# Das Unendliche in der Geometrie: Projektive Räume und homogene Koordinaten

Jörg Waldvogel
Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich

Fachschaftsweiterbildung Mathematik
Kantonsschule Büelrain, Winterthur

Hörnli-Haus, Tanzplatz ob Steg ZH, 2. - 3. Juli 2007

## Zusammenfassung

Nach einer geometrischen Einführung der projektiven Ebene $\overline{\mathbb{E}}$ mittels Zentralprojektion und Vervollständigung wird dieses Konzept rechnerisch realisiert durch homogene Koordinaten. Auf natürliche Weise gelingt es sodann, jeder Geraden $G$ von $\overline{\mathbb{E}}$ ein homogenes Koordinatentripel $g$ zuzuordnen, die Plückerschen Lininkoordinaten der Geraden. Einfache Aufgaben am Dreieck, etwa die Berechnung der Seiten und der Höhenfußpunkte aus den Ecken, lassen sich besonders elegant lösen. Schließlich erlaubt die Verwendung von homogenen Koordinaten zwangslos die Verallgemeinerung auf 3 und mehr Dimensionen.

## Übersicht

1. Die projektive Ebene $\overline{\mathbb{E}}$
2. Homogene Koordinaten in $\overline{\mathbb{E}}$
3. Die Plückerschen Linienkoordinaten
4. Das Dreieck
5. Die Höhen und ihre Fußpunkte
6. Der $n$-dimensionale projektive Raum $\overline{\mathbb{R}^n}$

# 1. Die projektive Ebene

Wir projizieren die gewöhnliche Ebene $\mathbb{E}$, genannt die Euklidische Ebene, von einem Projektionszentrum $Z \notin \mathbb{E}$ aus auf eine $\mathbb{E}$ schneidende Bildebene $\mathbb{E}'$ mit $Z \notin \mathbb{E}'$ (die Tafel). Die Struktur des Unendlichen von $\mathbb{E}$ wird in $\mathbb{E}'$ anschaulich:

- In $\mathbb{E}'$ entspricht das Unendliche von $\mathbb{E}$ der Schnittgeraden $G'_\infty$ von $\mathbb{E}'$ mit der Parallelebene zu $\mathbb{E}$ durch $Z$.
- Das Unendliche von $\mathbb{E}$ hat daher die Struktur einer Geraden, $G_\infty$, genannt die **unendlich ferne Gerade** von $\mathbb{E}$, auch die uneigentliche Gerade von $\mathbb{E}$ oder absolute Gerade von $\mathbb{E}$.
- Vervollständigung der Euklidischen Ebene durch $G_\infty$ ergibt die projektive Ebene: $\overline{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \cup \{G_\infty\}$

## Parallelenbüschel

Betrachte eine Schar von Parallelen $A, B, C, \ldots$ in $\mathbb{E}$. Die Bildgeraden $A', B', C', \ldots$ in $\mathbb{E}'$ (bei Zentralprojektion von $Z$ aus) schneiden sich in einem Punkt, $U'_\infty \in G'_\infty$, dem Fluchtpunkt der Parallelenschar. Man erhält diesen durch Schnitt der Tafel $\mathbb{E}'$ mit der Parallelen zu $A$ durch $Z$.

**Vervollständigung von (Euklidischen) Geraden**

- Jede Euklidische Gerade wird durch ihren unendlich fernen (uneigentlichen, absoluten) Punkt vervollständigt
- Parallele Geraden haben den selben uneigentlichen Punkt
- Parallele Geraden schneiden sich in ihrem uneigentlichen Punkt
- Alle uneigentlichen Punkte von $\mathbb{E}$ liegen auf der uneigentlichen Geraden $G_\infty$

# Eigenschaften der projektiven Ebene

Sei nun auch die Tafel $\mathbb{E}'$ zu einer projektiven Ebene $\overline{\mathbb{E}'}$ vervollständigt. Dann vermittelt die Zentralprojektion mit Zentrum $Z$ eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen Punkten von $\overline{\mathbb{E}}$ und $\overline{\mathbb{E}'}$, sowie zwischen Geraden von $\overline{\mathbb{E}}$ und $\overline{\mathbb{E}'}$.

Für $\overline{\mathbb{E}}$ wie auch für $\overline{\mathbb{E}'}$ gilt der folgende **Satz:**

- Zwei verschiedene Punkte $\in \overline{\mathbb{E}}$ lassen sich durch genau eine Gerade verbinden.
- Zwei verschiedene Geraden $\subset \overline{\mathbb{E}}$ haben genau einen Schnittpunkt.

Hier weicht die projektive Geometrie von der Euklidischen Geometrie ab: die zweite Aussage ersetzt das Parallelenaxiom.

## Die Riemannsche Zahlenkugel

Ein anderes Modell des Unendlichen in 2 Dimensionen wird in der Komplexen Analysis gebraucht. Die Vervollständigung der komplexen Ebene

$$\mathbb{C} = \{z = x + i\, y \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}\,, \quad i = \sqrt{-1}$$

zur Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ erfolgt durch Hinzufügen eines einzigen Punktes $z = \infty$,

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \ \cup \ \{\infty\}\,.$$

Die Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ nach $\mathbb{C}$ entspricht der stereographischen Projektion der Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ von ihrem Nordpol aus auf die im Südpol berührende Ebene $\mathbb{C}$.

## 2. Homogene Koordinaten in $\mathbb{E}$ und $\overline{\mathbb{E}}$

Sei $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt der Euklidischen Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, dargestellt durch seine Cartesischen Koordinaten $X_1, X_2$. Zum (scheinbaren) Überfluss werde der Punkt $X$ durch das Zahlentripel

$$x = (x_0, x_1, x_2) \quad \text{mit} \quad x_0 \neq 0\,,\ x \neq (0,0,0)$$

dargestellt, wobei

$$X_k = \frac{x_k}{x_0}\,, \quad k = 1, 2\,. \tag{1}$$

Solche Zahlentripel sind unempfindlich auf Multiplikation mit einem Faktor $c \neq 0$, da $c\,x = (c\,x_0, c\,x_1, c\,x_2)$ für jedes $c \neq 0$ denselben Punkt $X = (X_1, X_2)$ darstellt.

$x = (x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$ heißt ein zu $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ gehöriges homogenes Zahlentripel.

**Beispiel:** $x = (1, X_1, X_2)$.

## Übergang zur projektiven Ebene $\overline{\mathbb{E}} = \overline{\mathbb{R}^2}$

Sei nun

$$\boxed{x_0 = 0}$$

zugelassen, sofern $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Dann stellt das homogene Zahlentripel $x = (0, x_1, x_2) \in \overline{\mathbb{E}}$ den uneigentlichen Punkt in Richtung $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dar.

**Beweis** z.B. durch Limesbetrachtung $x_0 \to 0$.

**Zusammenfassung:** Die Menge der homogenen Zahlentripel $x = (x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim c\,x \;\forall\; c \neq 0$ ist isomorph zur Menge der Punkte der projektiven Ebene $\overline{\mathbb{E}}$.

# References

[1] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer:
Zeitlose Geometrie. Klett, Stuttgart 1990, 187 pp.
Ursprüngliche Fassung:
Geometry Revisited. Random House, New York 1967, 193 pp.

[2] H. S. M. Coxeter: The Real Projective Plane (3rd ed.).
Springer Verlag 1995.

[3] H. S. M. Coxeter: Projective Geometry (2nd ed.).
Springer Verlag 2003.

[4] Wikipedia, Projective geometry.
URL `http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry`

## Verbindungsgerade zweier Punkte

**Gegeben:** Zwei verschiedene Punkte, $x = (x_0, x_1, x_2)$, $y = (y_0, y_1, y_2)$ von $\overline{\mathbb{E}}$. Dann entspricht die Menge aller Linearkombinationen,

$$\boxed{z = s\,x + t\,y\,, \quad s, t \in \mathbb{R}}$$

der Menge aller Punkte der Verbindungsgeraden von $x$ und $y$.

**Bemerkung:** Auch hier kommt ein redundanter Parameter ins Spiel: zwei Parameter $s$ und $t$, obwohl die Verbindungsgerade nur einen Freiheitsgrad hat.

Reduziert man aber etwa mit der Wahl $s = 1$ auf den einen Parameter $t \in \mathbb{R}$, also $z = x + t\,y$, so erhält die Verbindungsgerade eine Lücke bei $y$.

**Aufgabe:** Stelle die bekannte Punkt-Richtungsformel als Spezialfall dieser Theorie dar.

## 3. Die Plückerschen Linienkoordinaten

Gleichung einer Geraden $G$ in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}$:

$$g_0 + g_1 X_1 + g_2 X_2 = 0 \tag{2}$$

Das Zahlentripel $g = (g_0, g_1, g_2) \neq (0, 0, 0)$ charakterisiert $G$ eindeutig.
$c\,g$ mit einem beliebigen $c \neq 0$ charakterisiert die selbe Gerade $G$.

$g$ hat somit die Eigenschaften eines homogenen Zahlentripels.

**Definition:** Die Komponenten $g_k$ $(k = 0, 1, 2)$ des homogenen Zahlentripels $g = (g_0, g_1, g_2) \neq (0, 0, 0)$ heißen die Linienkoordinaten (oder einfach die homogenen Koordinaten) der Geraden $G$.

## Der Inzidenzsatz

Obige Gleichung (2) mit $X_1 = \dfrac{x_1}{x_0}$, $X_2 = \dfrac{x_2}{x_0}$ impliziert

$$g_0\, x_0 + g_1\, x_1 + g_2\, x_2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \sum_{k=0}^{2} g_k\, x_k = 0$$

**Definition:** Der Punkt $X$ und die Gerade $G$ heißen (miteinander) inzident, falls $X$ auf $G$ liegt (oder $G$ durch $X$ geht).

**Inzidenzsatz:** Seien $x = (x_0, x_1, x_2)$, $g = (g_0, g_1, g_2)$ homogene Koordinaten des Punktes $X$ bzw. der Geraden $G$. $X$ und $G$ sind genau dann inzident, wenn

$$\sum_{k=0}^{2} g_k\, x_k = 0\,.$$

**Bemerkung:** Fasst man $g, x$ als **(Kolonnen-)**Vektoren $\in \mathbb{R}^3$ auf, so bedeutet dies deren Orthogonalität, in Matrizennotation: $g^T x = 0$.

## Verbindungsgerade und Schnittpunkt

**Gegeben:** Zwei verschiedene Punkte $X, Y$ von $\overline{\mathbb{E}}$ durch ihre homogenen Koordinaten $x = (x_0, x_1, x_2)$, $y = (y_0, y_1, y_2)$.

Alle homogenen Tripel $g \in \mathbb{R}^3$ der Verbindungsgeraden $X, Y$ sind orthogonal zu $x$ und $y$. Bequeme Wahl: $g = x \times y$ (Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$).

**Satz:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zwei verschiedene | $X$ | $\leftarrow$ | $x = (x_0, x_1, x_2)$ |
| Punkte | $Y$ | $\leftarrow$ | $y = (y_0, y_1, y_2)$ |
| Verbindungsgerade | $G$ | $\leftarrow$ | $g = x \times y$ |
| Zwei verschiedene | $A$ | $\leftarrow$ | $a = (a_0, a_1, a_2)$ |
| Geraden | $B$ | $\leftarrow$ | $b = (b_0, b_1, b_2)$ |
| Schnittpunkt | $S$ | $\leftarrow$ | $s = a \times b$ |

**Aufgabe:** Finde homog. Koordinaten der uneigentlichen Geraden von $\overline{\mathbb{E}}$.

## Exkurs: Die absoluten Kreispunkte

Zwei Ellipsen haben i.a. 4 Schnittpunkte. Warum haben zwei verschiedene Kreise (spezielle Ellipsen!) nie mehr als 2 Schnittpunkte? Wo sind die fehlenden 2 Schnittpunkte?

**Kreisgleichungen:**

Euklidisch: $(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - a_2)^2 = r^2$

Homogen, Glg.(1): $(x_1 - a_1\, x_0)^2 + (x_2 - a_2\, x_0)^2 - r^2\, x_0^2 = 0$

**Satz:** Jeder Kreis (unabhängig von $a_1, a_2, r$) enthält die zwei absoluten Kreispunkte $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, \pm i),\ i = \sqrt{-1}$.

Die absoluten Kreispunkte sind unendlich fern und komplex. Sie sind allen Kreisen gemeinsam; es sind die beiden fehlenden Schnittpunkte von zwei verschiedenen Kreisen.

## 4. Das Dreieck

| | | |
|---|---|---|
| Nicht ausgeartetes Dreieck | Ecken: | $X, Y, Z$ |
| (d.h. Fläche $\neq 0, < \infty$) | Gegenseiten: | $A, B, C$ |

Wir packen die zugehörigen homogenen Tripel $x, y, z, a, b, c$ als **Kolonnen** in die $(3 \times 3)$-Matrizen

$$M = \big(x\ y\ z\big)\,, \quad H = \big(a\ b\ c\big)\,. \tag{3}$$

Wegen den Inzidenzen im Dreieck, z.B. $A$ inzident mit $Y$ und $Z$, etc., gilt aufgrund von S. 13, unten: $a^T y = 0$, $a^T z = 0$, etc. Somit:

$$H^T M = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Wegen der Nicht-Ausartung sind die mit $*$ markierten Einträge $\neq 0$.

## Dreieck, Ecken und Seiten

Seien die homogenen Tripel $x, y, z$ der Ecken gegeben, d.h. $M$ ist eine gegebene Matrix; gesucht sind die homogenen Tripel $a, b, c$ der Seiten. Diese können so normiert werden, dass alle mit $*$ markierten Einträge $= 1$ werden. Dann gilt (mit $I =$ Einheitsmatrix)

$$H^T M = I \quad \text{oder} \quad H = \left(M^{-1}\right)^T. \tag{4}$$

**Satz:** Sei $M$ die Matrix mit den homogenen Koordinaten der Ecken eines nicht ausgearteten, eigentlichen Dreiecks als Kolonnen. Dann ist $M$ invertierbar, und die Matrix $H := \left(M^{-1}\right)^T$ enthält in ihren entsprechenden Kolonnen homogene Linienkoordinaten der Gegenseiten. Dabei sind die Skalarprodukte der im Dreieck gegenüberliegenden homogenen Tripel $= 1$.

## 5. Die Höhen und ihre Fußpunkte

Betrachte die Dreiecksseite $A$, gegeben durch das homogene Tripel $a = (a_0, a_1, a_2)$. Aufgrund der Geradengleichung (2) von S. 12 ist $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Normalenvektor der Seite $A$. Jede Normale von $A$ geht daher durch den uneigentlichen Punkt $a^0 := (0, a_1, a_2)$.

Gemäß S. 11 parametrisieren wir die zugehörige Höhe, d.h. die Verbindungsgerade $u$ von $a^0$ mit $x = (x_0, x_1, x_2)$, z.B. als

$$u = x - \kappa\, a^0\,, \quad \kappa \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

Um den Höhenfußpunkt auf $u$ zu erhalten, fordern wir die Inzidenz $a^T\, u = 0$; daraus folgt wegen der Bemerkung S.17, unten:

$$\kappa = \frac{a^T\, x}{a^T\, a^0} = \frac{1}{a^T\, a^0}\,.$$

## Alle Höhenfußpunkte

Wir packen (5) und die zwei analogen Gleichungen für $v$ und $w$ als Kolonnen in eine Matrix $P$,

$$P := \left(u\ v\ w\right) = \left(x\ y\ z\right) - \left(a^0\ b^0\ c^0\right) \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \tag{6}$$

wobei in Fortsetzung von S. 18, unten gilt:

$$\kappa = 1/(a^T a^0), \quad \mu = 1/(b^T b^0), \quad \nu = 1/(c^T c^0)\,. \tag{7}$$

Mit (3) von S. 16 und offensichtlicher Bedeutung von $H^0$ sowie dem Operator `diag` zur Erzeugung einer Diagonalmatrix schreibt sich (6) als

$$\boxed{P \;=\; M \;-\; H^0\,\mathtt{diag}(\kappa,\mu,\nu)\,.} \tag{8}$$

## Das Problem von Fagnano (1775): Das Fußpunktsdreieck

Finde Punkte $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ auf den Seiten $A, B, C$ eines Dreiecks (oder auf ihren Verlängerungen), so dass der Umfang des Dreiecks $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ kleinstmöglich ist.

**Lösung:** Das Fußpunktsdreieck $\tilde{A} = U,\ \tilde{B} = V,\ \tilde{C} = W$ löst das Problem von Fagnano.

Ein eleganter geometrischer Beweis findet sich z.B. in [1], siehe Literaturangaben auf Seite 10.

## 6. Der $n$-dimensionale projektive Raum $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Die Verallgemeinerung der homogenen Punktkoordinaten ergibt sich zwangslos. Damit ist der projektive Raum $\overline{\mathbb{R}^n}$ definiert:

$$\overline{\mathbb{R}^n} = \{x := (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, 0, \ldots, 0) \;\big|\; c\,x \sim x \;\forall\; c \neq 0\}$$

Die homogenen "Linienkoordinaten" $g = (g_0, g_1, \ldots, g_n)$ beziehen sich nun auf $(n-1)$-dimensionale Hyperebenen (für $n = 3$ die gewöhnlichen Ebenen); der Inzidenzsatz von S.13 gilt nun mit Summation von $k = 0$ bis $n$.

Die Theorie der niedriger-dimensionalen Hyperebenen (z.B. Geraden im Raum) ist komplizierter, wird hier weggelassen.

**Aufgabe:** Beschreibe (geometrisch und algebraisch) die Struktur des Unendlichen im projektiven 3-dimensionalen Raum $\overline{\mathbb{R}^3}$.

## Eine elegante Realisierung in MATLAB

Die folgende Realisierung von (8) mit (7) funktioniert für Simplices in jeder Dimension $n > 0$. Die je $N := n + 1$ homogenen Koordinaten der $N$ Ecken müssen in den Kolonnen der Matrix $M$ stehen.

```
H = inv(M)',  H(1,:) = 0 * H(1,:);
P = M - H * diag(1./sum(H.^2))
```

$P$ enthält in ihren Kolonnen die homogenen Koordinaten der Höhenfußpunkte. Im Fall $n = 1$ enthält $P$ die vertauschten Kolonnen von $M$. Für MATLAB siehe URL `http://www.mathworks.com`.

**Beispiel:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} .55 & .6 & -.15 \\ -.15 & .2 & -.05 \\ -.10 & -.2 & .30 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 21/13 & 1/2 & 57/37 \\ 40/13 & 7/2 & 28/37 \end{pmatrix}.$$