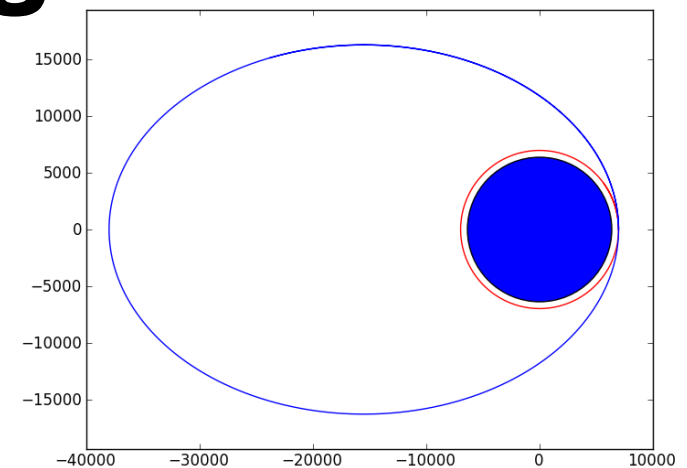
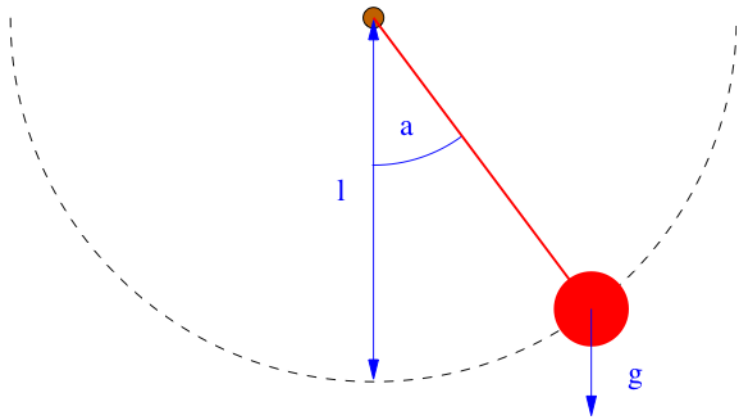


ETHZ Studienwoche 2016

# Differentialgleichungen oder wie beschreibt man Veränderung



# Übersicht

- **Ableitung**

- Analytisch
- Numerische Ableitung

$$\frac{df}{dx}, f'(x), \dot{f}$$

- **Integral**

- Analytisch
- Numerische Integration

$$\int f(x)dx, \int_a^b f(x)dx$$

- **Differentiagleichungen**

- Analytisch
- Numerische Verfahren

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda y$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

# Übersicht

- **Ableitung**

- Analytisch
- **Numerische** Ableitung

$$\frac{df}{dx}, f'(x), \dot{f}$$

- **Integral**

- Analytisch
- **Numerische** Integration

- **Differentiagleichungen**

- Analytisch
- **Numerische** Verfahren

**Computer-Experimente**

**mit**

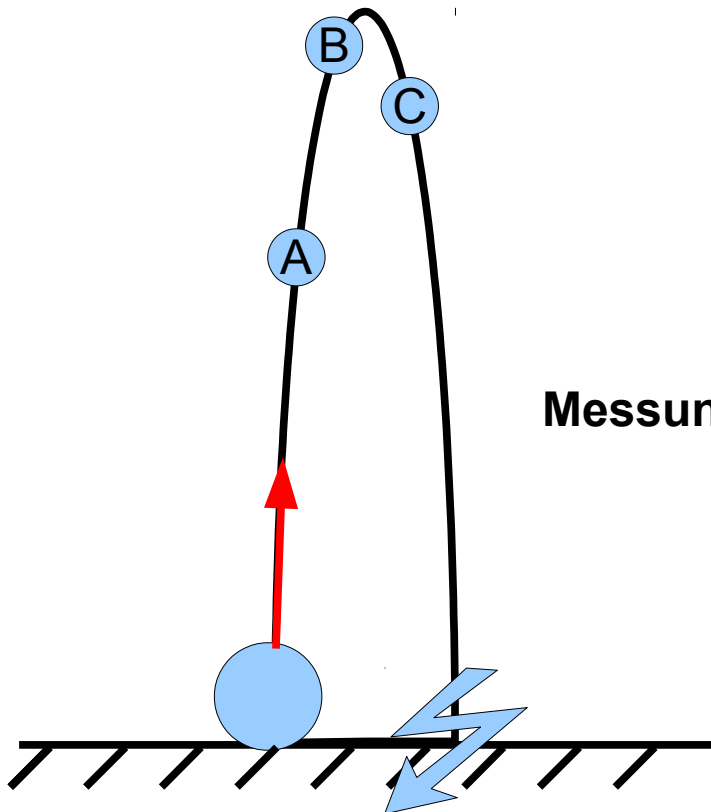
**PYTHON**

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda y$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

# Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?

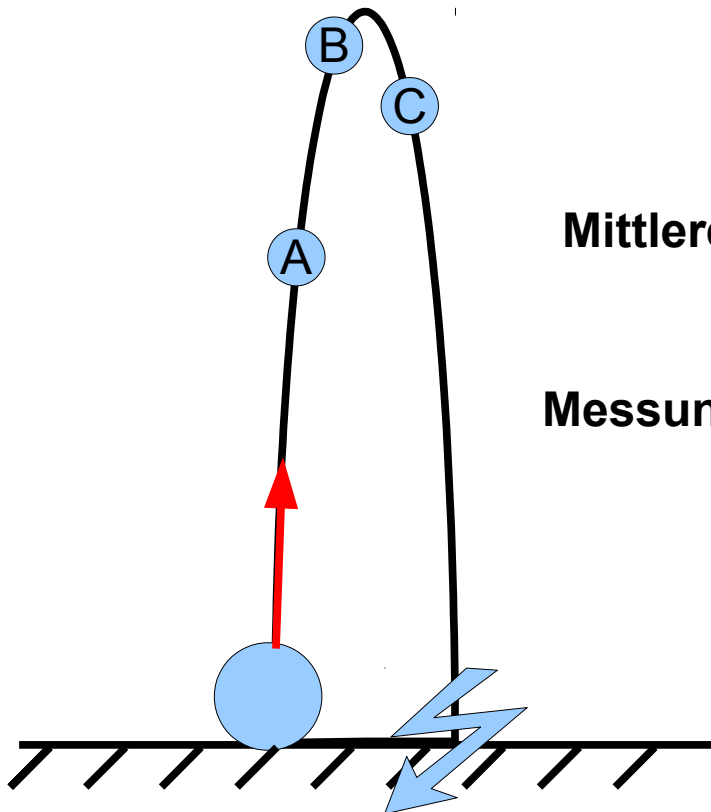


Messungen:

	A	B	C
Zeit $t$ [s]	1.0	2.0	3.7
Höhe $h$ [m]	19.10	28.38	21.65

# Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?



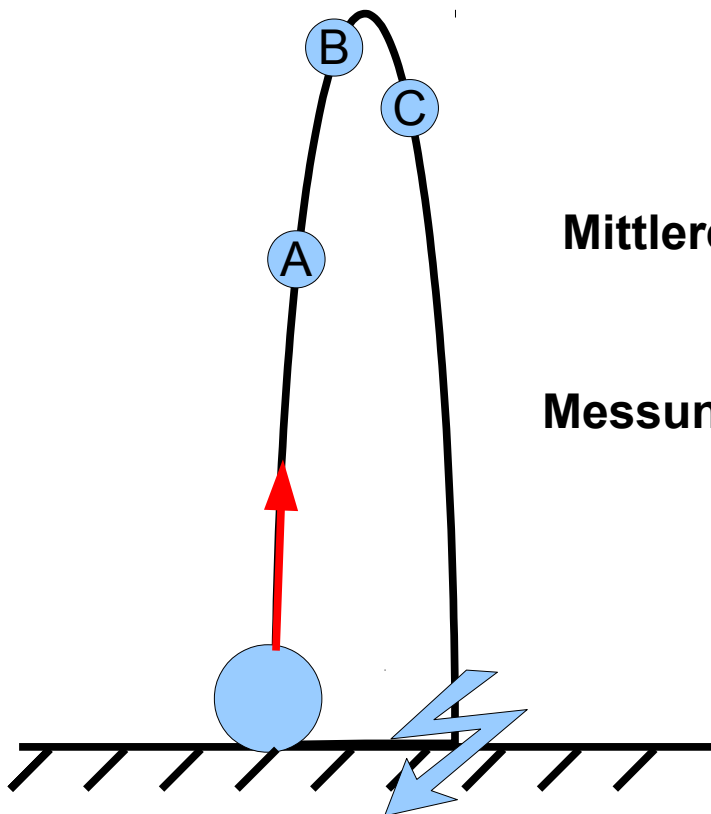
$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{Variation der Position}}{\text{Variation der Zeit}}$$

Messungen:

	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Hoehe h [m]	19.10	28.38	21.65

# Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?



$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{Variation der Position}}{\text{Variation der Zeit}}$$

Messungen:

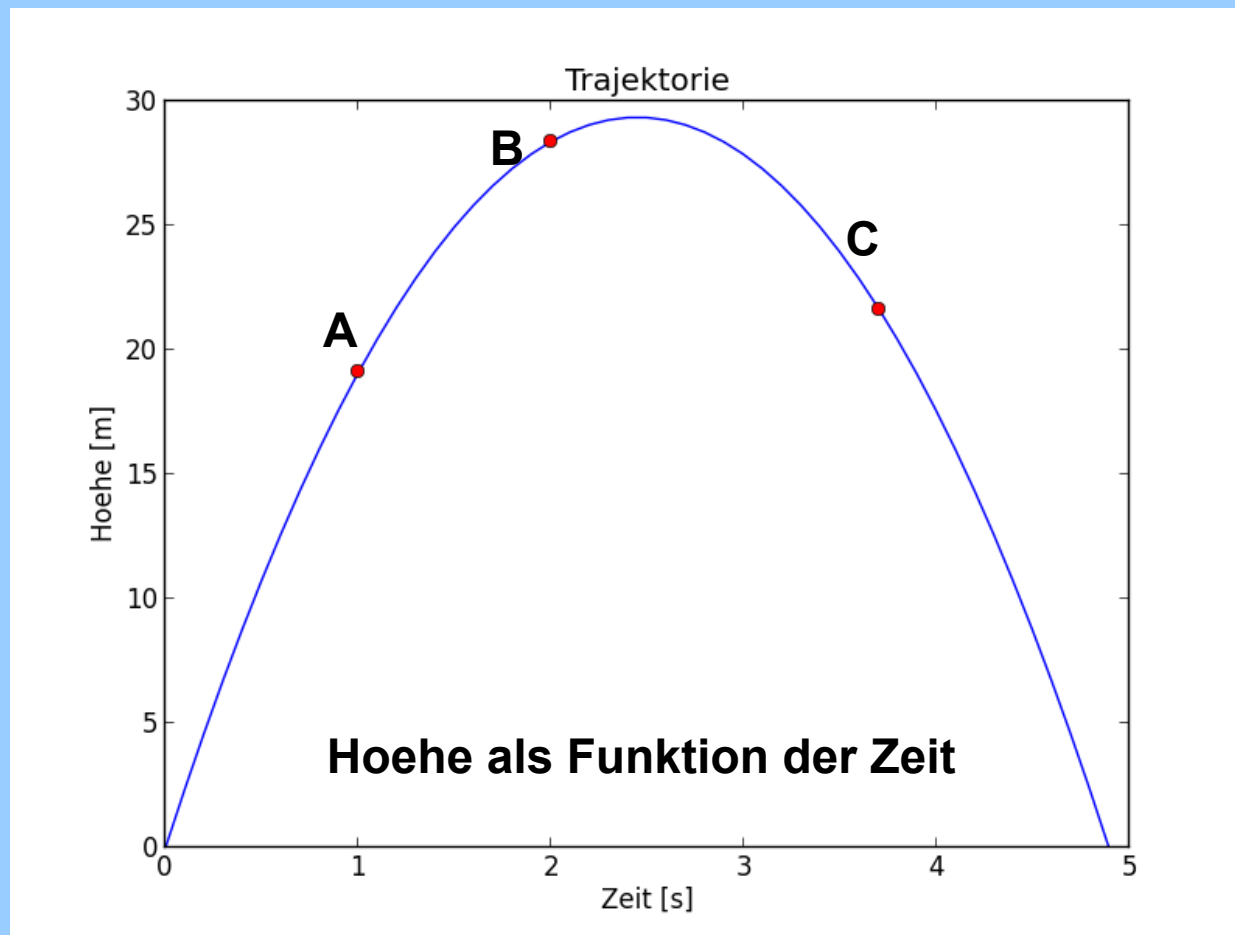
	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Hoehe h [m]	19.10	28.38	21.65

Mittlere Geschw.  $\approx$  9.28 m/s      -3.96 m/s

# Die Ableitung

- W  
G

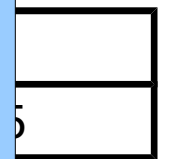
## Graphische Interpretation:



S

Position

Zeit

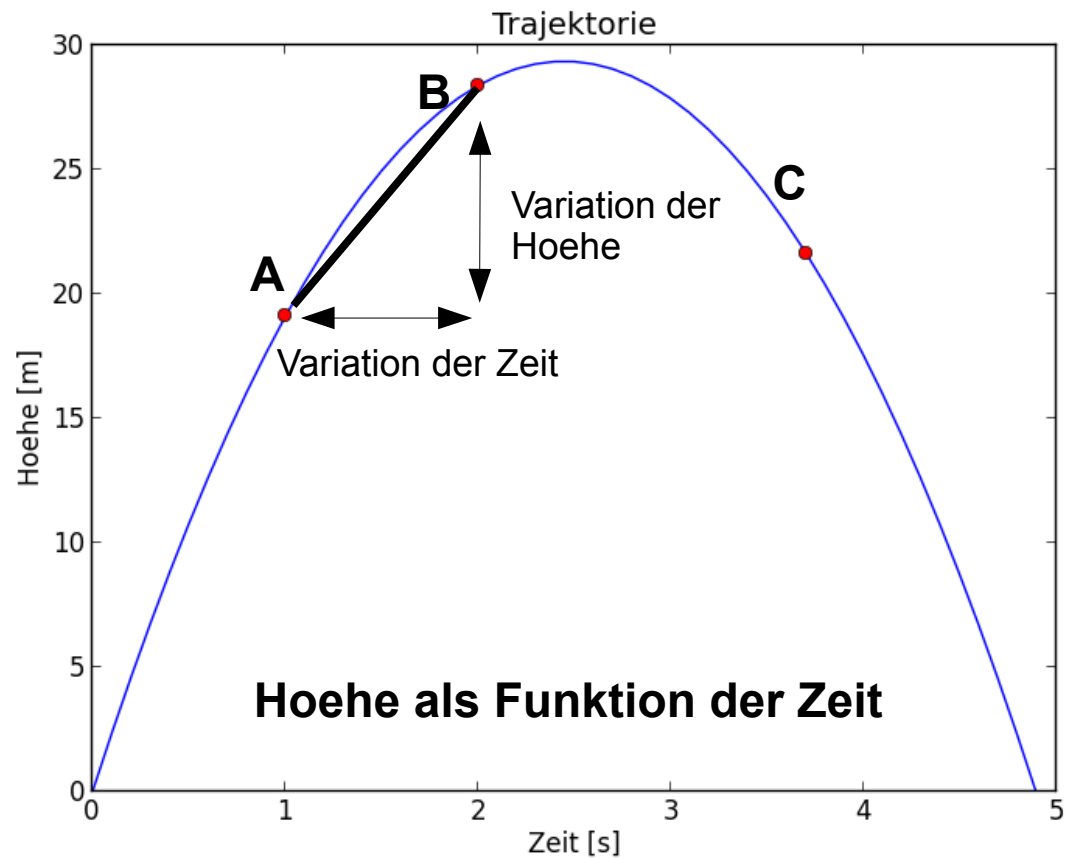


S

S

# Die Ableitung

## Graphische Interpretation:

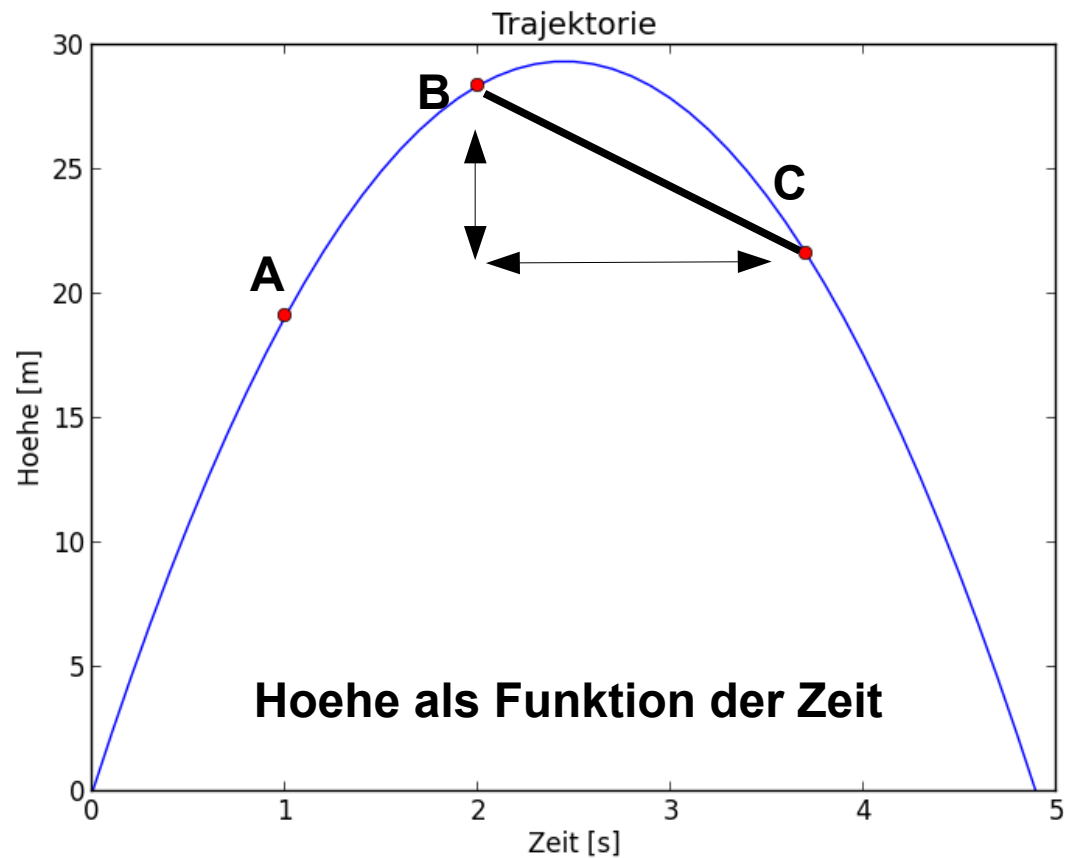




# Die Ableitung

- W  
G

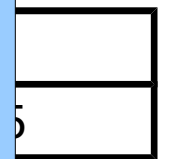
## Graphische Interpretation:



S

Position

Zeit



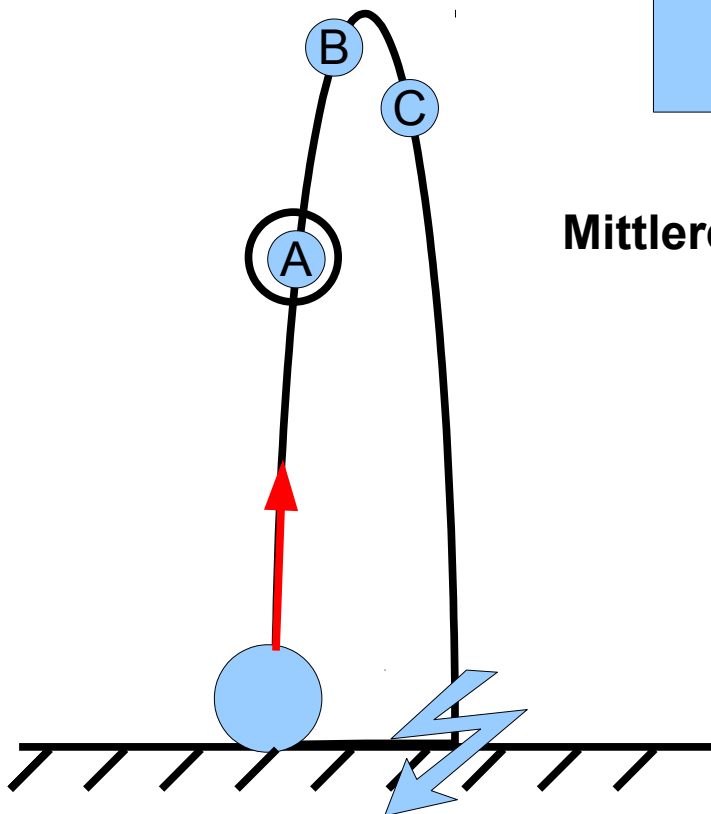
S

# Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?

**Instantane Geschwindigkeit???**

$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{Variation der Position}}{\text{Variation der Zeit}}$$



	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Hoehe h [m]	19.10	28.38	21.65

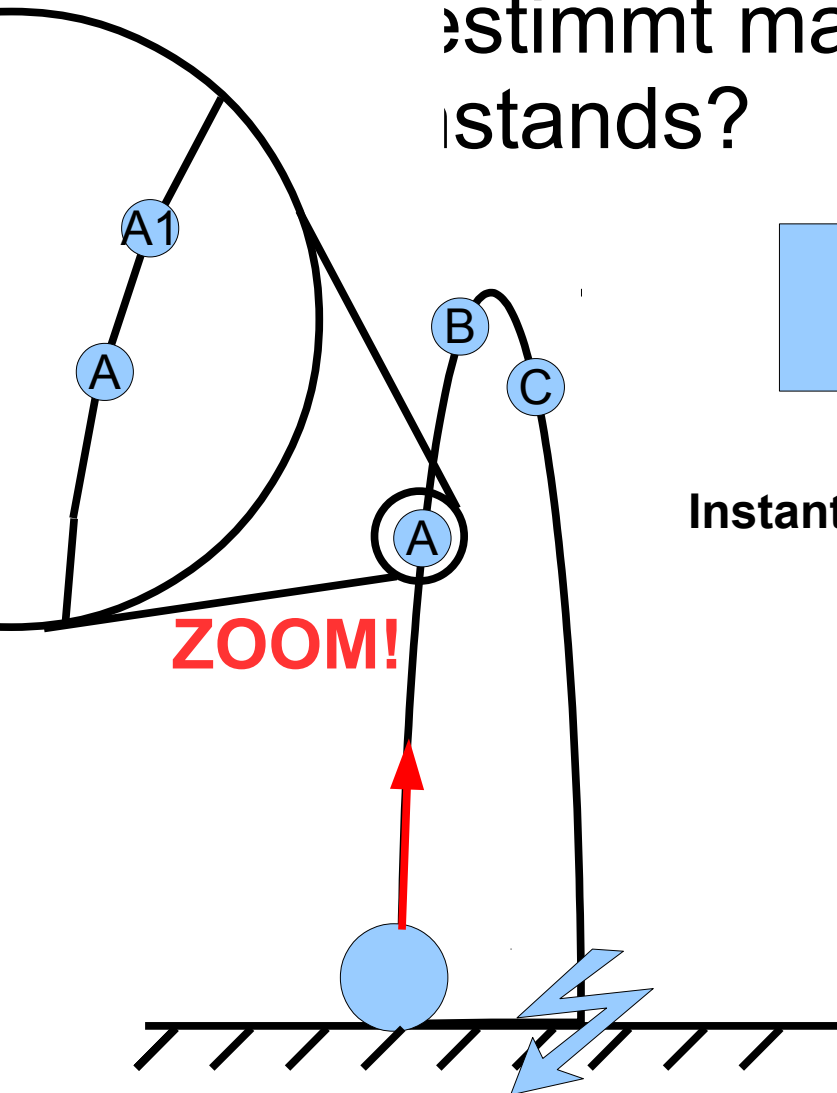
Mittlere Geschw.  $\approx$  9.28 m/s      -3.96 m/s

# Die Ableitung

Bestimmt man die Geschwindigkeit eines Zustands?

**Instantane Geschwindigkeit???**

Instantane Geschw. =  $\frac{\text{Variation der Position}}{\text{„Sehr kleine“ Variation der Zeit}}$

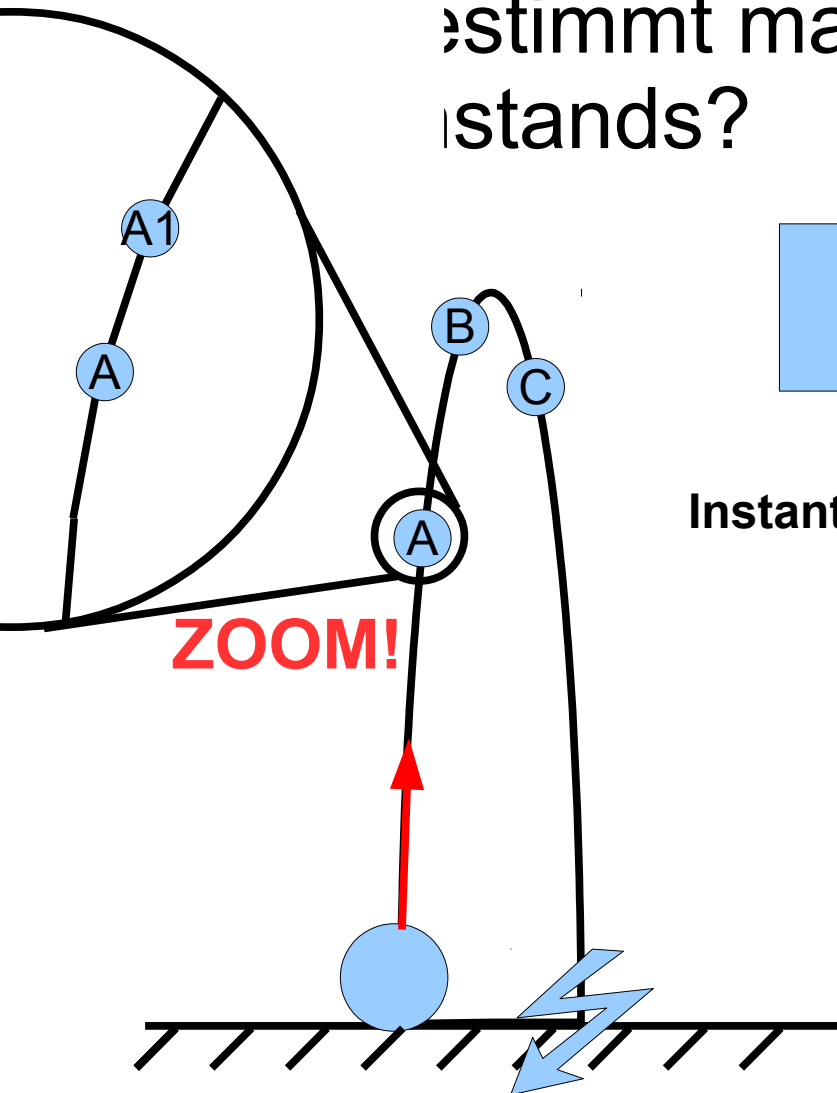


	A	A1	A2	...
Zeit t [s]	1.0	1.1	1.05	
Hoehe h [m]	19.1	20.46	19.79	

Geschw.  $\approx$  13.70 m/s 13.94 m/s

# Die Ableitung

Bestimmt man die Geschwindigkeit eines Zustands?



**Instantane Geschwindigkeit???**

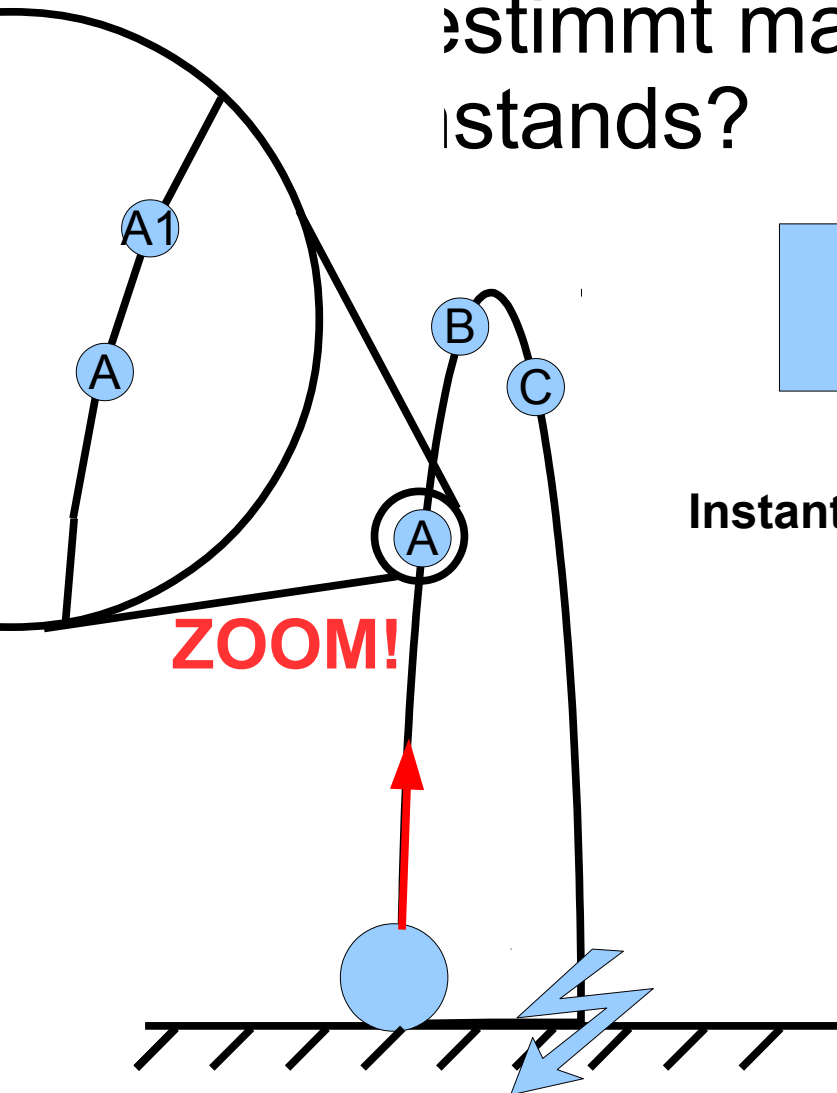
$$\text{Instantane Geschw.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

	A	A1	A2	...
Zeit t [s]	1.0	1.1	1.05	
Hoehe h [m]	19.1	20.46	19.79	

Geschw.  $\approx$  13.60 m/s

# Die Ableitung

Bestimmt man die Geschwindigkeit eines Zustands?



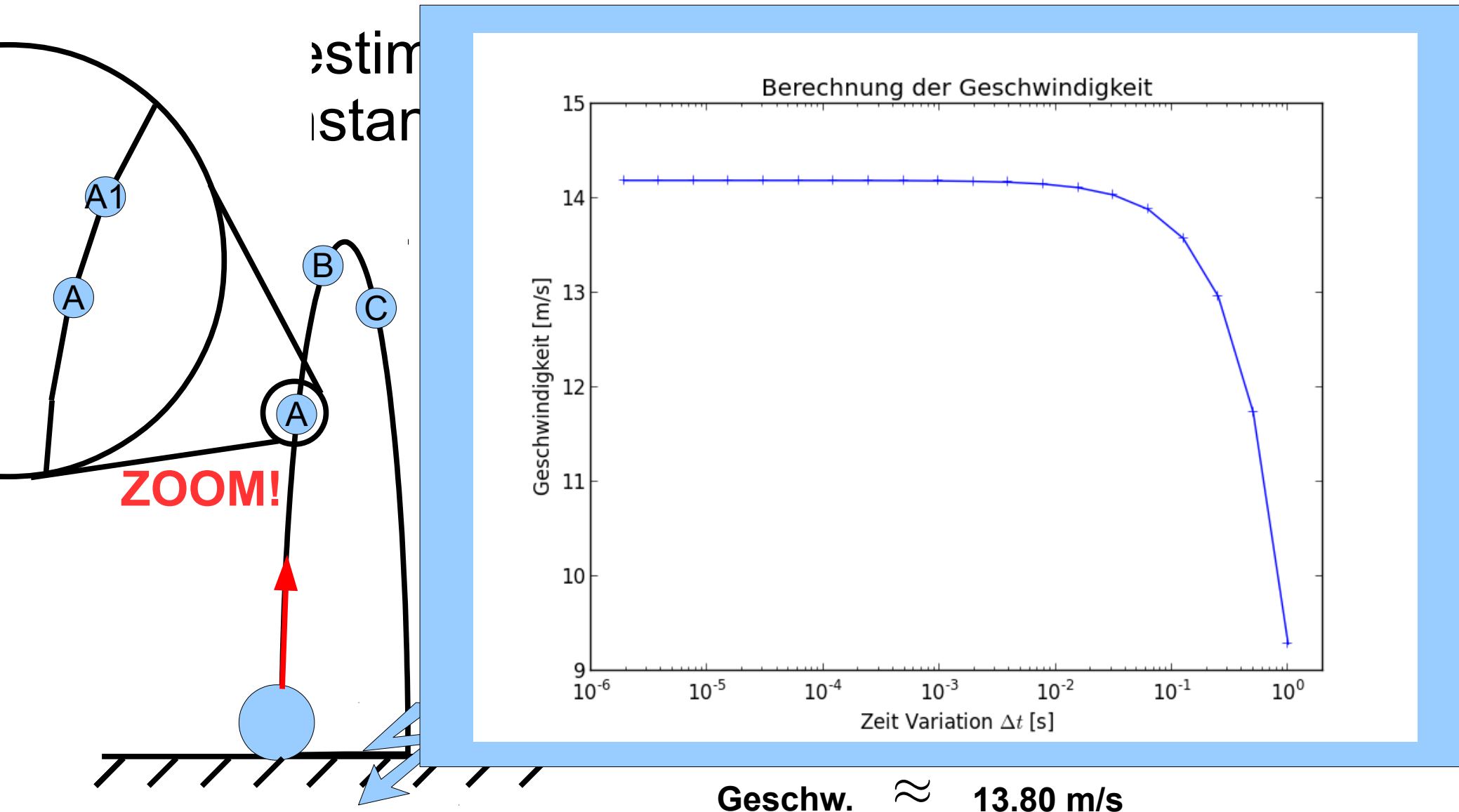
**Instantane Geschwindigkeit???**

$$\text{Instantane Geschw.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

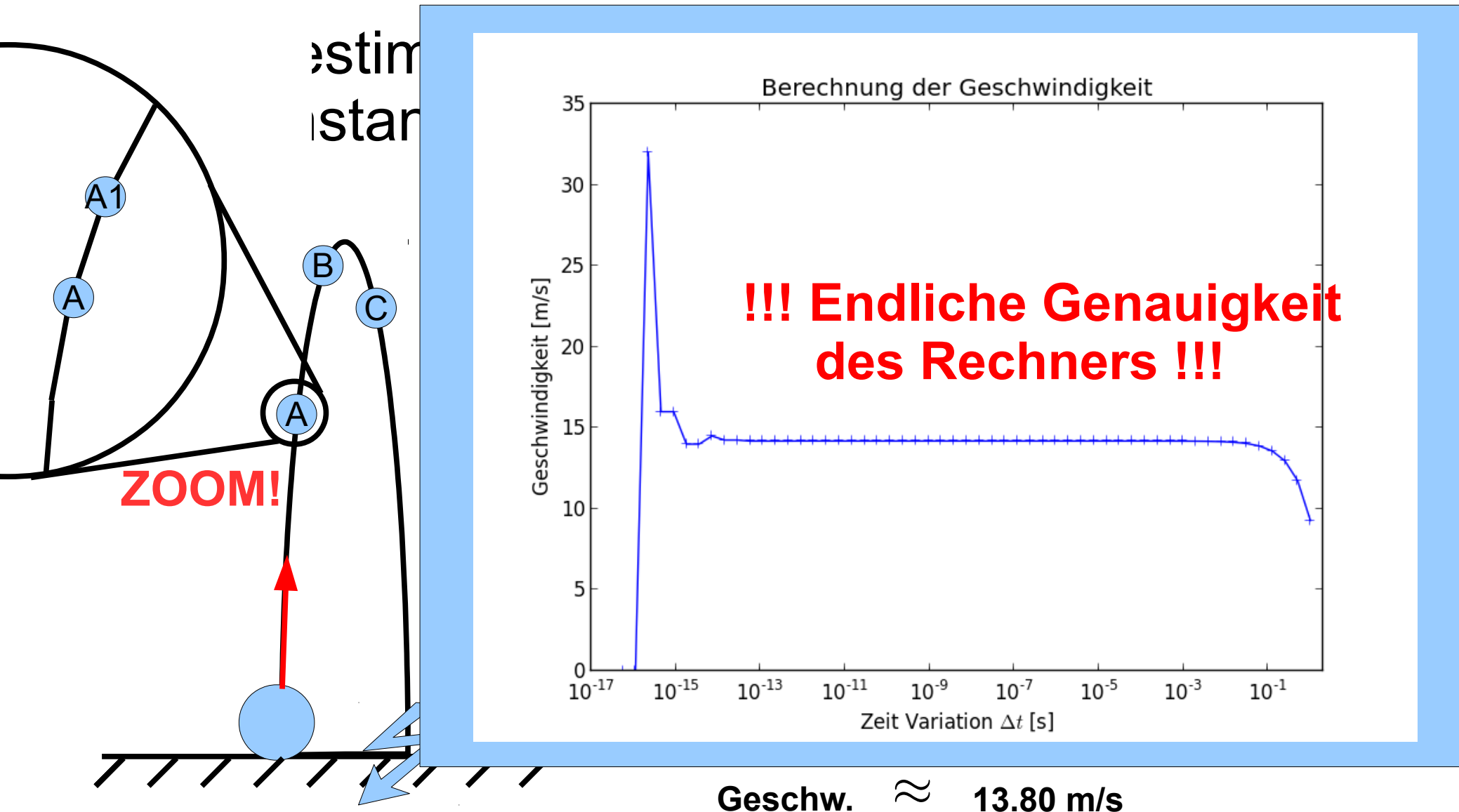
	A	A1	A2	...
Zeit t [s]	1.0	1.1	1.05	
Hoehe h [m]	19.1	20.46	19.79	

Geschw.  $\approx$  13.80 m/s

# Die Ableitung

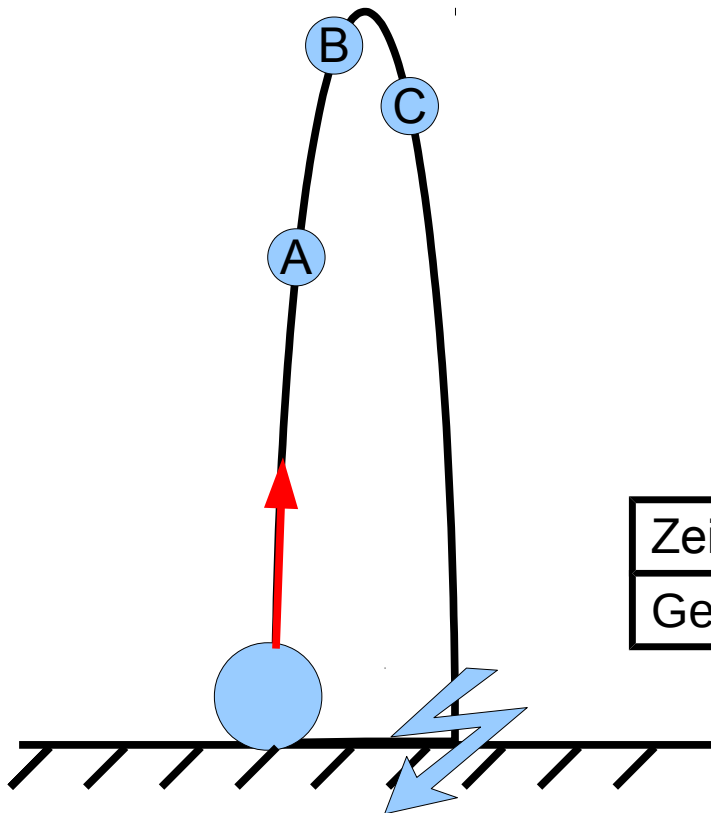


# Die Ableitung



# Das Integral

- Wie bestimmt man die Position eines Gegenstands wenn man seine Geschwindigkeit kennt?



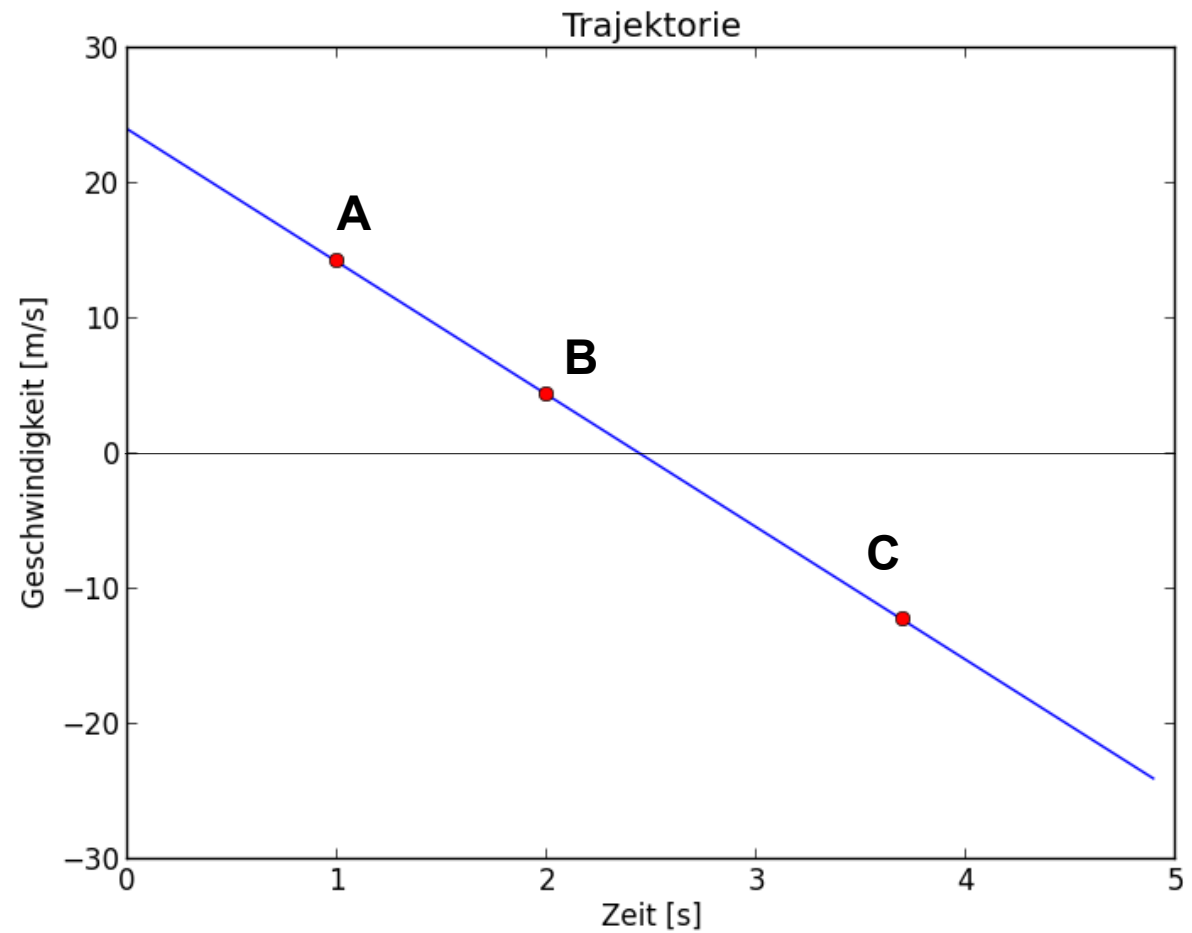
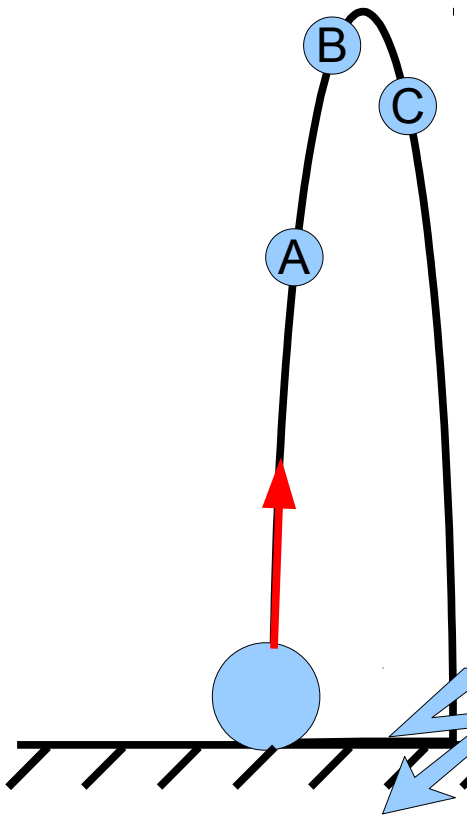
$$\text{Distanz} = \text{Geschwindigkeit} \times \text{Zeit}$$

	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Geschw. v [m/s]	14.19	4.38	-12.30



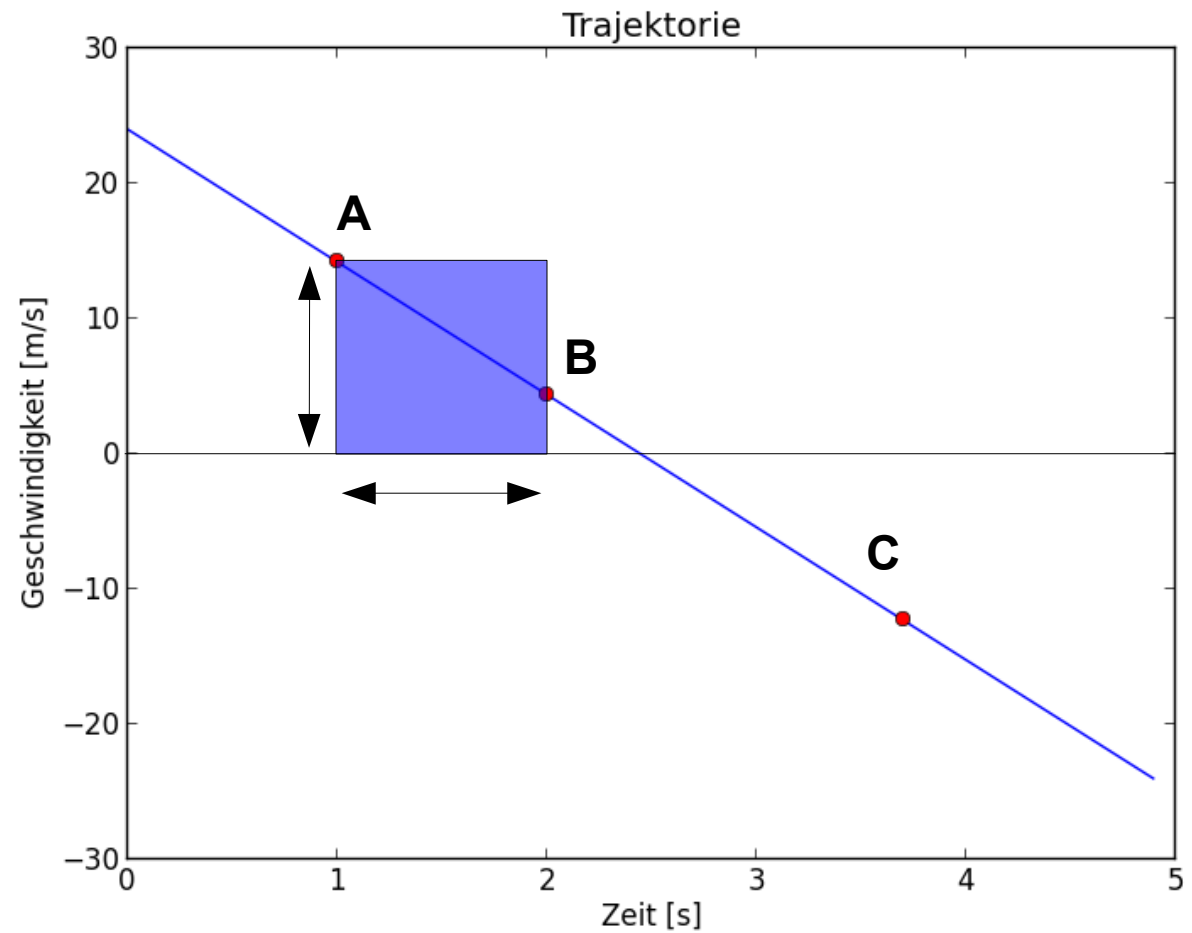
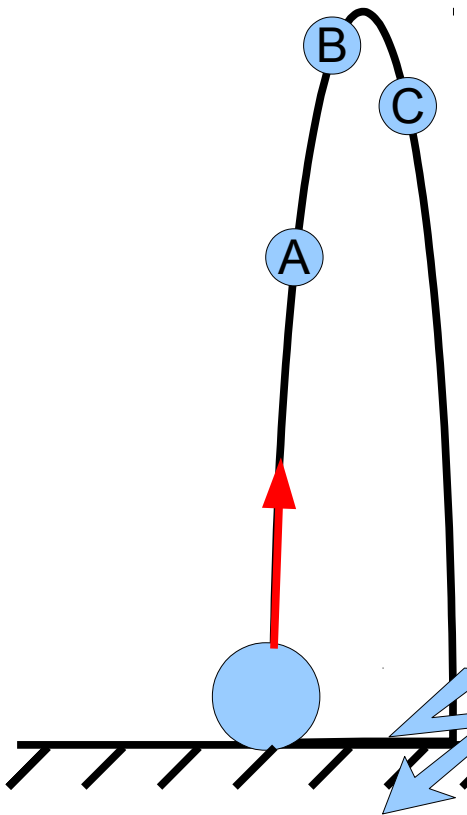
# Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Position kennt?



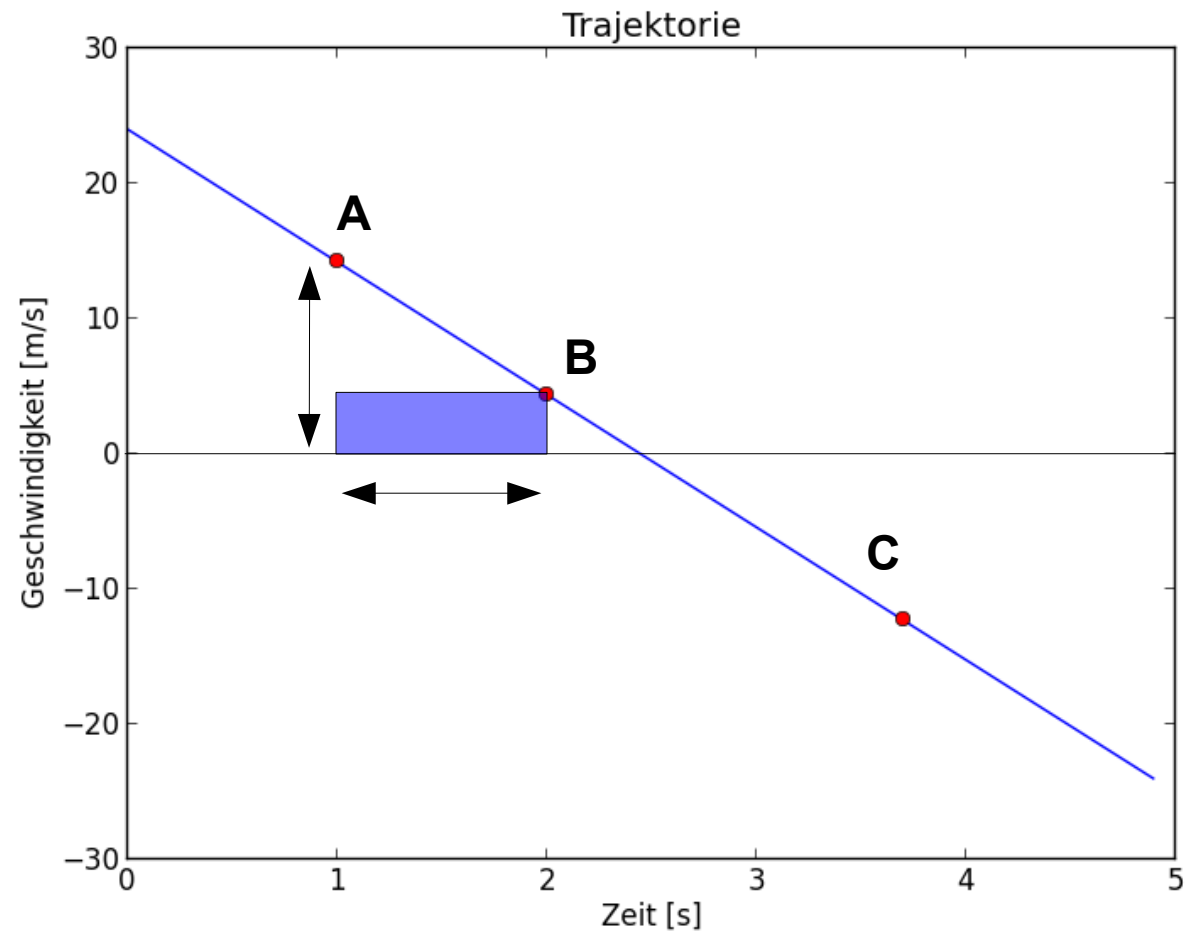
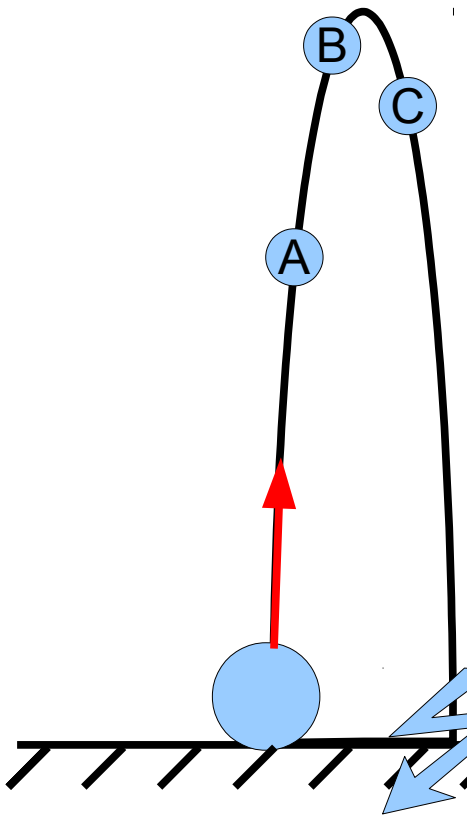
# Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Position kennt?



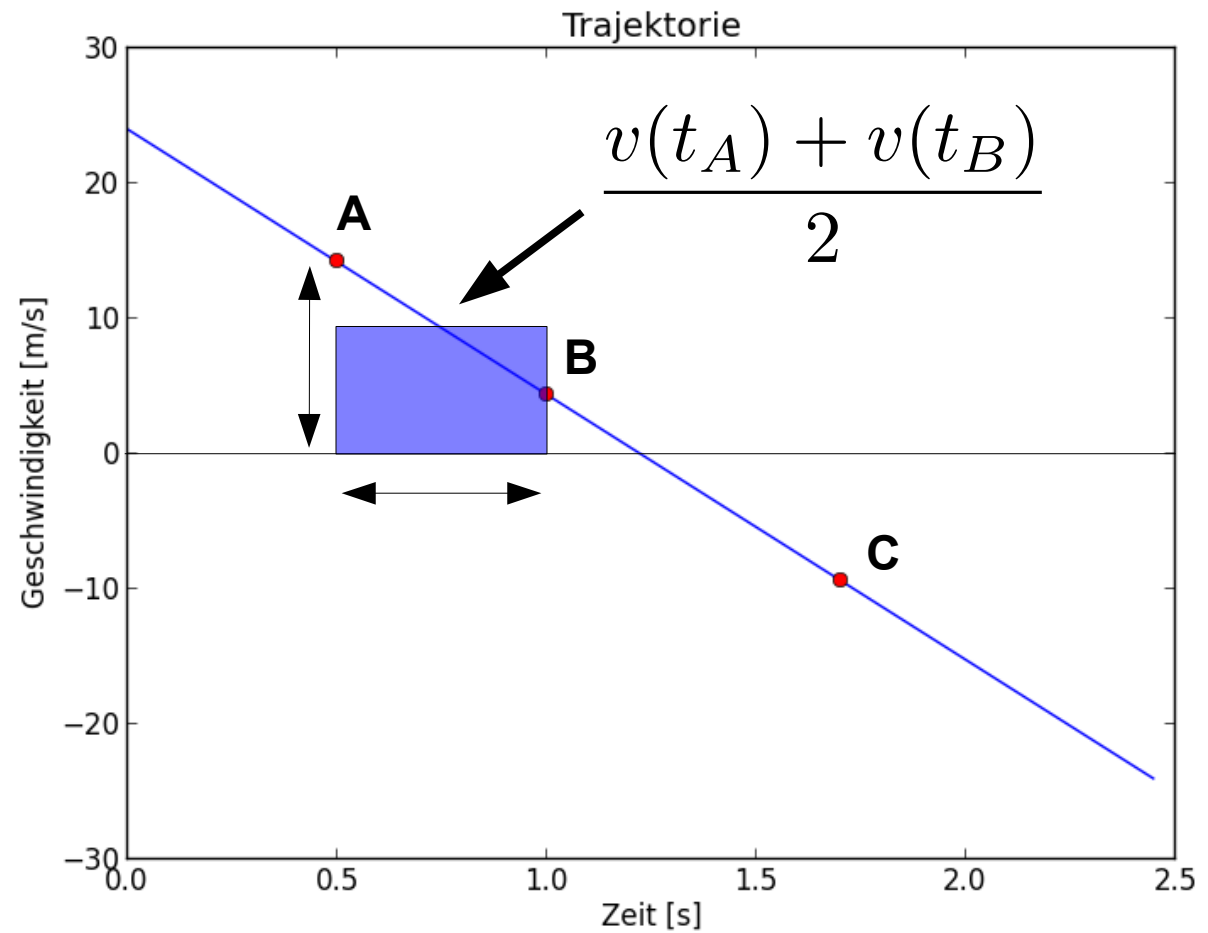
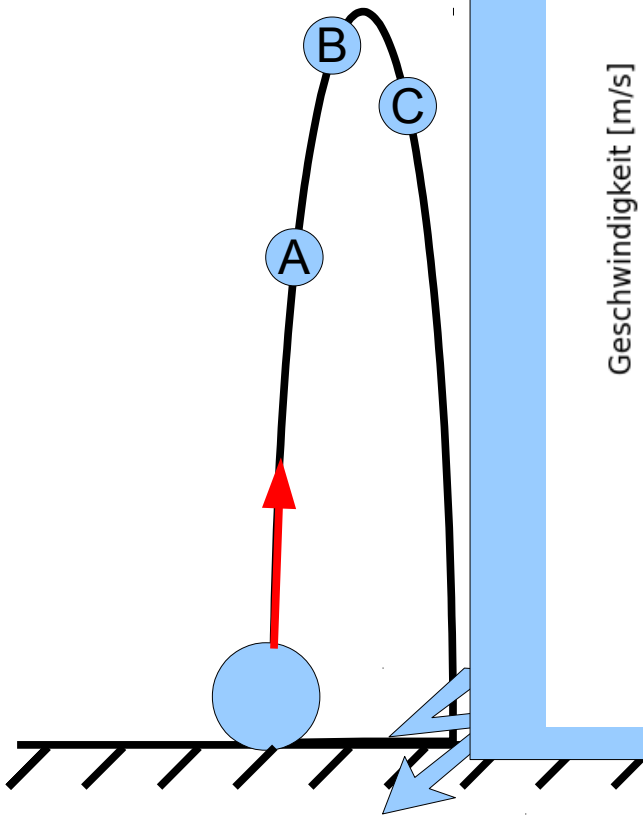
# Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Position kennt?



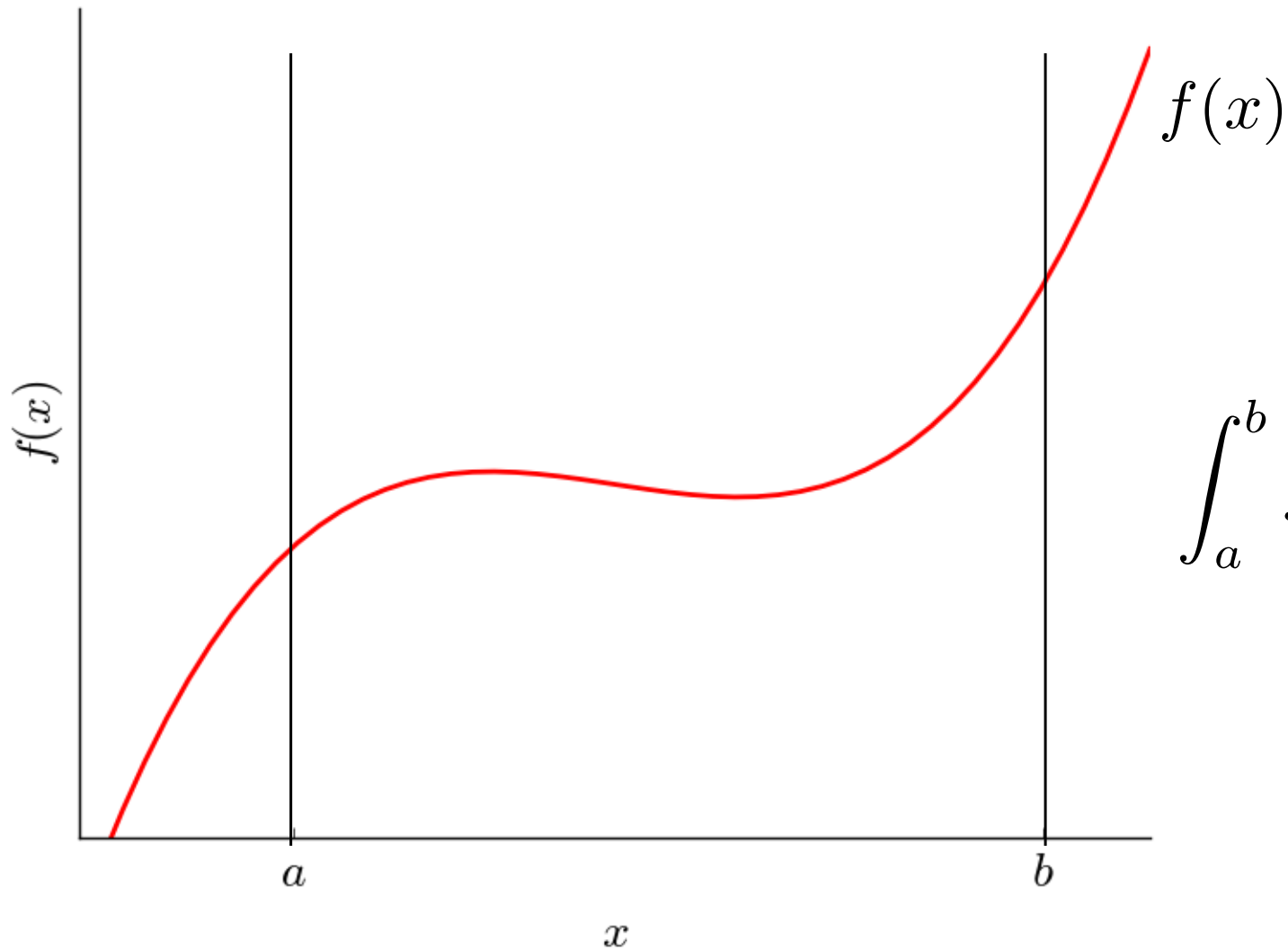
# Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Anfangsgeschwindigkeit kennt?



# Das Integral

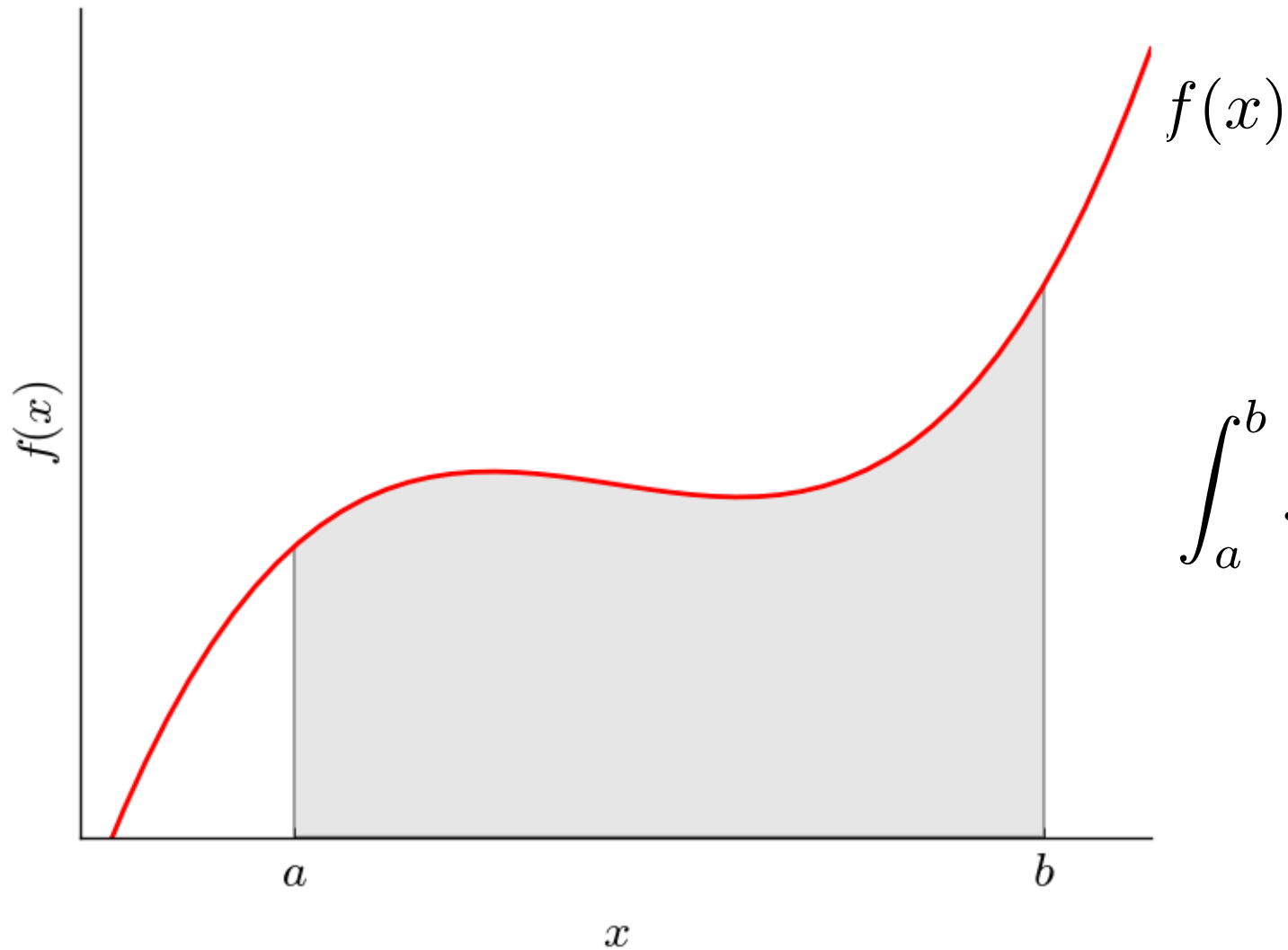
- Allgemein:



$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

# Das Integral

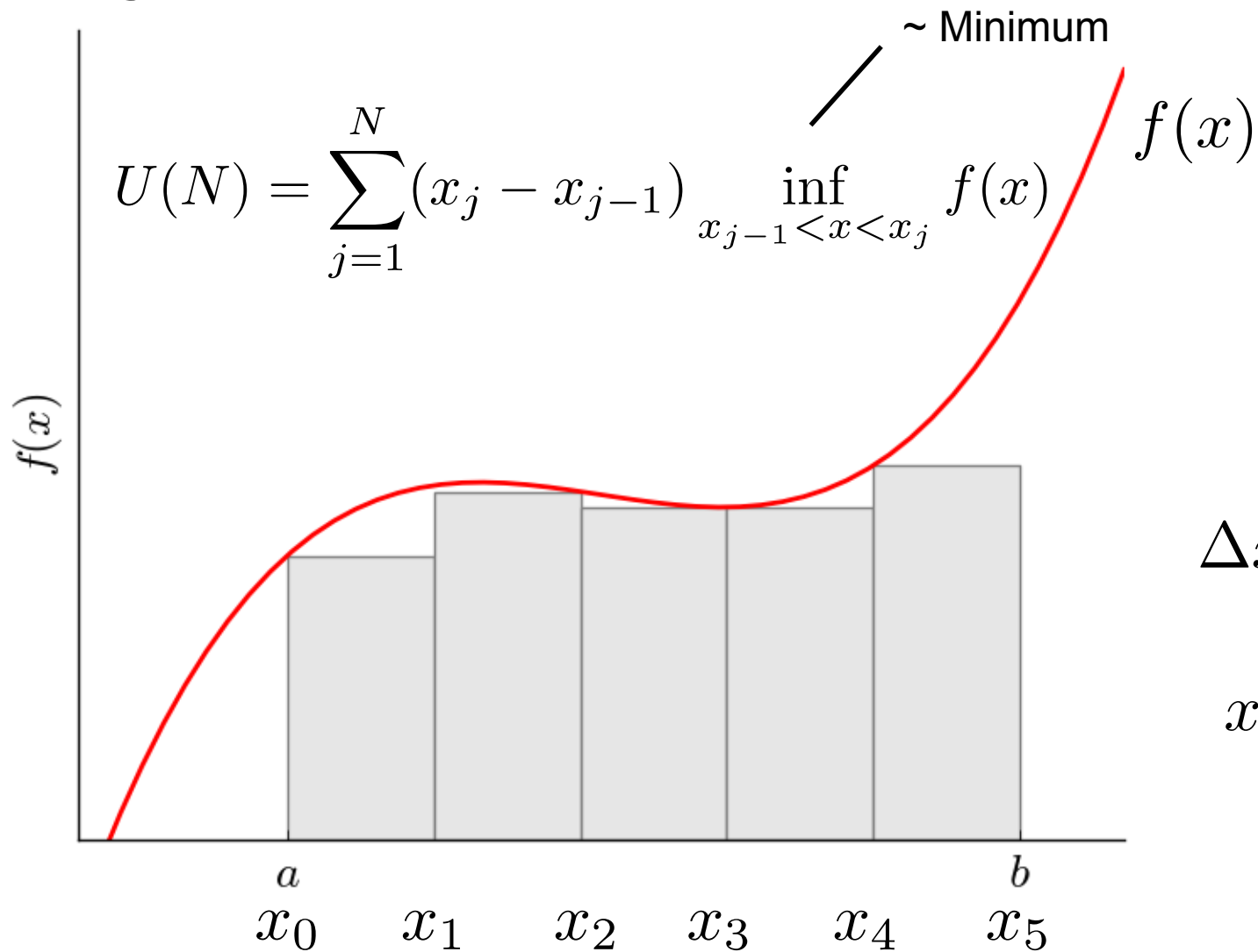
- Allgemein:



$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

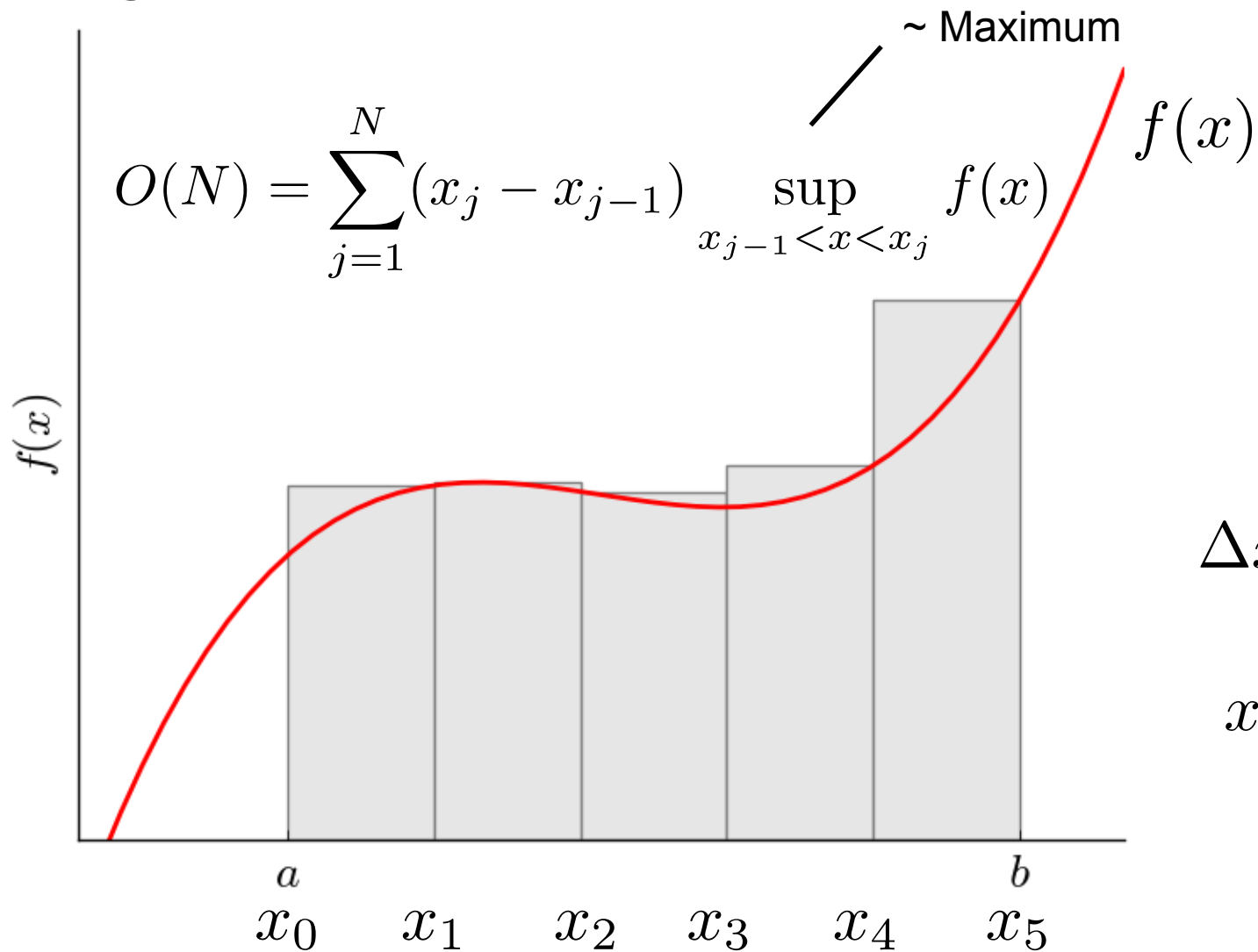
# Das Integral

- Allgemein: Untersumme



# Das Integral

- Allgemein: Obersumme



$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

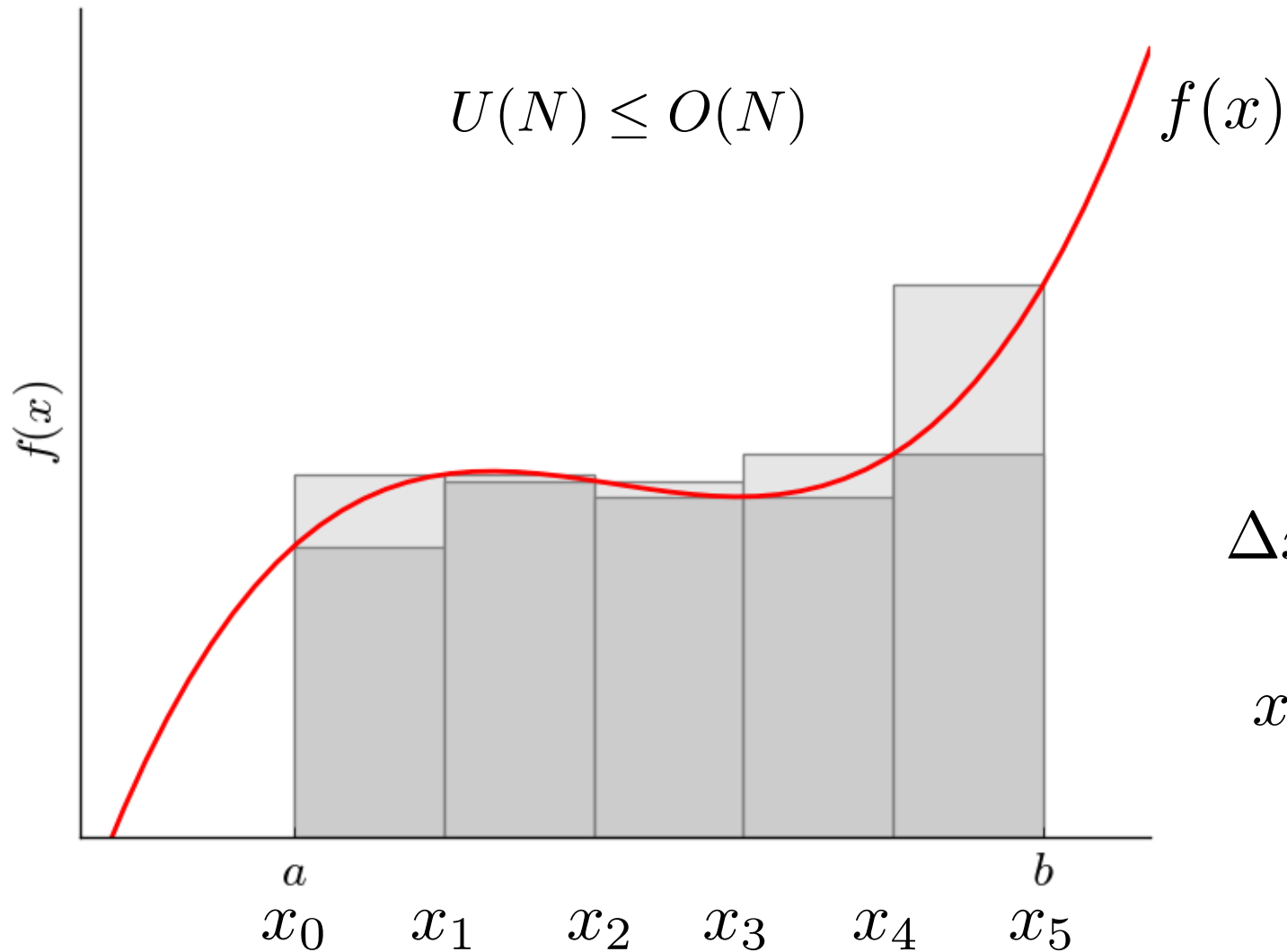
$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$



# Das Integral

- Allgemein:



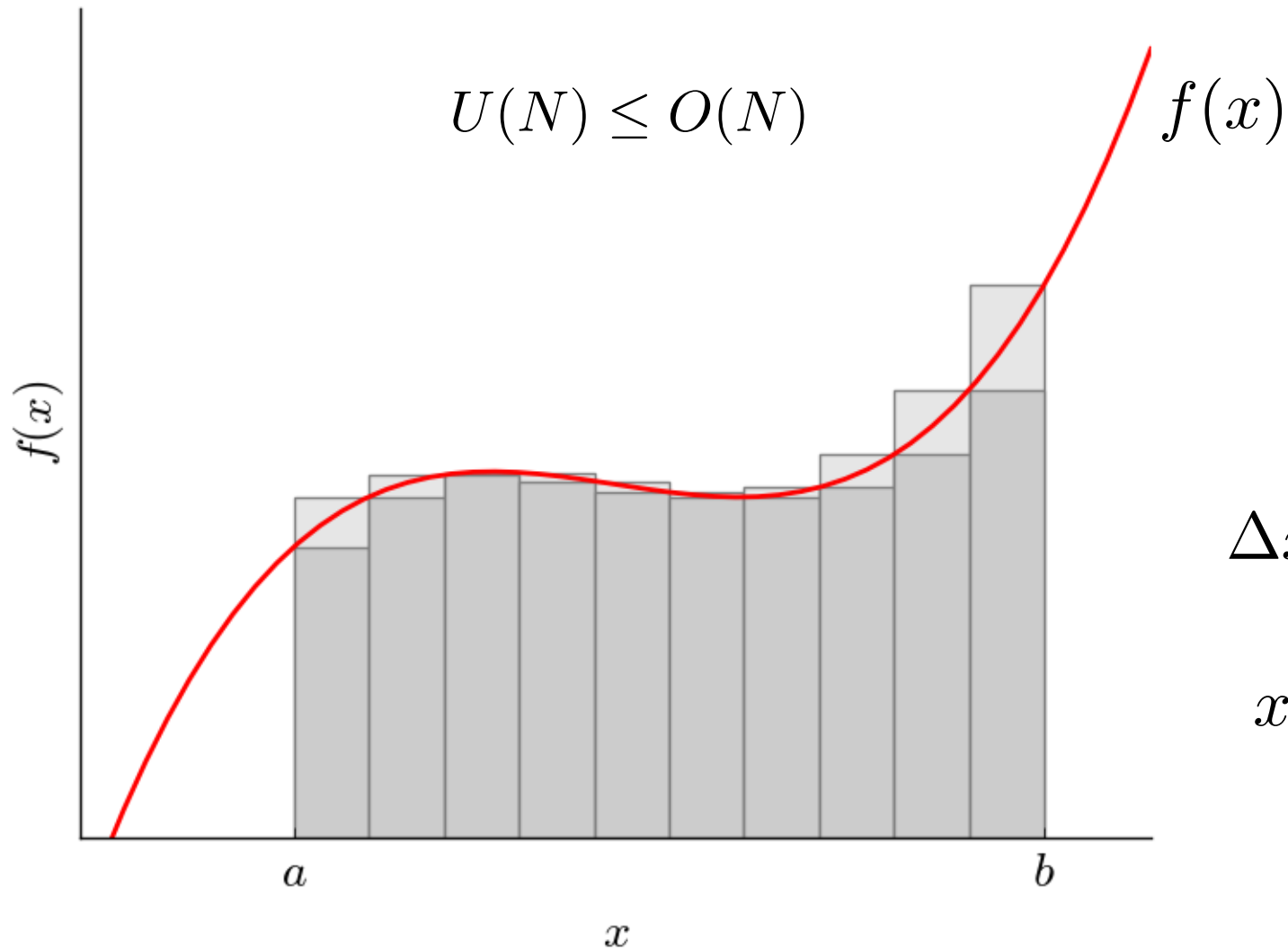
$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

# Das Integral

- Allgemein:



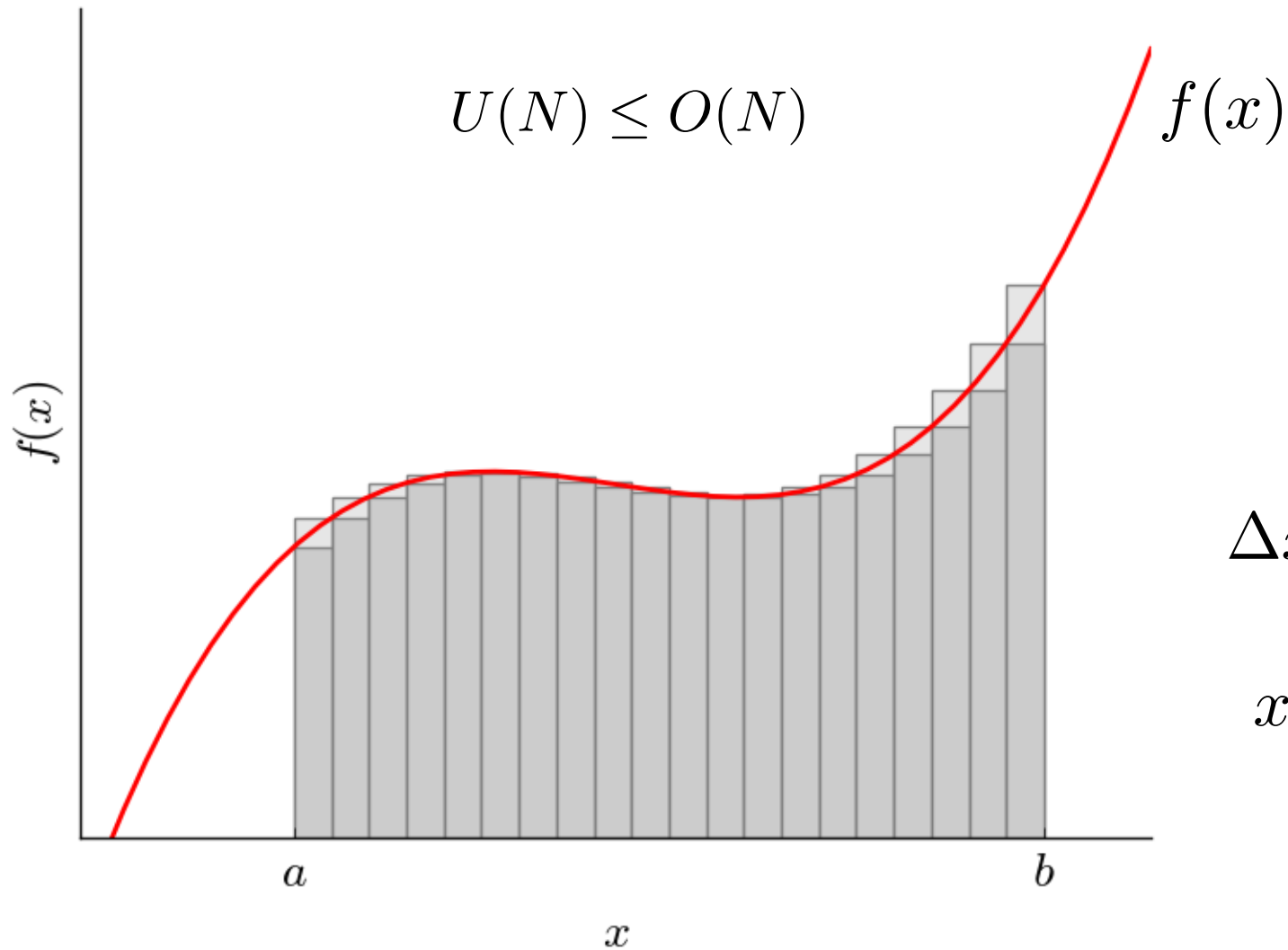
$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

# Das Integral

- Allgemein:



$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

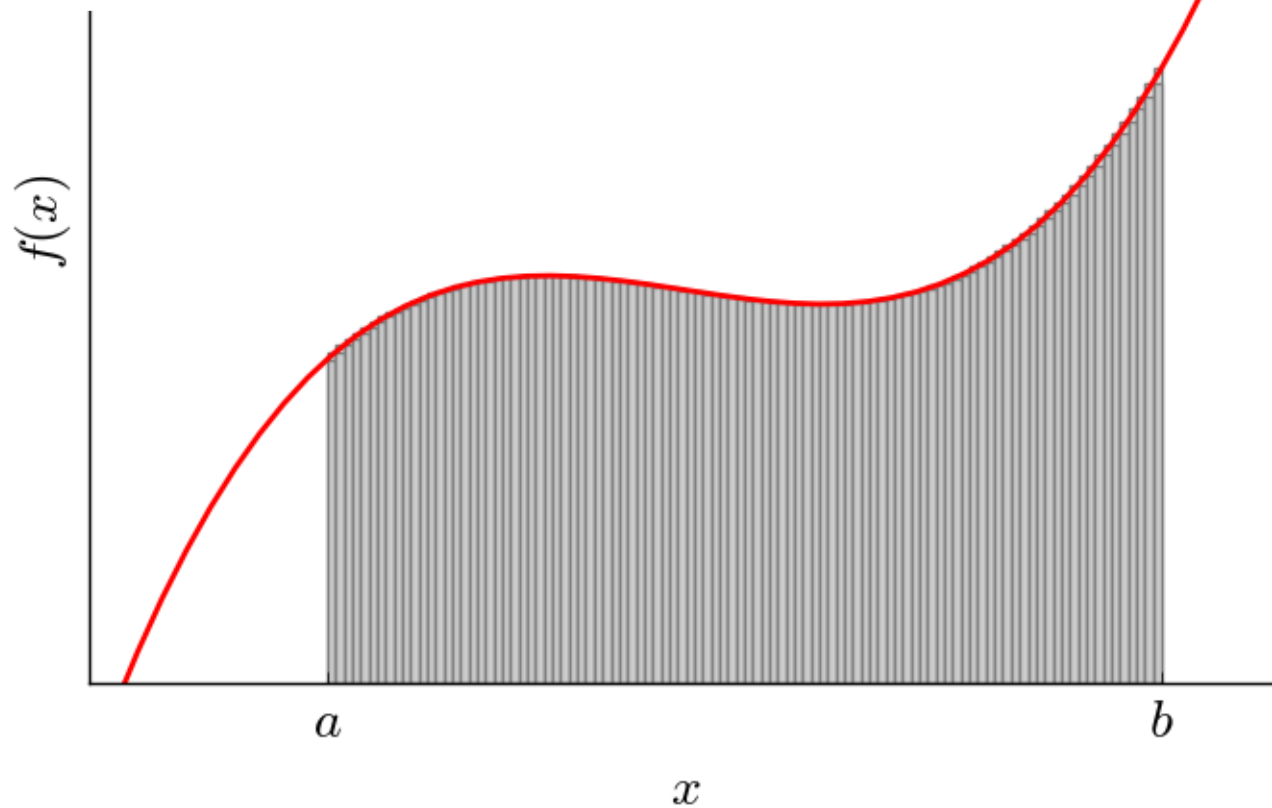
$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

# Das Integral

- Allgemein:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} U(N) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} O(N) = \overline{\int_a^b f(x) dx} \quad f(x)$$



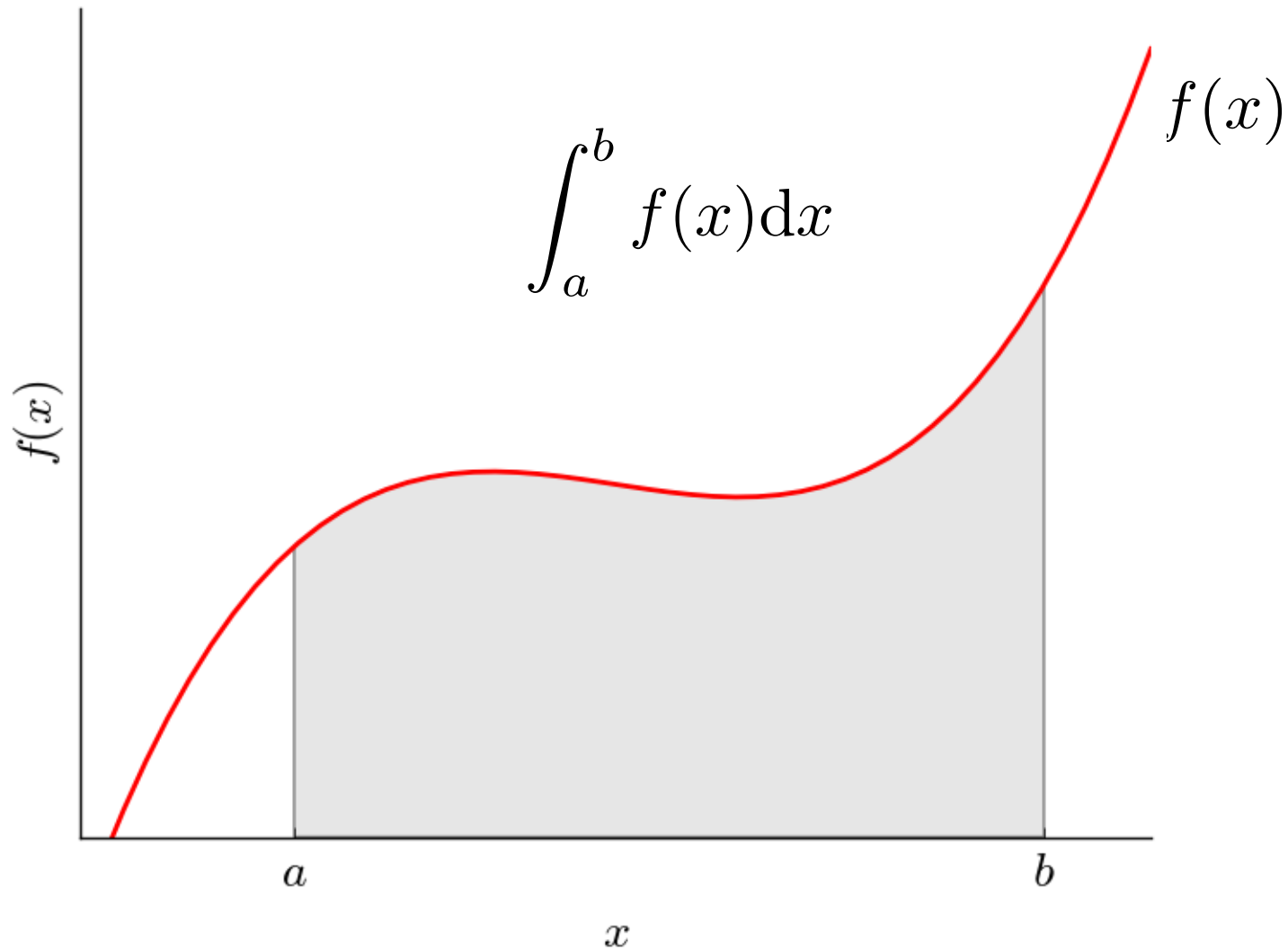
$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

# Das Integral

- Allgemein:



# Zusammenhang

- Stammfunktion

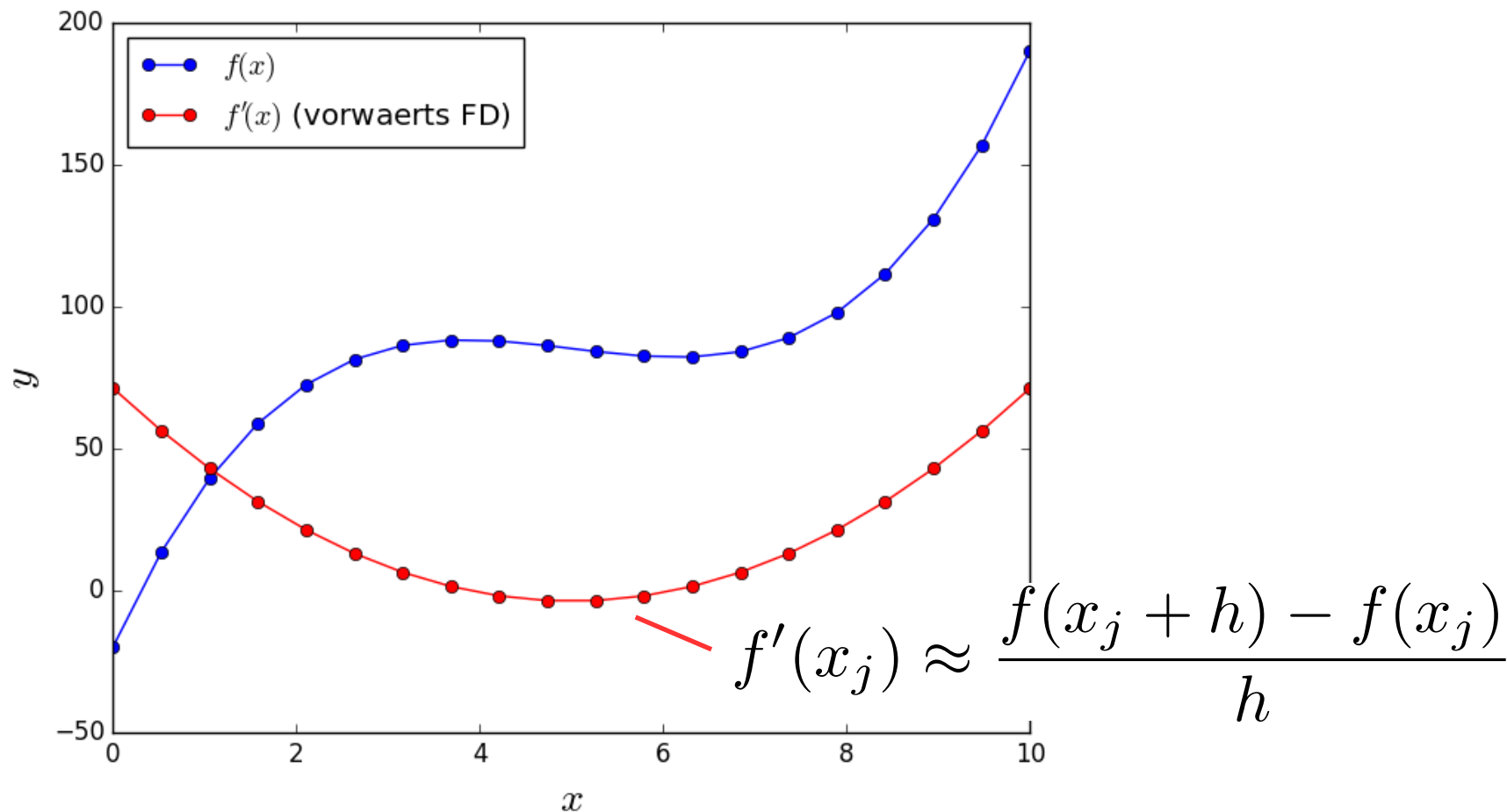
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \longrightarrow \quad F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

- Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

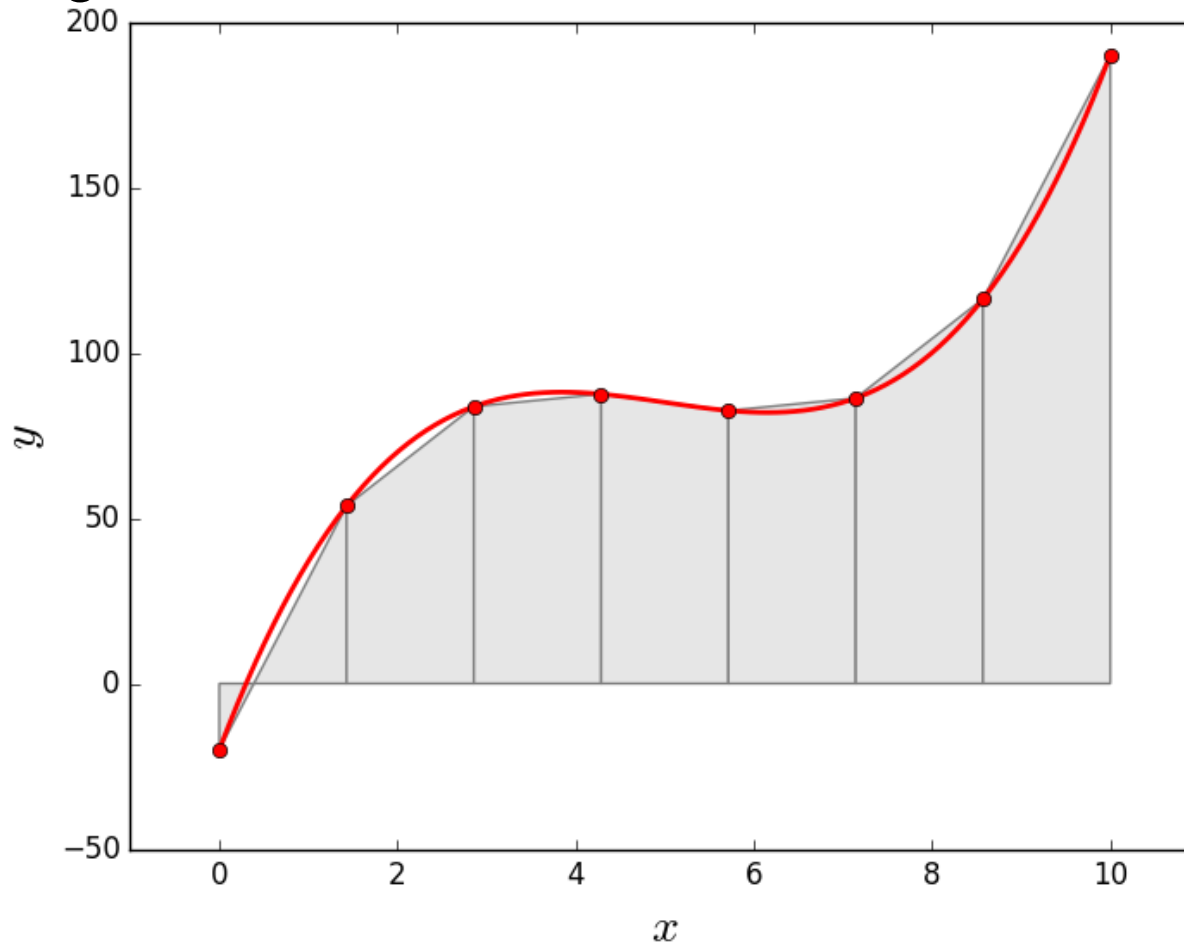
# Numerische Behandlung

- Gegeben:  $f(x) = (x - 3)(x - 5)(x - 7) + 85$
- Berechne eine **Approximation** der Ableitung mit sog. vorwaerts finiten Differenzen in PYTHON



# Numerische Behandlung

- Gegeben:  $f(x) = (x - 3)(x - 5)(x - 7) + 85$
- Berechne eine **Approximation** des Integrals mit der sog. Trapezregel in PYTHON





# Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

- DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}\right)$$

- DGL n-ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$

# Differentialgleichungen

- Beispiele
  - Zweites newtonsches Gesetz (1D)

**Masse**  $m$   $\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x(t))$  **Oft:**  $m\ddot{x} = F(t, x(t))$

**Beschleunigung**  $\frac{d^2x}{dt^2}$  **Kraft**  $F(t, x(t))$

- Radioaktiver Zerfall

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

**Anzahl Atomkerne**  $y$

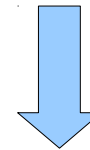
**Zerfallskonstante**  $\lambda$

# Projekt 1

- Wurf mit Luftwiderstand

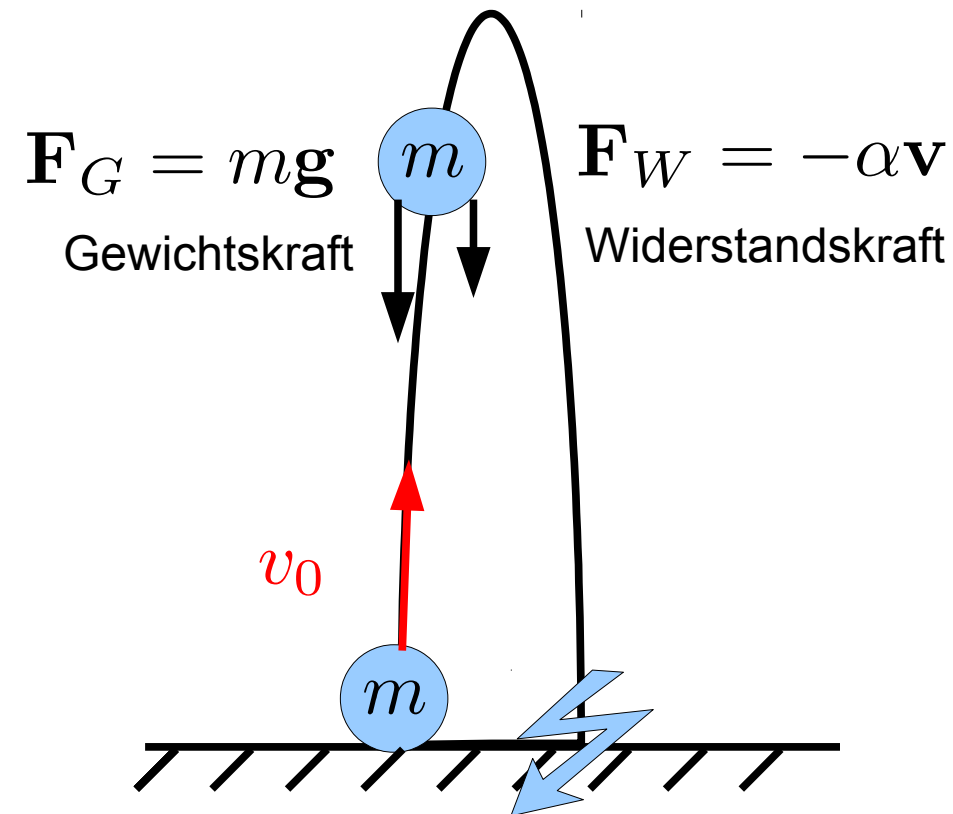
$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$



$$m\dot{v} = -mg - \alpha v$$

$$\dot{x} = v$$

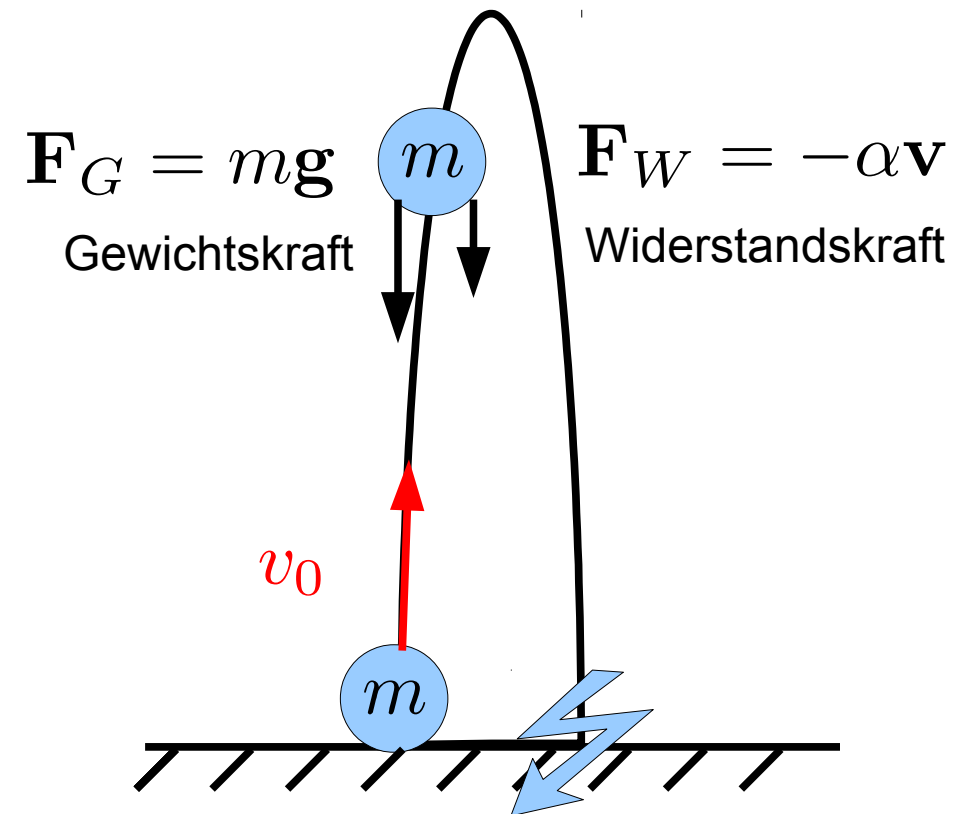


# Projekt 1

- Wurf mit Luftwiderstand

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$



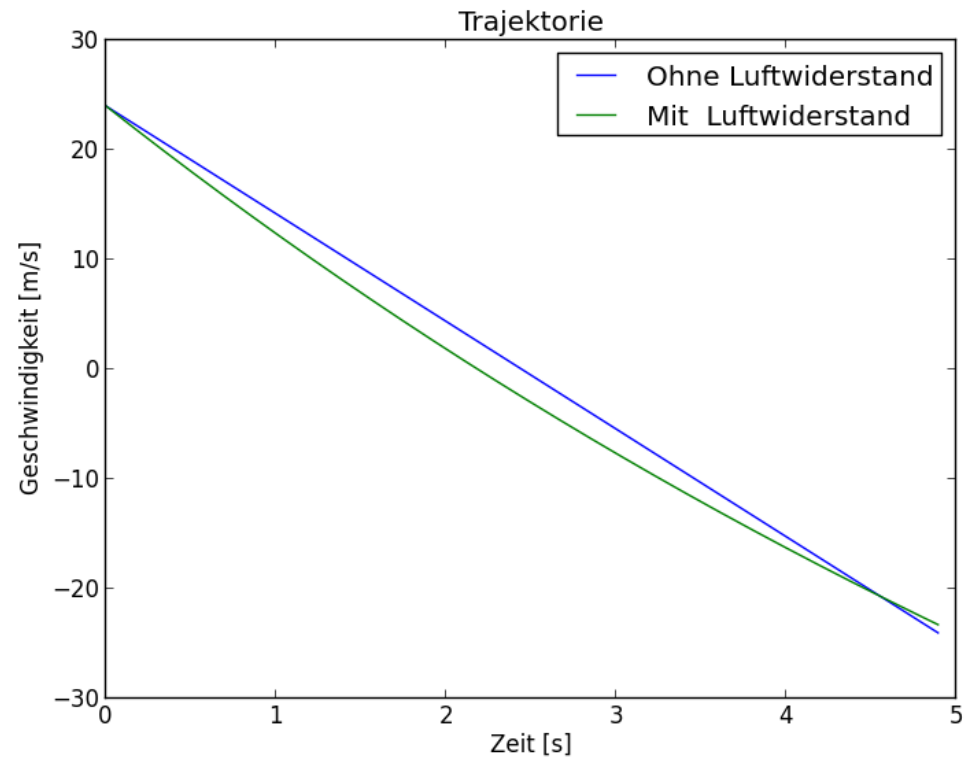
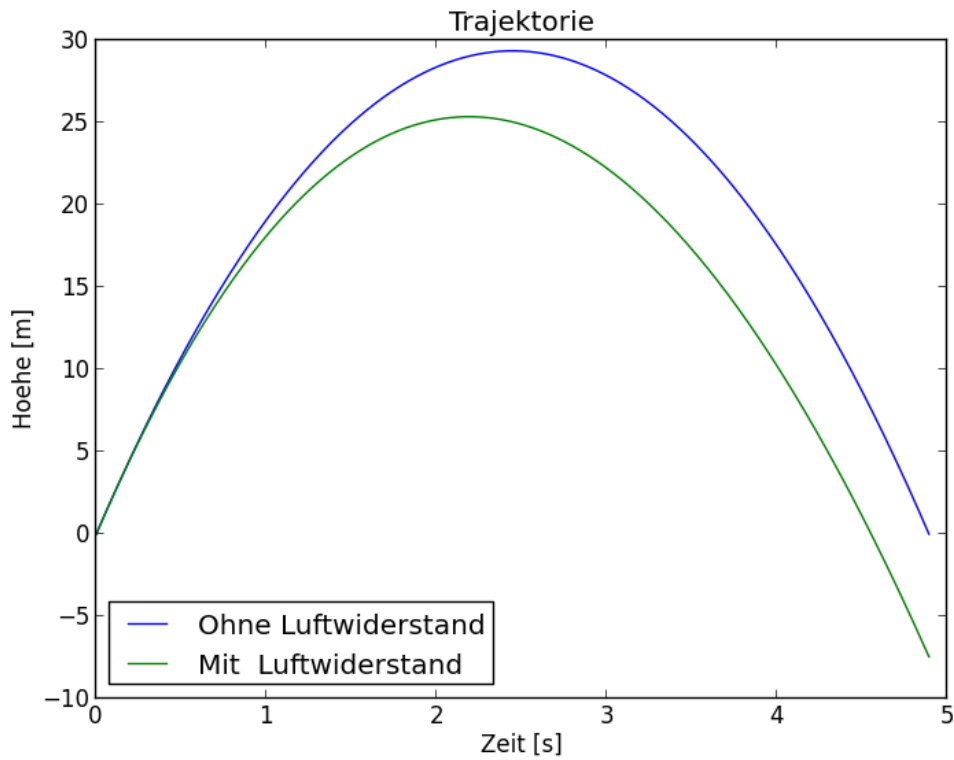
$$m \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = -mg - \alpha v^n$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = v^n$$

$$\Delta t = \frac{t_E - t_S}{N}$$

# Projekt 1

- Wurf mit Luftwiderstand



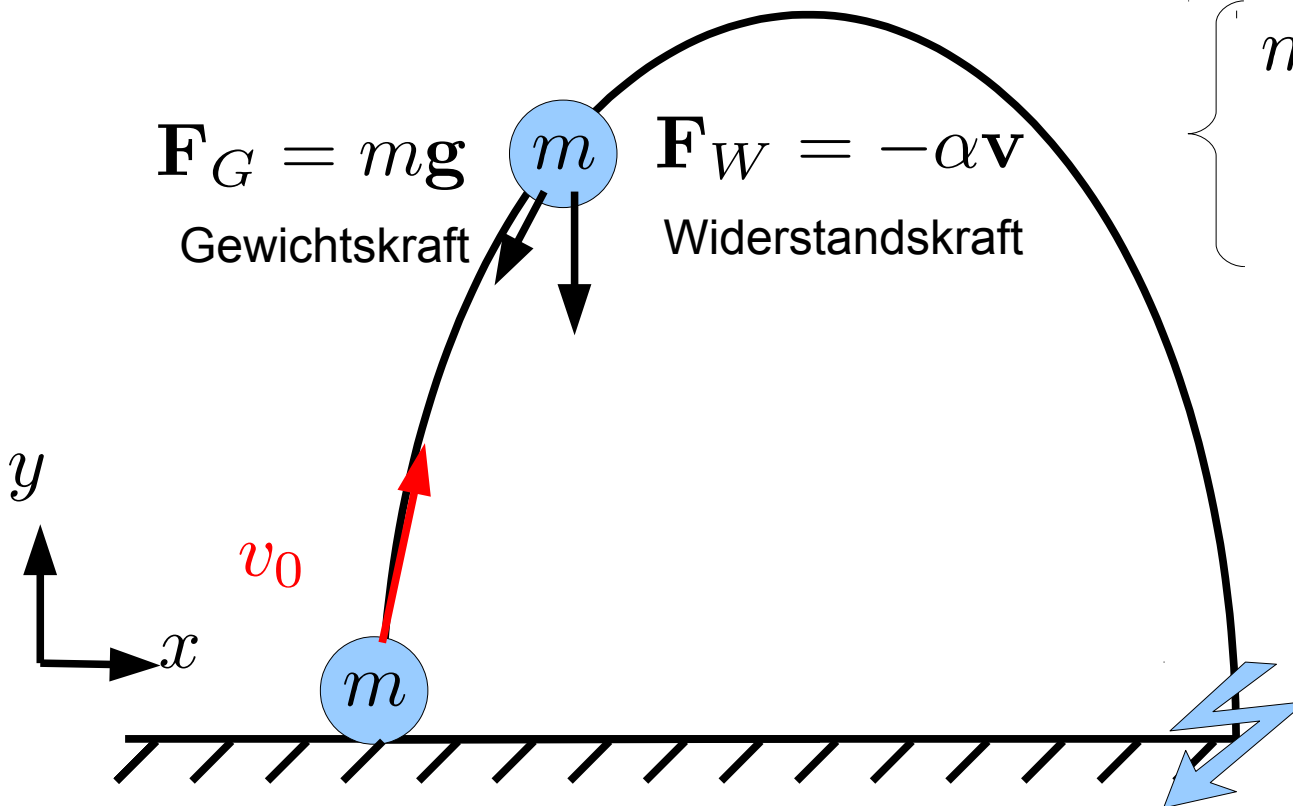
# Projekt 1+

- Wurf mit Luftwiderstand

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

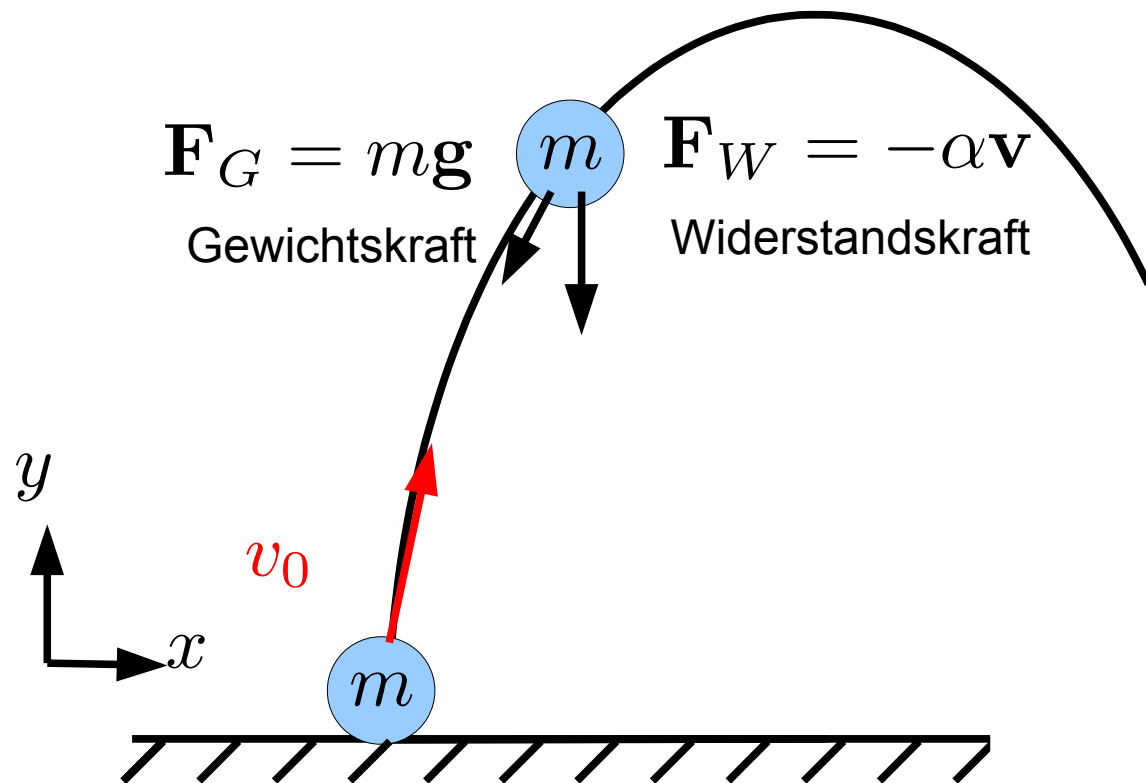
$$\left\{ \begin{array}{l} m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_x \\ m\dot{v}_x = -\alpha v_x \\ \dot{y} = v_y \\ m\dot{v}_y = -mg - \alpha v_y \end{array} \right.$$



# Projekt 1+

- Wurf mit Luftwiderstand



$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = v_x^n$$

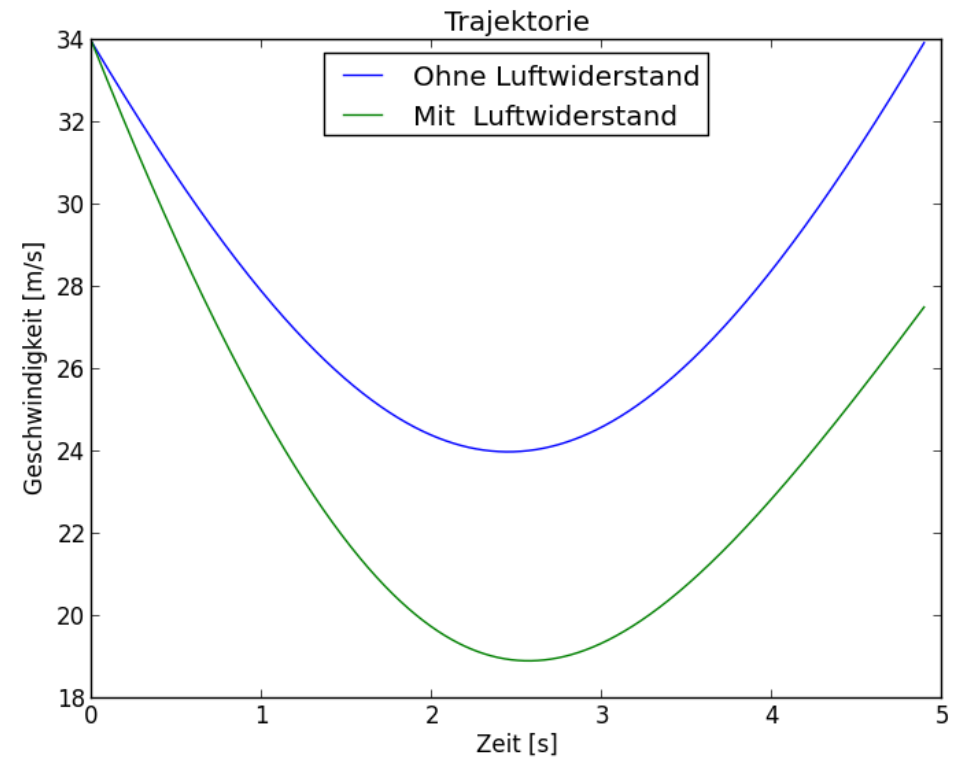
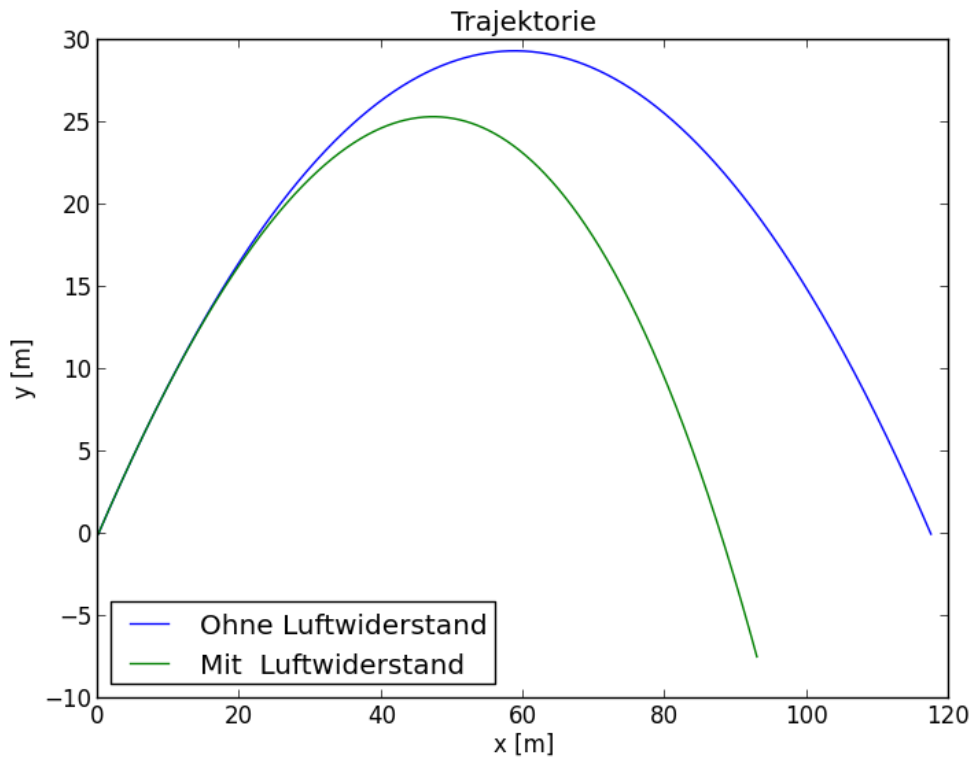
$$\frac{v_x^{n+1} - v_x^n}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{m} v_x^n$$

$$\frac{v_y^{n+1} - v_y^n}{\Delta t} = -g - \frac{\alpha}{m} v_y^n$$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = v_y^n$$

# Projekt 1+

- Wurf mit Luftwiderstand





# Projekt 1++

- Wurf mit Luftwiderstand: Bestimme Anfangsgeschwindigkeit so dass das Projektil das Auto trifft!

