FUNKTIONENTHEORIE - ZUSÄTZLICHE LERNMATERIALIEN

JOSEF TEICHMANN

1. Ein motivierendes Beispiel aus der Anwendung

Das SABR-Modell spielt in der Modellierung von stochastischer Volatilität eine herausragende Rolle: seit seiner Einführung 1998 zählt es zu den am meisten verwendeten Modellen der Finanzmathematik. Es gibt dafür zwei zentrale Gründe: einerseits lassen sich bedeutende Eigenschaften von Finanzzeitreihen wie stochastische Volatilität oder der Leverage-Effekt im SABR-Modell wiedergeben. Andererseits ist das SABR-Modell vom analytischen Standpunkt auch ohne aufwendige Numerik gut verständlich. Wir beschäftigen uns hier hauptsächlich mit dem zweiten Aspekt, der auf einer engen Verbindung zur Poincaréhalbebene fusst. Im wesentlichen lässt sich das Kleinzeitverhalten der Zufallsvariablen (X_t, Y_t), die Preis und Volatilität beschreiben, durch eine Metrik beschreiben, die wir auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ einführen können:

Seit $\mathbb{H}$ die Menge der komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil $x + \mathrm{i}y$ mit $y > 0$. Wir definieren eine Metrik auf $\mathbb{H}$: wir betrachten dazu die Menge $P(z_0, z_1)$ aller stückweise C^1-Wege von $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{H}$ nach $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 \in \mathbb{H}$, die ganz in $\mathbb{H}$ verlaufen. Wir definieren für ein $\gamma \in P(z_0, z_1)$ ein Längenfunktional $L(\gamma)$ via

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)} dt$$

und

$$d(z_0, z_1) := \inf_{\gamma \in P(z_0, z_1)} L(\gamma) \,.$$

Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ invariant ist unter Möbiustransformationen. Fixieren wir $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$. Sei $\phi_M : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ eine Möbiustransformation, dann ist die zugehörige Matrix M bereits in $SL(2, \mathbb{R})$. Deshalb gelten

$$\frac{d}{dt}\phi_M(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{(c\gamma(t) + d)^2}$$

und

$$\mathrm{Im}\phi_M(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{Im}\gamma(t)}{|(c\gamma(t) + d)|^2}$$

für alle $0 \leq t \leq 1$ und $\gamma \in P(z_0, z_1)$. Daraus folgt aber unmittelbar dass $L(\gamma) = L(\phi_M(\gamma))$ für alle $M \in SL(s, \mathbb{R})$. Daraus wiederum folgt mit $\phi_M(P(z_0, z_1)) = P(\phi_M(z_0), \phi_M(z_1))$, für alle $M \in SL(2, \mathbb{R})$, und damit $d(z_0, z_1) = d(\phi_M(z_0), \phi_M(z_1))$.

Im weiteren werden wir einen Hilfssatz aus der Theorie der Möbiustransformationen benötigen: seien $z_0 \neq z_1 \in \mathbb{H}$, dann existiert ein $M \in SL(2, \mathbb{R})$ sodass $\phi_M(z_0) = \mathrm{i}$ und $\phi_M(z_1) = \lambda\mathrm{i}$ gilt für genau ein $\lambda > 1$. Wir zeigen den Sachverhalt schrittweise: wir transformieren via

$$\phi_N(z) = \frac{z - \mathrm{Re}z_0}{\mathrm{Im}z_0}$$

die Zahl $z_0 \in \mathbb{H}$ nach i. Also nächstes verwenden wir die Cayley-Transformation

$$\phi_C(z) = \frac{z - \mathsf{i}}{z + \mathsf{i}}\,,$$

die die obere Halbebene $\mathbb{H}$ auf das Innere der Kreisscheibe $\mathbb{D}$ abbildet, wobei i auf 0 abgebildet wird. Im Inneren der Kreisscheibe können wir aber leicht eine Möbiustransformation ϕ_θ finden, die $\phi_C(\phi_N(z_1))$ auf eine positive reelle Zahl $0 < s < 1$ abbildet (einfach durch Drehung um einen entsprechenden Winkel θ!). Durch Rückgängigmachen der Hilfstransformation auf die Kreisscheibe $\mathbb{D}$ erhalten wir $\phi_M := \phi_{C^{-1}} \circ \phi_\theta \circ \phi_C \circ \phi_N$ und $\lambda = \frac{1+s}{1-s}$. Überdies ist diese Transformation natürlich eindeutig bestimmt.

Wir zeigen im folgenden dass $\mathbb{H}$ gemeinsam mit d ein metrischer Raum ist: Symmetrie und Dreiecksungleichung folgen unmittelbar aus der Definition. Einzig die Definitheit bedarf einer Erklärung: falls $z_0 \neq z_1$, dann können wir eine Möbiustransformation und ein $\lambda > 1$ finden, sodass $d(z_0, z_1) = d(\mathsf{i}, \lambda\mathsf{i})$ gilt. Um letzteren Abstand zu berechnen verwenden wir einerseits die gerade Verbindungslinie $\gamma(t) = t\mathsf{i} + (1-t)\lambda\mathsf{i}$, $0 \le t \le 1$, und wir schätzen für jedes weitere $\gamma \in P(\mathsf{i}, \lambda\mathsf{i})$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\mathrm{Im}\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)} dt \ge \Big| \int_0^1 \frac{\mathrm{Im}\gamma'(t)}{\mathrm{Im}\gamma(t)} dt \Big| = \log\lambda$$

ab. Damit ist bewiesen dass die gerade Verbindungslinie das Minimum realisiert und der Abstand $\log\lambda$ ist. Damit wird auch klar wodurch der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten z_0 und $z_1 \neq z_0$ realisiert wird: durch die Urbilder der Geraden $\gamma(t) = t\mathsf{i} + (1-t)\lambda\mathsf{i}$, $0 \le t \le 1$, unter der eindeutig bestimmten Möbiustransformation ϕ_M, die z_0 auf i und z_1 auf $\lambda\mathsf{i}$ abbildet. Urbilder dieser Geraden sind sogenannten Orthogonalkreise, die die reelle Achse im Winkel $\pi/2$ verlassen und sie mit diesem Winkel wieder erreichen.

Um schliesslich zu einer Formel für d zu gelangen führen wir das Doppelverhältnis ein: seien $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$, dann heisst

$$D(z_0, z_1) = \Big| \frac{z_0 - z_1}{z_0 + z_1} \Big|$$

das Doppelverhältnis von z_0 und z_1. Man sieht durch eine einfache Rechnung dass für alle Möbiustransformationen $\phi_M : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ das Doppelverhältnis invariant bleibt, das heisst

$$D(z_0, z_1) = D(\phi_M z_0, \phi_M z_1)\,.$$

Ausserdem gilt natürlich $D(\mathsf{i}, \lambda\mathsf{i}) = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ für $\lambda > 1$. Damit erhält man aber sofort, dass

$$d(z_0, z_1) = \log \frac{1 + D(z_0, z_1)}{1 - D(z_0, z_1)}$$

gelten muss, denn es gilt

$$\log \frac{1 + D(\mathsf{i}, \lambda\mathsf{i})}{1 - D(\mathsf{i}, \lambda\mathsf{i})} = \log\lambda\,.$$

Obige Formel ist nun von praktischem Wert, denn die Verteilung $p(t, z_0, z_1)$ von (X_t, Y_t) verhält sich für kleine Zeiten wie

$$\exp\big(- \frac{d(z_0, z_1)^2}{2t} \big)\,.$$

2. Rechnen und Denken in Ketten und Zykeln

Es ist nicht das erste Mal, dass wir von einem liebgewonnenen Begriff aus eine Abstraktionsstufe höher klettern. Im Falle von Ketten und Zykeln wird der Begriff der stückweise glatten (das heisst C^1) Kurve bzw der stückweise glatten geschlossenen Kurve zu ganzzahligen Kombinationen solcher Objekte verallgemeinert. Ziel ist es das mehrfache Durchlaufen ein und derselben Kurve mit möglicherweise verschiedenen Parametrisierungen algebraisch einfacher zu kodieren: dazu bietet sich der Begriff der freien abelschen Gruppe über allen stückweise stetigen Kurven an auf dem wir die Äquivalenzrelation $\alpha \equiv \beta$ erklären, falls $\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz$.

Zykeln erscheinen in dieser Sichtweise als Elemente der Kerne der Abbildungen eval_z, die abzählen wie oft (gewichtet) z als Anfangspunkt bzw Endpunkt einer Kurve der Kette η auftaucht. Man kann sich das auch graphetheoretisch vorstellen: soviele Kurven wie in einen Punkt z hineinlaufen, müssen dort auch wieder starten. Dann kann man durch sukzessives Verknüpfen dieser Kurven zur einfachen Aussage gelangen, dass jeder Zyklus äquivalent zu einer Summe von geschlossenen Kurven ist.

Die Umlaufzahlversion und der allgemeine Residuensatz erscheinen von diesem Standpunkt als die best-möglichen Resultate, das heisst jegliches Abändern der Voraussetzungen führt zum Verlust der Aussagen: wir erhalten im wesentlichen auf offenen Mengen Ω die Äquivalenz, das $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist, genau dann wenn

$$\int_\eta f(z)dz = 0$$

gilt für alle Zyklen η, die keinen Punkt ausserhalb von Ω durchlaufen. Falls Ω einfach zusammenhängend ist ist, also *jeder* Zykel keinen Punkt ausserhalb von Ω umlaufen kann, dann ist die Integralbedigung – bereits nach älteren Erkenntnissen – äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion F von f auf Ω. Diese Aussagen muten sehr topologisch an und deshalb scheint die Frage angebracht, ob denn die stückweise C^1-Eigenschaft der Kurven, die uns von Angebinn an begleitet hat, nicht ein letzter Ballast in der Theorie ist. Die Frage ist überraschend, da wir offenbar kein Kurvenintegral definieren können, wenn die Kurve nicht stückweise C^1 oder zumindest rektifizierbar ist. Im folgenden werden wir zeigen, dass zumindest für holomorphe Funktionen ein Kurvenintegral sinnvoll definiert werden kann, auch wenn die Kurve nur stetig ist. Wir folgen dabei dem Buch vom Klaus Jänich über Funktionentheorie:

Definition 2.1. *Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$ ein stetiger Weg, dann nennt man eine Partition $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n = t_1$ zusammen mit Radien $r_i > 0$ für $i = 0, \cdots, n$ eine* Kreiskette entlang γ *falls gilt*

$$\gamma([\tau_{i-1}, \tau_i]) \subset K_{i-1} \cap K_i$$

für $i = 1, \cdots, n$ mit $K_i := B_{r_i}(\gamma(\tau_i)) \subset \Omega$.

Offensichtlich gibt es zu jeder genügend feinen Partition des Intervalles $[t_0, t_1]$ eine Kreiskette zu γ in Ω. Nun können wir den zentralen Begriff der analytischen Fortsetzung definieren:

Definition 2.2. *Sei γ eine stetige Kurve gemeinsam mit einer Kreiskette entlang γ und holomorphen Funktionen $f_i : K_i \to \mathbb{C}$, dann sagt man, dass f_n durch analytische Fortsetzung von f_0 entlang γ entsteht, falls die* Konsistenzbedingung

$$f_{i-1}|_{K_{i-1}\cap K_i} = f_i|_{K_{i-1}\cap K_i}$$

für $i = 1, \cdots, n$ erfüllt ist.

Aufgrund des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen sieht man, dass die analytische Fortsetzung von f_0 nur von γ aber nicht von der speziell gewählten Kreiskette abhängt. Man kann das sogar noch schärfer in der Sprache der Keime formulieren, um nicht dauernd über verschiedene Definitionsbereiche sprechen zu müssen. Wir sagen, dass zwei holomorphe Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$, U, V offen um einen Punkt p äquivalent sind, falls sie auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche übereinstimmen. Die Äquivalenzklasse dieser Relation heisst *Keim* von f an p, in Zeichen (f, p) und ist durch die Taylorkoeffizienten von f an p eindeutig bestimmt. Man kann natürlich die analytische Fortsetzung so sehen, dass ein Keim an $\gamma(t_0)$ zu einem Keim an $\gamma(t_1)$ entlang γ fortgesetzt wird. Dieser Prozess hängt nicht von der speziell gewählten Kreiskette ab: seien zwei Kreisketten mit Partititionen $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n = t_1$ und $t_0 = \tilde{\tau}_0 \leq \tilde{\tau}_1 \leq \cdots \leq \tilde{\tau}_m = t_1$ mit holomorphen Funktionen $f_i : K_i \to \mathbb{C}$ und $\tilde{f}_j : \tilde{K}_j \to \mathbb{C}$ mit übereinstimmendem Anfangskeim gegeben, das heisst $(f_0, \gamma(t_0)) = (\tilde{f}_0, \gamma(t_0))$. Dann können wir mit Induktion nach $i + j$ zeigen: falls $\tau_{i-1} \leq \tilde{\tau}_j \leq \tau_i$ oder $\tilde{\tau}_{j-1} \leq \tau_i \leq \tilde{\tau}_j$ gilt, dann auch

$$\tilde{f}_j|_{\tilde{K}_j\cap K_i} = f_i|_{\tilde{K}_j\cap K_i}\,,$$

woraus die Behauptung unittelbar folgt. Der Anfang der Induktion liegt bei $i+j = 1$, also $i = 1$ und $j = 0$ oder $i = 0$ und $j = 1$: hier können wir sofort in beiden Fällen schliessen mit

$$f_1|_{\tilde{K}_0\cap K_1\cap K_0} = f_0|_{\tilde{K}_0\cap K_1\cap K_0} = \tilde{f}_0|_{\tilde{K}_0\cap K_1\cap K_0}\,.$$

Sei die Aussage nun richtig für $i + j < p$: Sei nun $i + j = p$. Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden: erstens gelte $\tau_{i-1} \leq \tilde{\tau}_{j-1} \leq \tau_i$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\tilde{f}_j|_{\tilde{K}_{j-1}\cap K_i} = f_i|_{\tilde{K}_{j-1}\cap K_i}\,,$$

also auch

$$\tilde{f}_j|_{\tilde{K}_{j-1}\cap\tilde{K}_j\cap K_i} = f_i|_{\tilde{K}_{j-1}\cap\tilde{K}_j\cap K_i}\,,$$

was nach dem Identitätssatz ausreicht für

$$\tilde{f}_j|_{\tilde{K}_j\cap K_i} = f_i|_{\tilde{K}_j\cap K_i}\,.$$

zweitens könnte aber auch $\tilde{\tau}_{j-1} \leq \tau_{i-1} \leq \tilde{\tau}_j$, was analog zum gewünschten führt.

Im allgemeinen muss es für eine gegebene holomorphe Funktion und einen Weg γ keine analytische Fortsetzung geben, allerdings gibt es immer analytische Fortsetzungen von Stammfunktionen:

Lemma 2.3. *Sei Ω eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, γ ein stetiger Weg in Ω mit einer Kreiskette und F_0 eine Stammfunktion von $f|_{K_0}$, dann ist F_0 längs γ analytisch fortsetzbar zu F_1 und F_1 ist eine Stammfunktion von $f|_{K_n}$. Weiters gilt für jeden stückweise C^1-Weg offenbar*

$$\int_\gamma f(z)dz = F_1(\gamma(t_1)) - F_0(\gamma(t_0))\,.$$

Beweis. Auf offenen Kreissscheiben können wir jeweils Stammfunktionen von $f|_{K_i}$ angeben, durch geeignete Wahl der Konstanten kann man die Konsistenzbedingung erfüllen. Wählen wir eine Kreiskette sodass $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ auch C^1 ist, dann liefert die Berechnung der Stammfunktion auf $K_{i-1} \cap K_i$ auch den Wert des Integrals mit obiger Formel. Aufsummieren liefert, da die Sume teleskopiert. □

Beispiel 2.4. Die Funktion $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{n!}$ kann nirgendwohin ausserhalb von $\mathbb{D}$ analytisch fortgesetzt werden, da am Rande von $\mathbb{D}$ eine dichte Menge von Uendlichkeitsstellen der Reihe liegt. Das sieht man durch Betrachten der Punkte $z_{r,q} = r\exp(2\pi \mathrm{i} q)$ für rationales $q \in \mathbb{Q}$. Wir erhalten $\lim_{r\to 1} |f(z_{r,q})| = \infty$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$. Wenn es eine analytische Fortsetzung von f gäbe, dann müsste man einen Korridor endlicher Breite durch den Rand legen können (die Kreiskette).

Das führt uns unmittelbar zu Definition des Integrals entlang eines stetigen Weges:

Definition 2.5. *Sei Ω eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, γ ein stetiger Weg in Ω. Wir definieren*

$$\int_\gamma f(z)dz = F_1(\gamma(t_1)) - F_0(\gamma(t_0))\,,$$

wobei F_0 eine Stammfunktion von $f|_K$, für irgendeine offene Kreisscheibe um $\gamma(t_0)$ in Ω und F_1 durch analytische Fortsetzung aus F_0 entlang γ hervorgeht.

Das Integral ist wohldefiniert, da Stammfunktionen bis auf Konstanten eindeutig auf Kreissscheiben bestimmt sind. Wenn wir die Parameterdarstellung von γ affin transformieren, dann ändert sich das Integral natürlich auch nicht, da wir die (definierende) Kreisketten leicht ineinander überführen können. Die entscheidende Frage ist nun, was bei Parametertransformationen bzw stetigen Homotopien von stetigen Wegen passiert, denn damit können wir (durch geeignete Homotopien) den Anschluss an die C^1-Theorie machen. Ausserdem werden wir dabei eine entscheidende Aussage zur analytischen Fortsetzbarkeit kennenlernen: den Mondromiesatz. In Worten bedeutet dieser Satz, dass kleine Variationen eines stetigen Weges das Ergebnis einer analytischen Fortsetzung nicht beeinflussen.

Theorem 2.6. *Sei h eine stetige Homotopie zwischen zwei Wegen α und $\tilde{\alpha}$, jeweils mit $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0) = p_0$ und $\alpha(1) = \tilde{a}lpha(1) = p_1$. Sei weiters der Keim (f_0, p_0) entlang aller stetigen Wege h_τ analytisch fortsetzbar zu $(f_1(\tau), p_1)$. Dann hängt der Keim $(f_1(\tau), p_1)$ nicht von τ ab.*

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Schlussfolgerung aus dem Identitätssatz, es geht eigentlich nur darum die Dinge geordnet hinzuschreiben: Dazu gengẗ es natürlich zu zeigen, dass der Keim lokal konstant in τ ist. Nehmen wir also ein τ_0 und eine Kreiskette mit Partition $\lambda_0 = 0 \leq \cdots \leq \lambda_n = 1$, Funktionen $g_0, g_1, \cdots, g_n$ auf Kreisen K_i und Radien $r_i > 0$ um $h(\lambda_i, \tau_0)$, für $i = 0, \cdots, n$. Wir wählen zuerst ein $\epsilon > 0$, sodass die ϵ-Auffettung der kompakten Menge $h_{\tau_0}([\lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}])$ immer noch im grössten Kreis in K_i um jeden Punkt q mit $|q-\gamma(t_i)| < \epsilon$ enthalten ist, für jedes $i = 0, \cdots, n$ (beachte hier die Konvention $\lambda_{-1} = 0$ und $\lambda_{n+1} = 1$).

Wir wählen weiters mit der Stetigkeit der Homotopie h und der Kompaktheit von $[0, 1]$ ein $\delta > 0$ sodass $|h_{\tau_0}(t) - h_\tau(t)| < \epsilon$ für alle t and $|\tau - \tau_0| < \delta$. Nun können wir aber sofort für jedes τ mit $|\tau - \tau_0| < \delta$ den grössten Kreis um $h(\lambda_i, \tau)$ betrachten, der noch in K_i liegt, denn dieser Kreis enthält insbesondere $h([\lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}], \tau)$, für

$i = 0, \cdots, n$, falls $|\tau - \tau_0| < \delta$. Damit ist aber auch eine analytische Fortsetzung des Keimes (f_0, p_0) auf $(f_1(\tau_0), p_1)$ entlang h_τ definiert. Daraus folgt die lokale Konstanz mit der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung entlang eines stetigen Weges und damit die Aussage. $\square$

Aus dieser Aussage folgt natürlich unmittelbar die Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals von holomorphen Funktionen entlang stetiger Kurven. Aus der Homotopieinvarianz folgt aber sofort die Umlaufzahlversion des Cauchyschen Integralsatzes, da es zwischen stetigen Kurven und stückweise C^1-Kurven immer eine stetige Homotopie gibt: wähle zum Beispiel eine Kreiskette von γ in Ω und betrachte $\gamma([\tau_{i-1}, \tau_i]) \subset K_{i-1} \cap K_i \subset \Omega$, für $i = 1, \cdots, n$, dann kann man den Weg aus stückweise linearen Verbindungstücken von $\gamma(\tau_{i-1})$ nach $\gamma(\tau_i)$, für $i = 1, \cdots, n$ betrachten. Dieser zweite Wege ist offensichtlich homotop zum ersten aufgrund der Konvexität von $K_{i-1} \cap K_i$und hat deshalb dasselbe Integral. Ausserdem ändert sich die Umlaufzahl um Punkte ausserhalb von Ω bei Homotopien in Ω, wieder aufgrund der Homotopie-invarianz des Kurvenintegrals.

Bemerkung 2.7. Die Homotopieinvarianz zieht auch die Invarianz im bezug auf Parametertransformationen nach sich: sei $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ ein stetiger Weg und $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Parametertransformation mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$, dann definiert $h(t, \tau) := \gamma(\tau t + (1 - \tau)\phi(t))$ für $0 \leq \tau, t \leq 1$ eine Homotopie der Wege γ und $\gamma \circ \phi$ in Ω. Mit der Invarianz unter affinen Parametertransformationen erhalten wir das allgemeine Ergebnis für beliebige Parametertransformationen. Vergleiche diesen Beweis mit dem Beweis für stückweise C^1-Wege.

Bemerkung 2.8. In der Mathematik passiert es häufig, dass man Integralbegriffe über die klassische Gültigkeit der Riemann-Lebesgue-Stieltjes-Theorie hinaus verallgemeinert. Das geht immer einher mit einer Verkleinerung der Menge der Integranden zugunsten einer Vergrösserung der Menge der Integratoren: in der Funktionentheorie haben wir gesehen, dass man holomorphe Funktionen (nicht alle stetigen Funktionen!) entlang von stetigen Pfaden (nicht nur stückweise C^1-Pfaden) integrieren kann.

Beispiel 2.9. Ein sehr schönes Beispiel analytischer Fortsetzbarkeit von weitreichender Bedeutung ist die Riemannsche Zetafunktion: sie ist für komplexe Zahlen z mit $\mathrm{Re}(z) > 1$ durch die Formel

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

gegeben, wobei klarerweise an $z = 1$ mit einer Polstelle (erster Ordnung) zu rechnen ist, falls eine analytische Fortsetzung gelingt. Der in der Vorlesung gewählte Zugang unterscheidet sich vom Zugang des Skriptums und ist etwas direkter an Riemanns Originalarbeit angelehnt, ausgezeichnete Aufzeichnungen dazu finden sich, e.g., in `http://www.math.utah.edu/~milicic/zeta.pdf`.

ETH Zürich, D-Math, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland
E-mail address: jteichma@math.ethz.ch