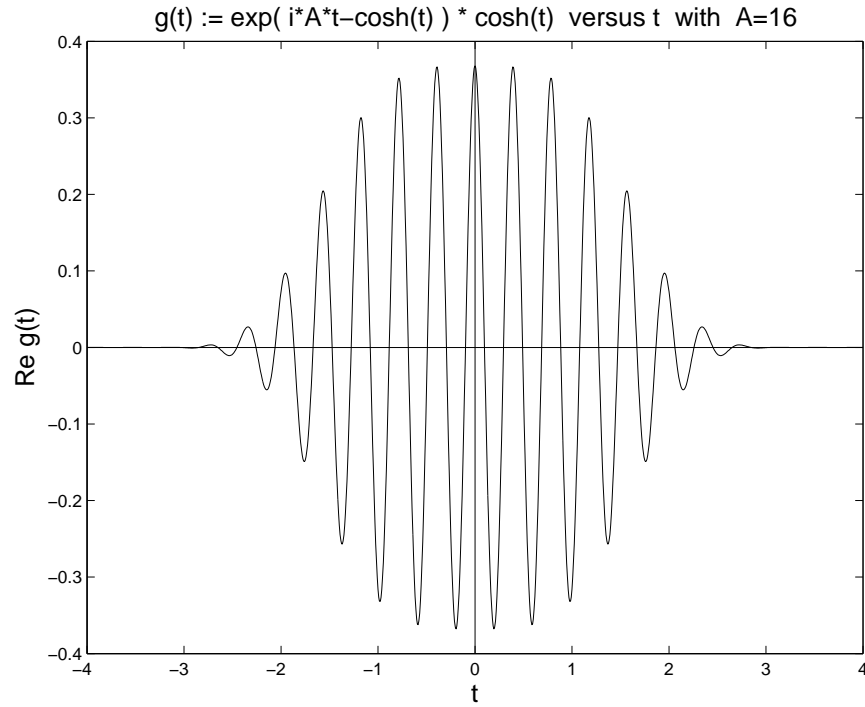


FIGURE 1. Der Integrand in (6) als Funktion von t , ($A = 16$)

$$(8) \quad F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})^{iA} dx.$$

Zur Rechtfertigung unserer Anwesenheit seien hier einige Bemerkungen zur Auswertung von (6) angefügt.

1. Numerische Quadratur

Die Trapezregel mit Schritt h ,

$$(9) \quad F(A) = h \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{iAlh} f(lh) + O(e^{-\gamma/h}), \quad \gamma > 0,$$

erlaubt im Prinzip eine schnelle und genaue Auswertung von (6). Wegen dem raschen Abklingen von f (Fig. 1) kann die Summe in (9) schon bei relativ kleinen Werten von $|lh|$ abgebrochen werden. Die exponentielle Konvergenz von (9) bezüglich h erlaubt zudem eine relativ große Schrittweite. So würden für $A = 70$ der Schritt $h = 1/32$ und Summation über $|lh| < 6$ genügen. Da aber $F(A)$ für $|A| \rightarrow \infty$ sehr rasch abklingt (Fig. 2), wäre für $A = 70$ eine Rechengenauigkeit von mindestens 60 Dezimalen erforderlich.

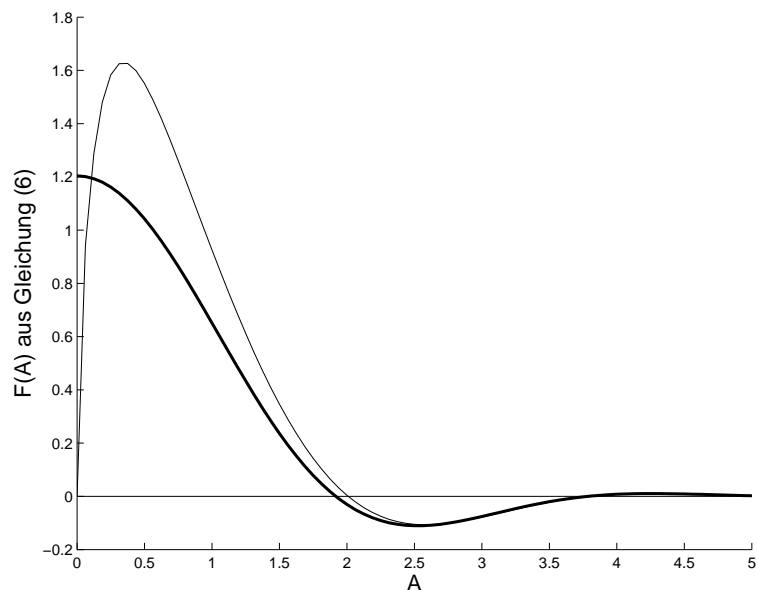


FIGURE 2. Verlauf von $F(A)$ (fett) aus (6) und der asymptotischen Approximation (26) (dünn)

2. Die Poissonsche Summenformel

Sei f über \mathbb{R} absolut integrierbar, und sei die Fouriertransformierte F durch (6) definiert. Dann gilt für $h > 0$

$$(10) \quad h \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l \cdot h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(m \cdot \frac{2\pi}{h}\right).$$

In unserem Fall ergibt sich wegen $F(A) = F(-A)$ für große $|A|$ die sehr gute Approximation

$$(11) \quad F(A) \approx \frac{1}{2} \left(h \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(lh) - F(0) \right) \quad \text{mit} \quad h = \frac{2\pi}{A},$$

wobei

$$(12) \quad F(0) = 2K_1(1) = 1.20381 \ 44603 \ 94469 \ 14947 \ 50800 \ 03$$

als Wert einer Besselfunktion als bekannt angesehen wird.

Diese Rechnung ist wesentlich schneller als (9), muss aber in derselben hohen Genauigkeit durchgeführt werden.

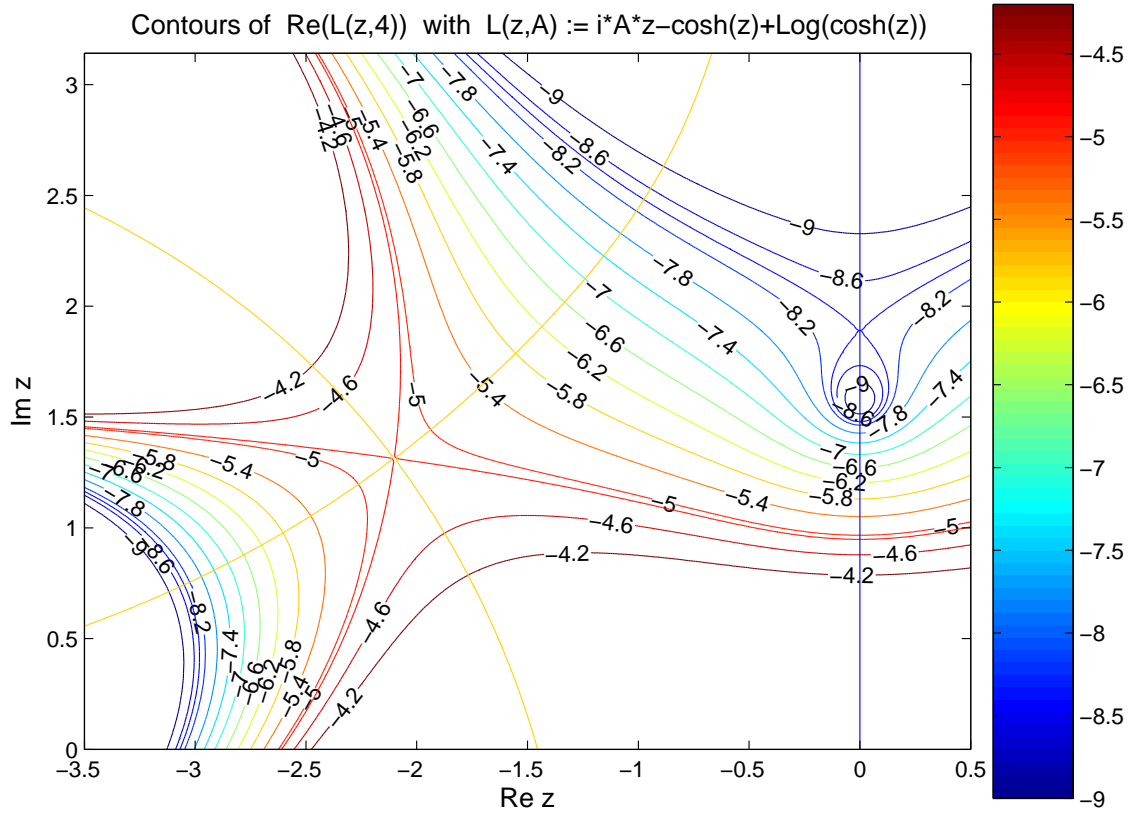


FIGURE 3. Höhenprofil von $\operatorname{Re} L(z,4)$ mit Niveaulinien und Sattelwegen

3. Sattelpunkts-Asymptotik

Eine elegante Lösung erhält man durch die asymptotische Approximation des Integrals (6), geschrieben als

$$(13) \quad F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{L(z,A)} dz, \quad L(z,A) := iAz - \cosh(z) + \log \cosh(z),$$

für $A \rightarrow \infty$. Die Grundidee ist die Deformation des Integrationsweges (hier die reelle Achse) in einen geeigneten Pfad C , so dass nur Bereiche mit absolut kleinen Werten des Integranden durchlaufen werden. Solche Integrationswege führen wie Passstraßen von einem “Tal” ins andere und werden entsprechend Sattelwege genannt. Das Höhenprofil des Integranden wird durch die Niveaulinien von $\operatorname{Re} L(z,A)$ dargestellt, siehe Fig. 3 ($A = 4$). Der geeignete Sattelweg C ist im Bereich der Figur die von links unten nach rechts oben durch den Sattel z_3 verlaufende Orthogonaltrajektorie $\operatorname{Im} L(z,A) = \operatorname{const.}$

Die Sattelpunkte z_k sind bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{d}{dz}L(z, A) \Big|_{z=z_k} = 0$$

oder

$$(14) \quad \sinh(z_k) - \tanh(z_k) = iA.$$

Mit den neuen Variablen

$$(15) \quad s_k := \frac{1}{i} \tanh\left(\frac{z_k}{2}\right), \quad \epsilon := \frac{1}{A}$$

wird die Bedingung (14) zur biquadratischen Gleichung

$$(16) \quad s_k^4 - 4\epsilon \cdot s_k^3 - 1 = 0;$$

diese wird durch

$$(17) \quad s_k = i^{-k} \Phi(i^k \epsilon), \quad z_k = 2 \tanh(i s_k), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

mit der Taylorreihe

$$(18) \quad \Phi(\epsilon) = 1 + \epsilon + \frac{3}{2}\epsilon^2 + 2\epsilon^3 + \frac{15}{8}\epsilon^4 + O(\epsilon^6)$$

vollständig gelöst. Die für den deformierten Integrationsweg relevanten Sättel entsprechen $k = 1, 3$.

Im Folgenden wird der Integrand von (13) über den Sattelweg C ($k = 3$) integriert. Zu diesem Zweck wird $L(z, A)$ im Sattel z_3 entwickelt:

$$(19) \quad L(z_3 + \zeta, A) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(A) \zeta^l.$$

Nach Konstruktion muss $c_1(A) = 0$ gelten; die Rechnung ergibt

$$(20) \quad c_0(A) = L(z_3, A) = iA \cdot \log(2iA) + \log(iA) - iA + O(A^{-1})$$

$$(21) \quad e^{c_0(A)} = iAe^{-\frac{\pi}{2}A} \cdot e^{iA(\log(2A)-1)}(1 + O(A^{-1}))$$

$$(22) \quad c_2(A) = -\frac{i}{2}A - \frac{1}{2} + O(A^{-1}).$$

Der Beitrag des Sattels z_3 wird somit

$$(23) \quad F_3 = e^{c_0} \int_{Im \zeta=0} e^{c_2 \zeta^2 + c_3 \zeta^3 + \dots} d\zeta.$$

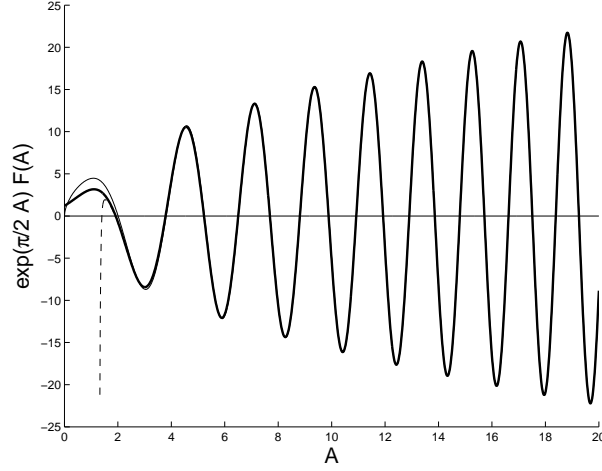


FIGURE 4. Verlauf von $e^{\frac{\pi}{2}A} F(A)$ (fett) im Intervall $0 \leq A \leq 20$. Dünne Linie: Equ. (26), gestrichelt: (28)

Die Substitution $w = \zeta^2 + \frac{c_3}{c_2}\zeta^3 + \dots$ führt dies in nullter Ordnung über in

$$(24) \quad F_3 = e^{c_0} \cdot \int e^{c_2 w} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw,$$

wobei der Integrationsweg \mathbb{R}_+ doppelt überdeckt ist und den Ursprung einmal im Uhrzeigersinn umfährt. Auswertung mittels der Gamma-Funktion ergibt

$$(25) \quad F_3 = e^{c_0} \sqrt{\frac{\pi}{-c_2}}.$$

Für den Beitrag F_1 des Sattels z_1 ergibt sich das Konjugierte, $F_1 = \bar{F}_3$; somit wird $F(A) = F_3 + \bar{F}_3$, nach Einsetzen von (21), (22) in nullter Ordnung:

$$(26) \quad F(A) = \sqrt{8\pi A} e^{-\frac{\pi}{2}A} \cos\left(A(\log(2A) - 1) + \frac{\pi}{4}\right) (1 + O(A^{-1})).$$

Der Verlauf von $e^{\frac{\pi}{2}A} F(A)$ in den Intervallen $0 \leq A \leq 20$ und $60 \leq A \leq 80$ ist in Fig.4 und Fig.5 dargestellt, in Fig.4 zusammen mit den asymptotischen Approximationen $F_0(A)$ aus (26) und $F_{12}(A)$ aus (28).

Für $A = 70$ ergeben die numerischen Methoden

$$(27) \quad F(70) = 7.18732 \ 57054 \ 16958 \ 36008 \ 42467 \cdot 10^{-47},$$

während der asymptotische Ausdruck aus (26)

$$F_0(70) = 7.19190 \ 85203 \cdot 10^{-47}$$

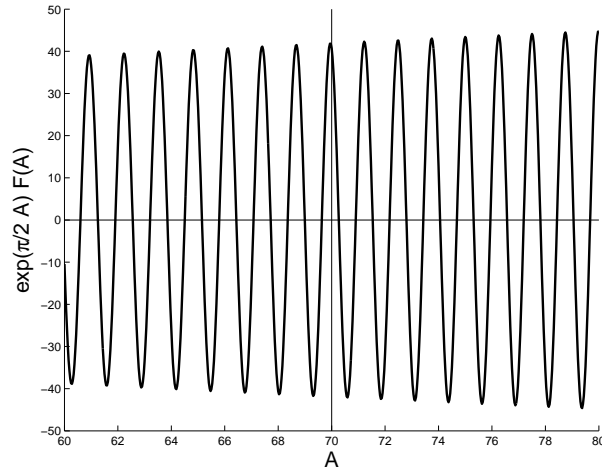


FIGURE 5. Verlauf von $e^{\frac{\pi}{2} A} F(A)$ im Intervall $60 \leq A \leq 80$

ergibt, den exakten Wert also mit einem Fehler von lediglich 0.064 % approximiert.

Die Weiterführung der Entwicklung in den Sattelpunkten ergibt schließlich die asymptotische Reihe

$$\begin{aligned}
 F(A) = & \sqrt{8\pi A} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2}A - \frac{1}{4}A^{-2} + \frac{1}{8}A^{-4} + \frac{29}{48}A^{-6} - \frac{7}{4}A^{-8} - \frac{137}{40}A^{-10} + \frac{35011}{384}A^{-12}\right) \cdot \\
 (28) \quad & \cdot \cos\left(A(\log(2A) - 1) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}A^{-1} + \frac{401}{1440}A^{-3} \right. \\
 & \left. + \frac{209}{1260}A^{-5} - \frac{128339}{107520}A^{-7} + \frac{503887}{380160}A^{-9} + \frac{4112810263}{184504320}A^{-11}\right) \cdot (1 + O(A^{-13})).
 \end{aligned}$$

Dieser asymptotische Ausdruck ergibt sogar die 22-stellig genaue Approximation

$$F_{12}(70) = 7.18732\ 57054\ 16958\ 36008\ 38922 \cdot 10^{-47}.$$

Die Auswertung von $F(A)$ an einigen Punkten zeigt nun sofort, dass $F(A) > 0$ für alle A im Intervall $69.63285 \leq A \leq 70.26867$.

Damit ist hinlänglich dargelegt, dass unsere Antwort auf die Einladung, also $\text{sign}(F(70))$, unmissverständlich *positiv* ist. Wir freuen uns sehr auf das Fest, und wir danken herzlich, dass wir dabei sein dürfen.

16. 9. 1998

Irène und Jörg Waldvogel