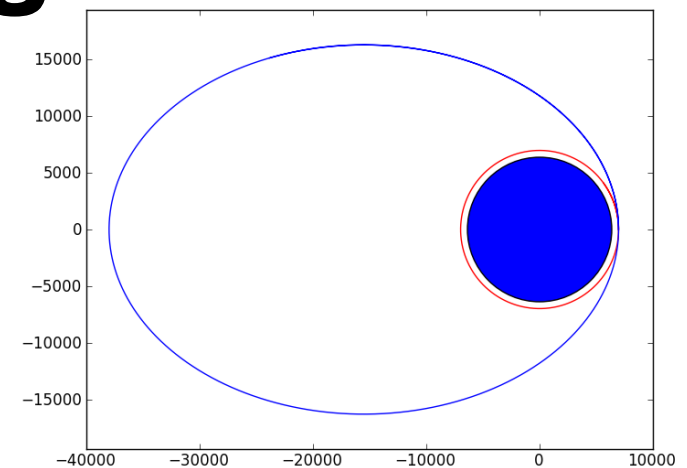
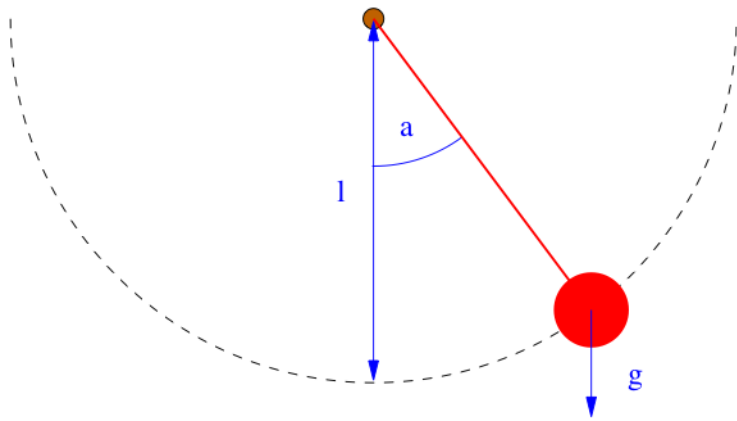


ETHZ Studienwoche 2016

Differentialgleichungen oder wie beschreibt man Veränderung



Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

- DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}\right)$$

- DGL n-ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$

Explizite form

Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

- DGL zweiter Ordnung

$$f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

- DGL n-ter Ordnung

$$f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0$$

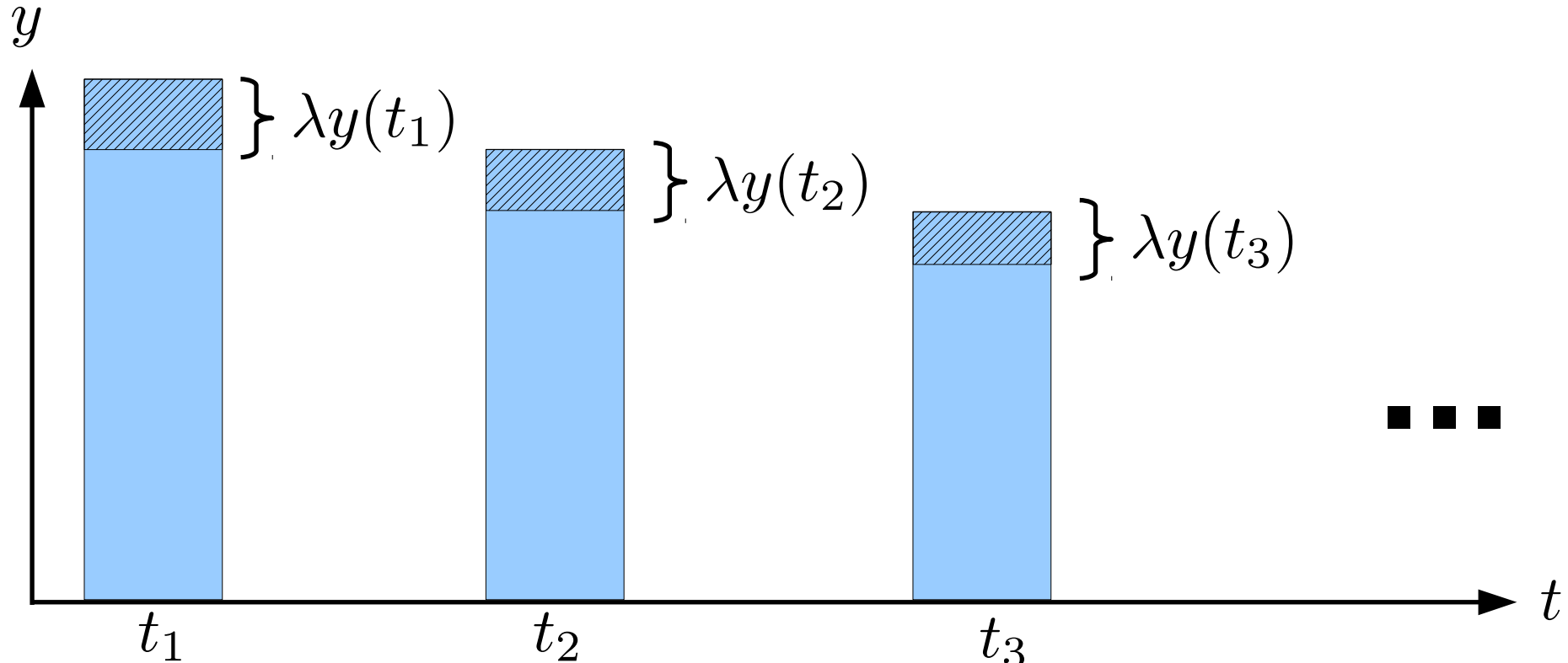
Implizite form

Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$

y **Anzahl Atomkerne/Stoffmenge**

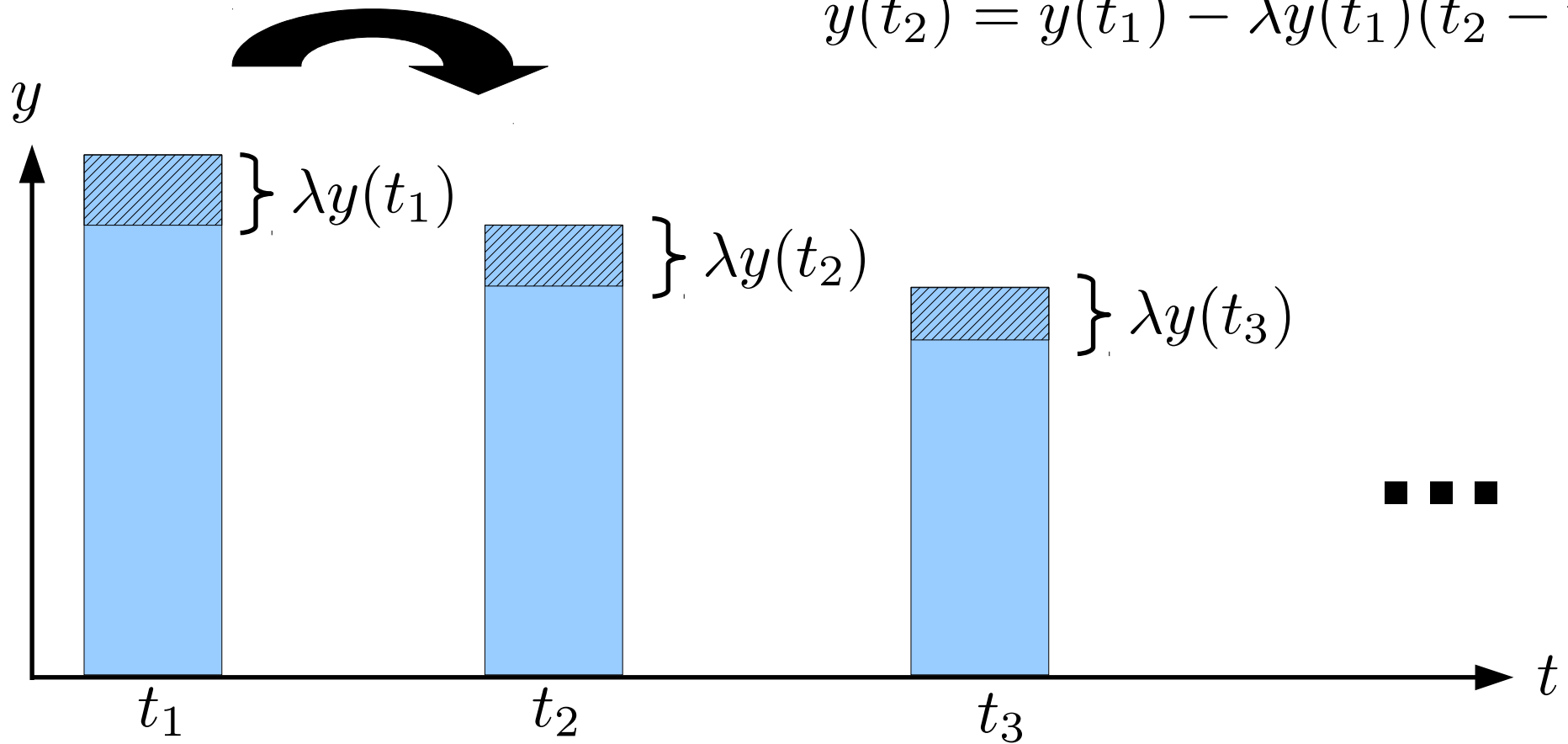
λ **Zerfallskonstante**



Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y \quad \lambda < 0$

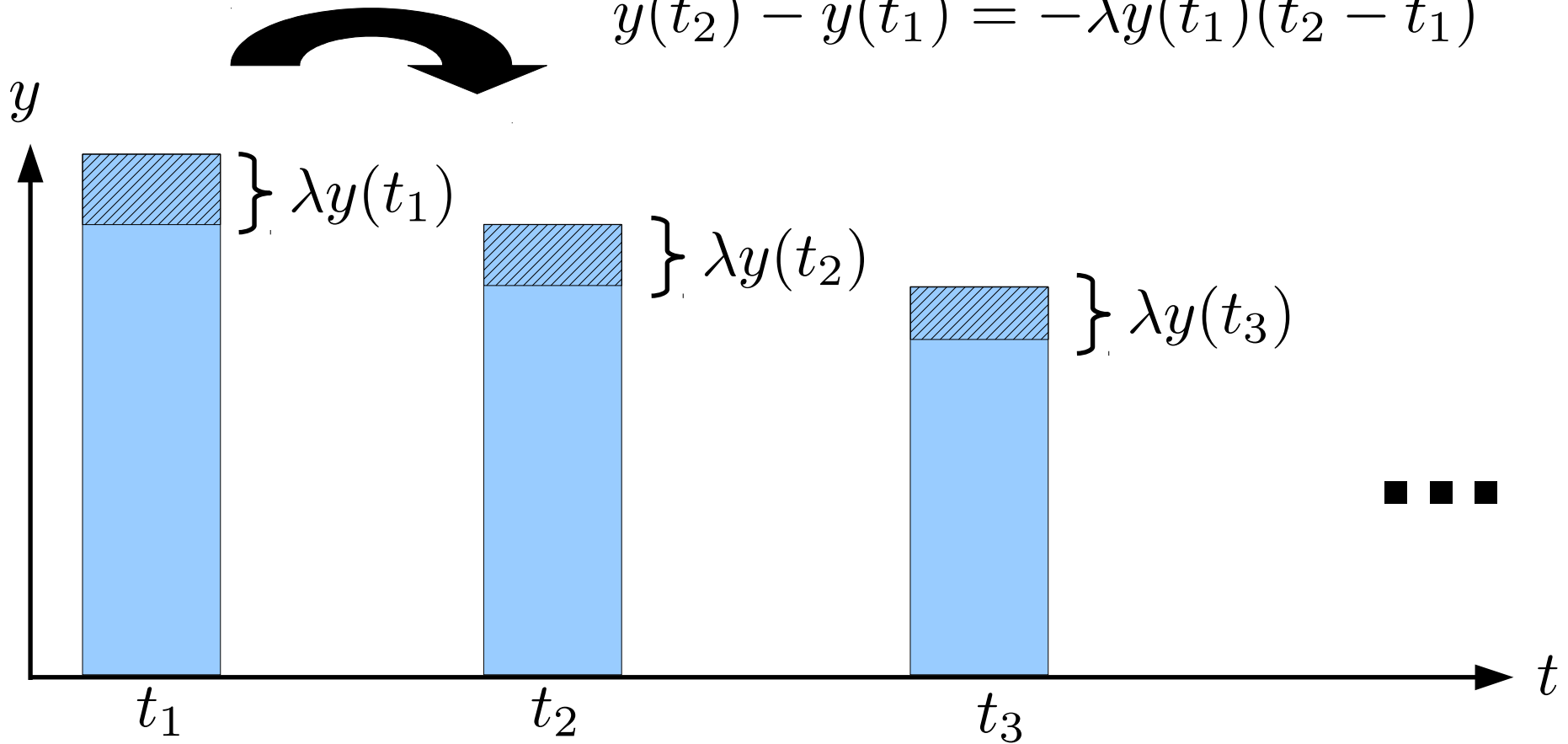
$$y(t_2) = y(t_1) - \lambda y(t_1)(t_2 - t_1)$$



Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$

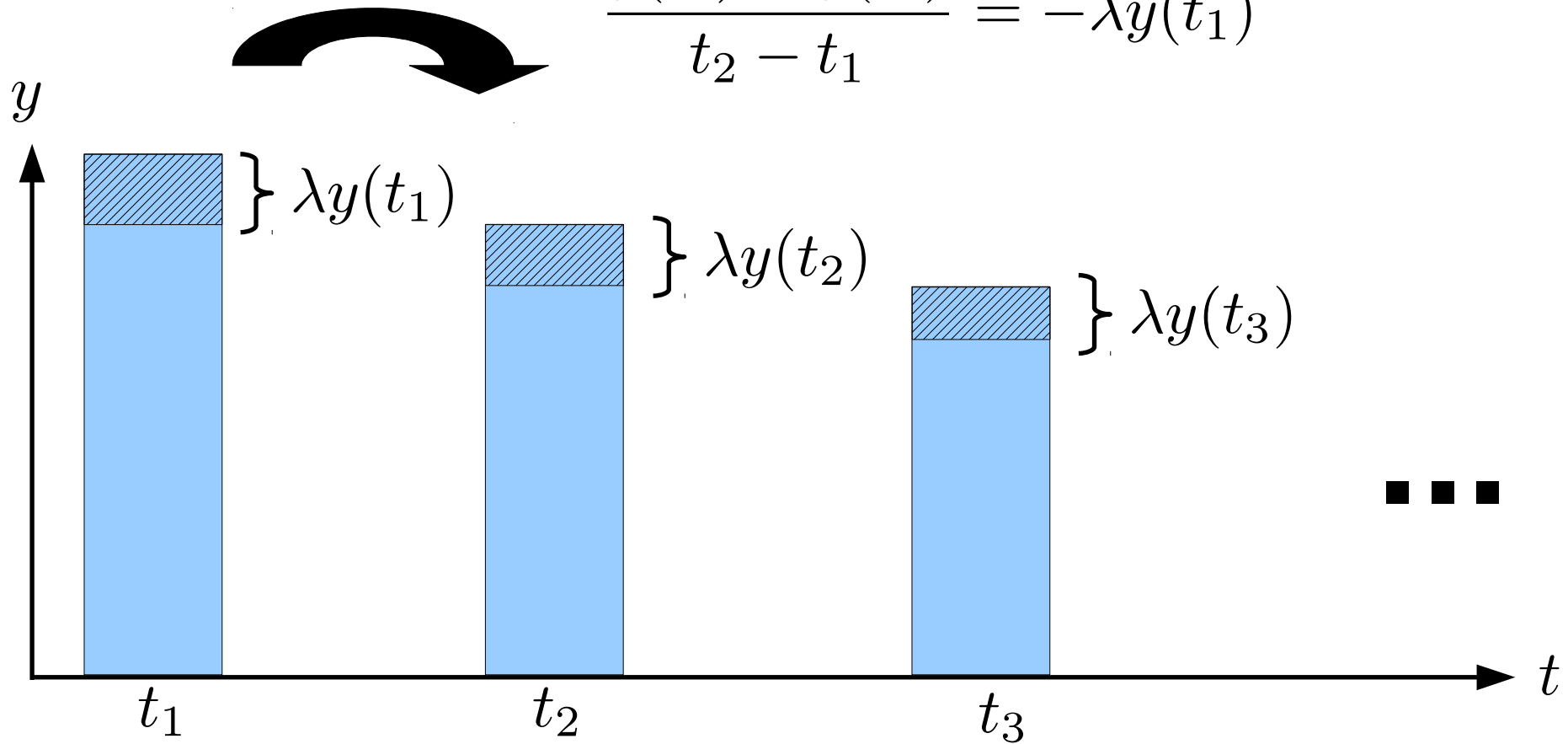
$$y(t_2) - y(t_1) = -\lambda y(t_1)(t_2 - t_1)$$



Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$

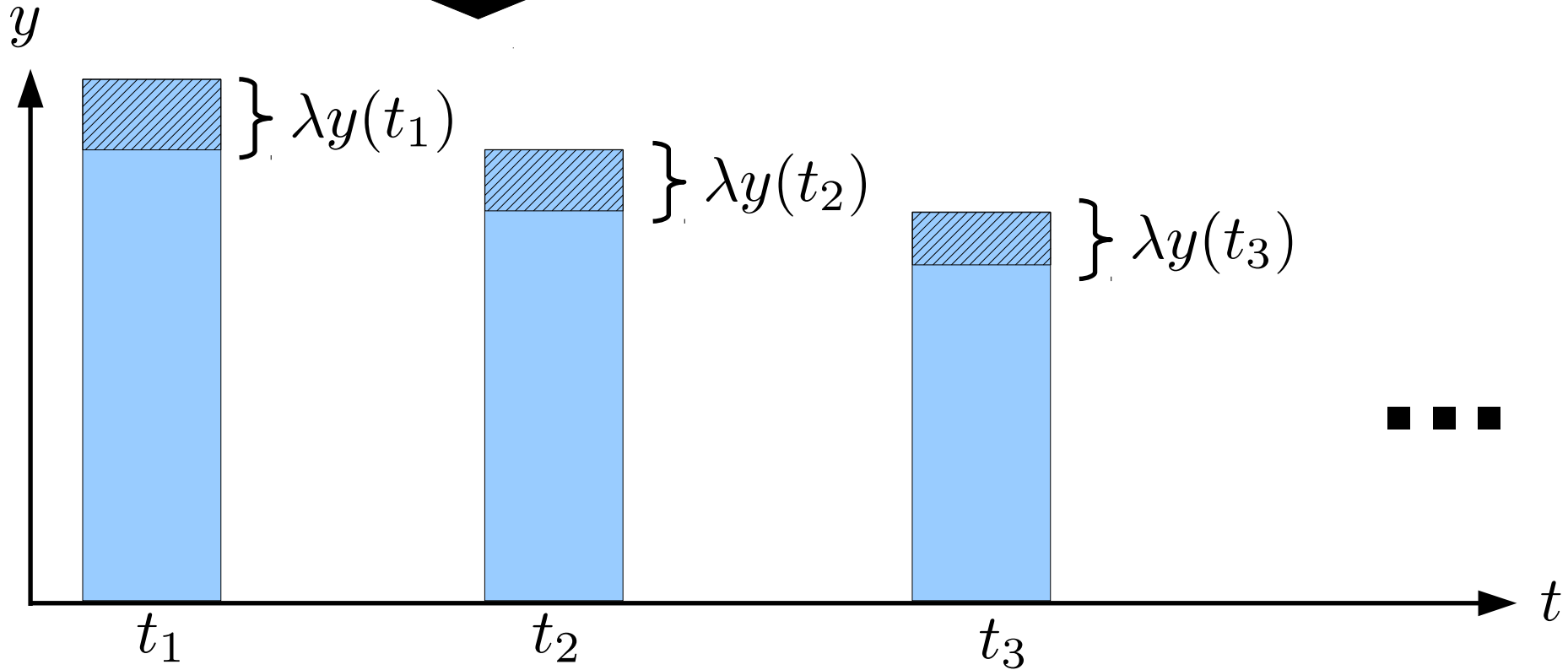
$$\frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = -\lambda y(t_1)$$



Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$

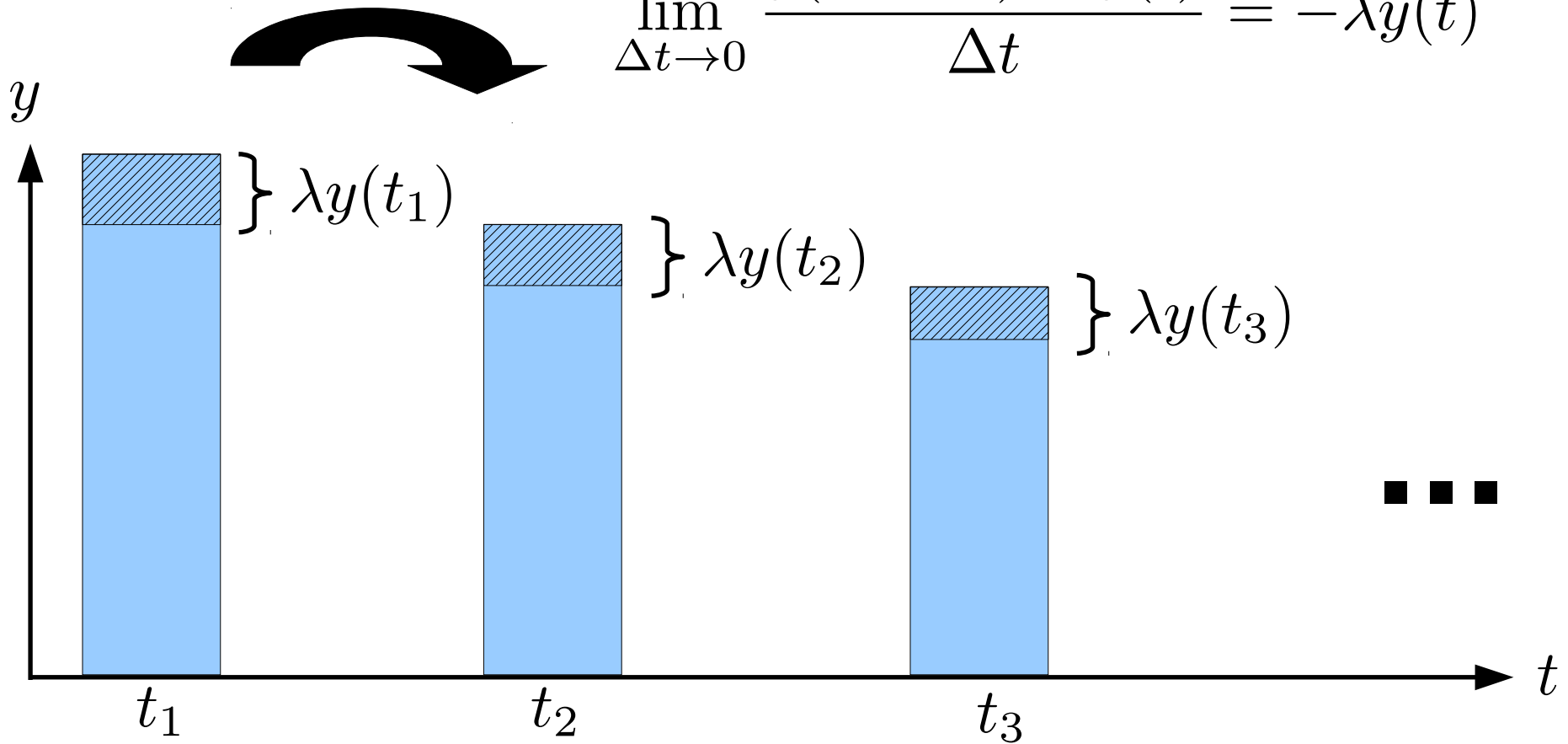
Setze $t = t_1$
 $\Delta t = t_2 - t_1$ \rightarrow $\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\lambda y(t)$



Radioaktiver Zerfall

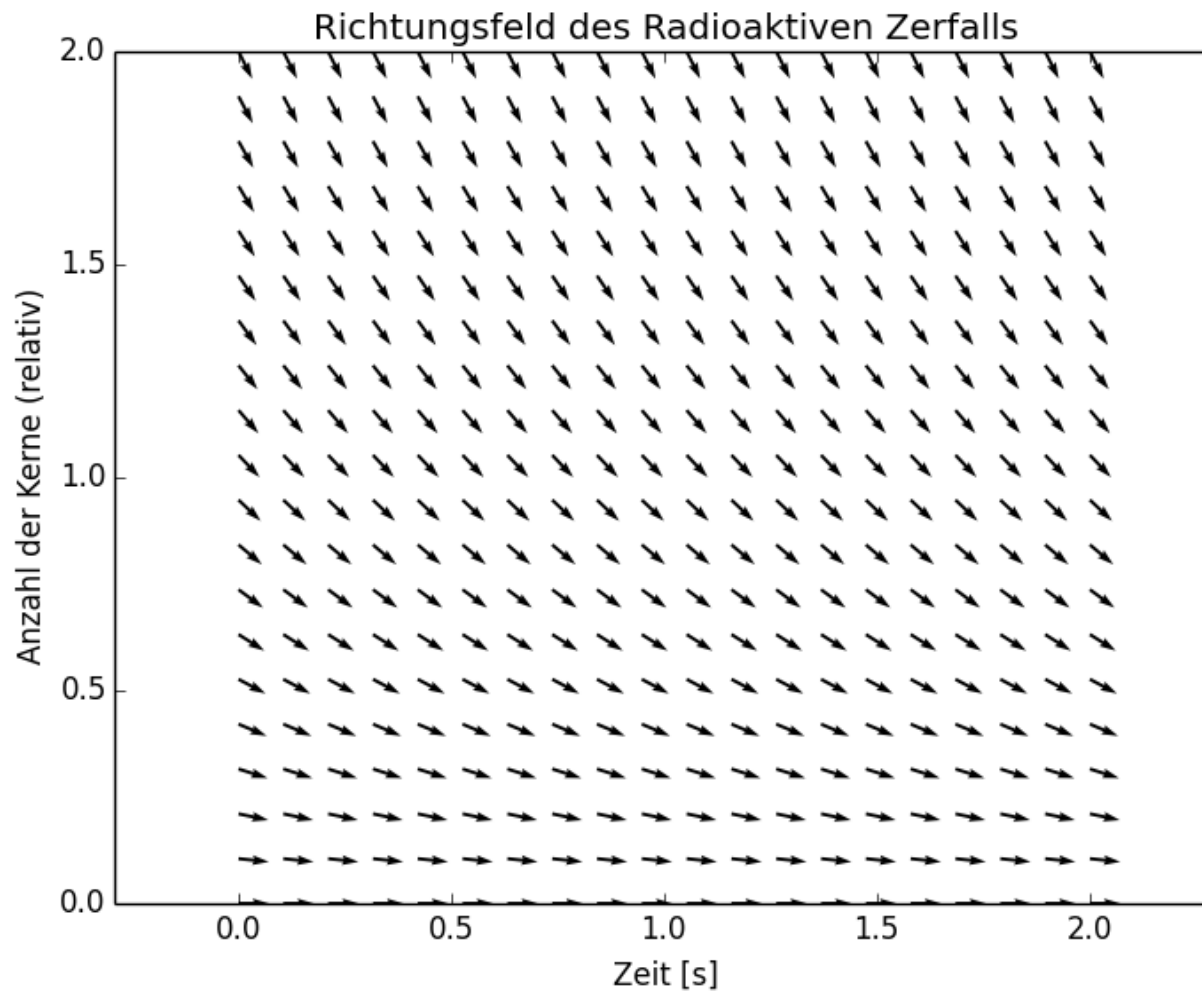
- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\lambda y(t)$$



Radioaktiver Zerfall

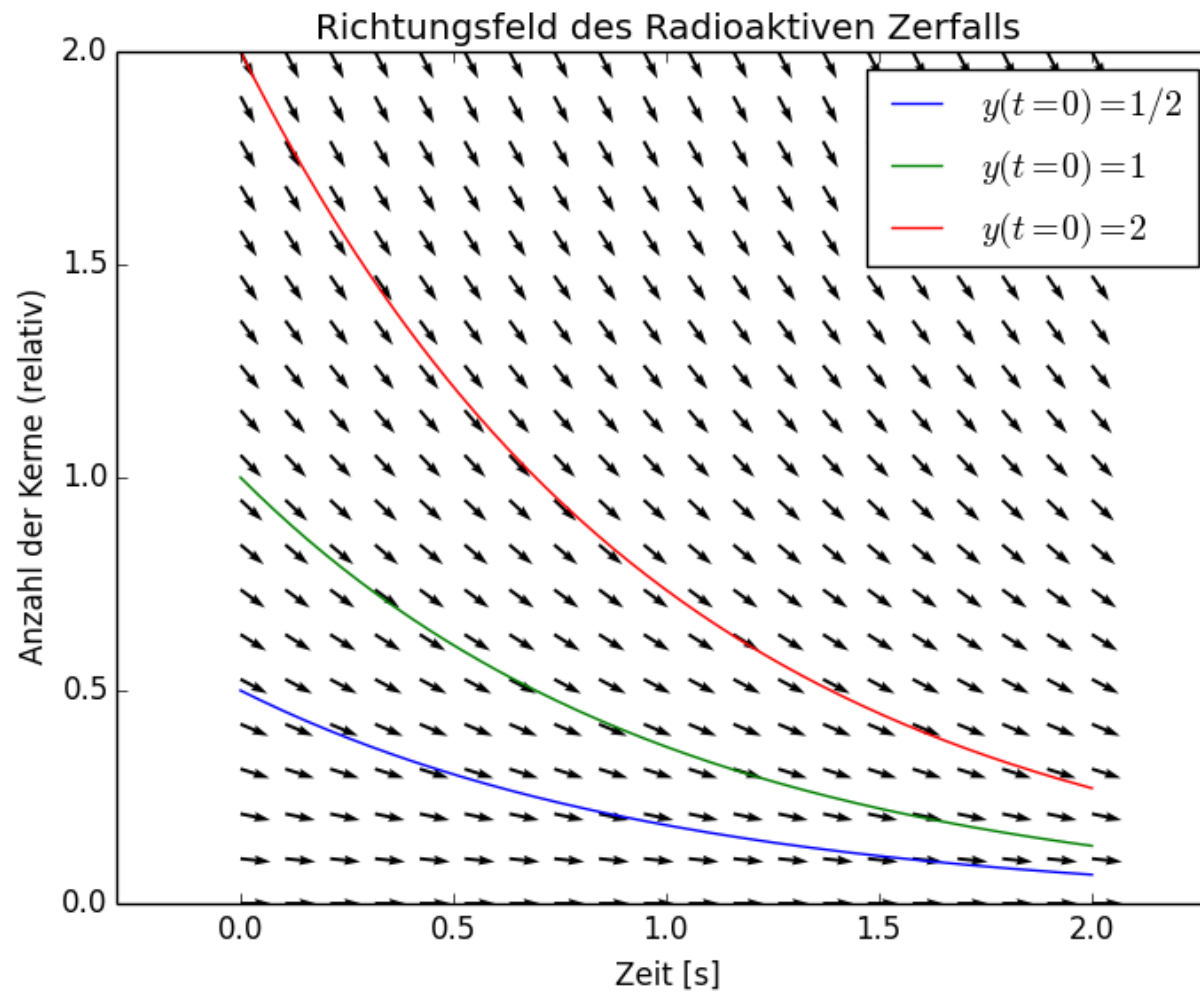
- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$



$$\lambda = -1$$

Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$



$$\lambda = -1$$

Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y$$

“ $\times dt$ ” $\times \frac{1}{y}$

$$\frac{dy}{y} = \lambda dt$$

$\int_{y_0}^y$ $\int_{t_0}^t$

$$[\ln(y)]_{y_0}^y = [\lambda t]_{t_0}^t$$

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \lambda(t - t_0)$$

exp()

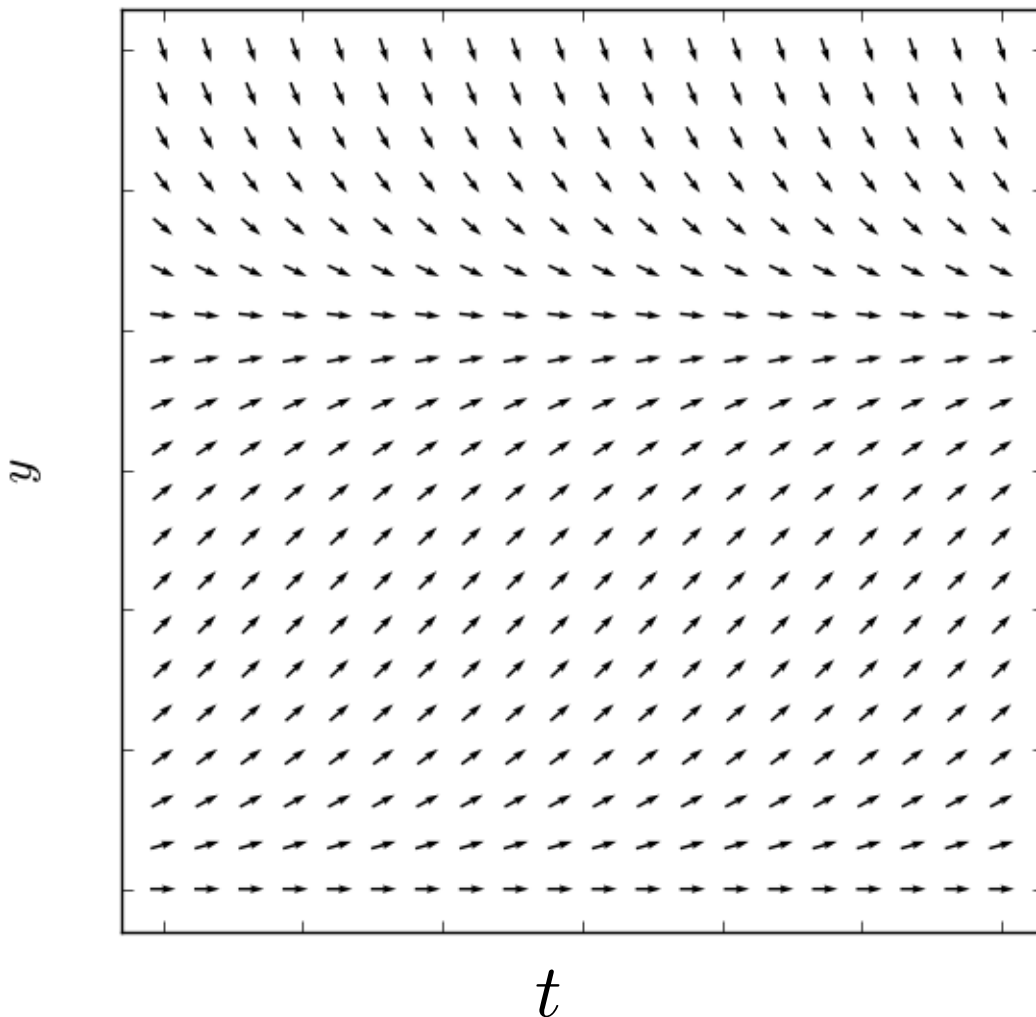
$$\frac{y}{y_0} = e^{\lambda(t-t_0)}$$

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

Logistische Differentialgleichung

- Populationswachstum

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y - \sigma y^2$$



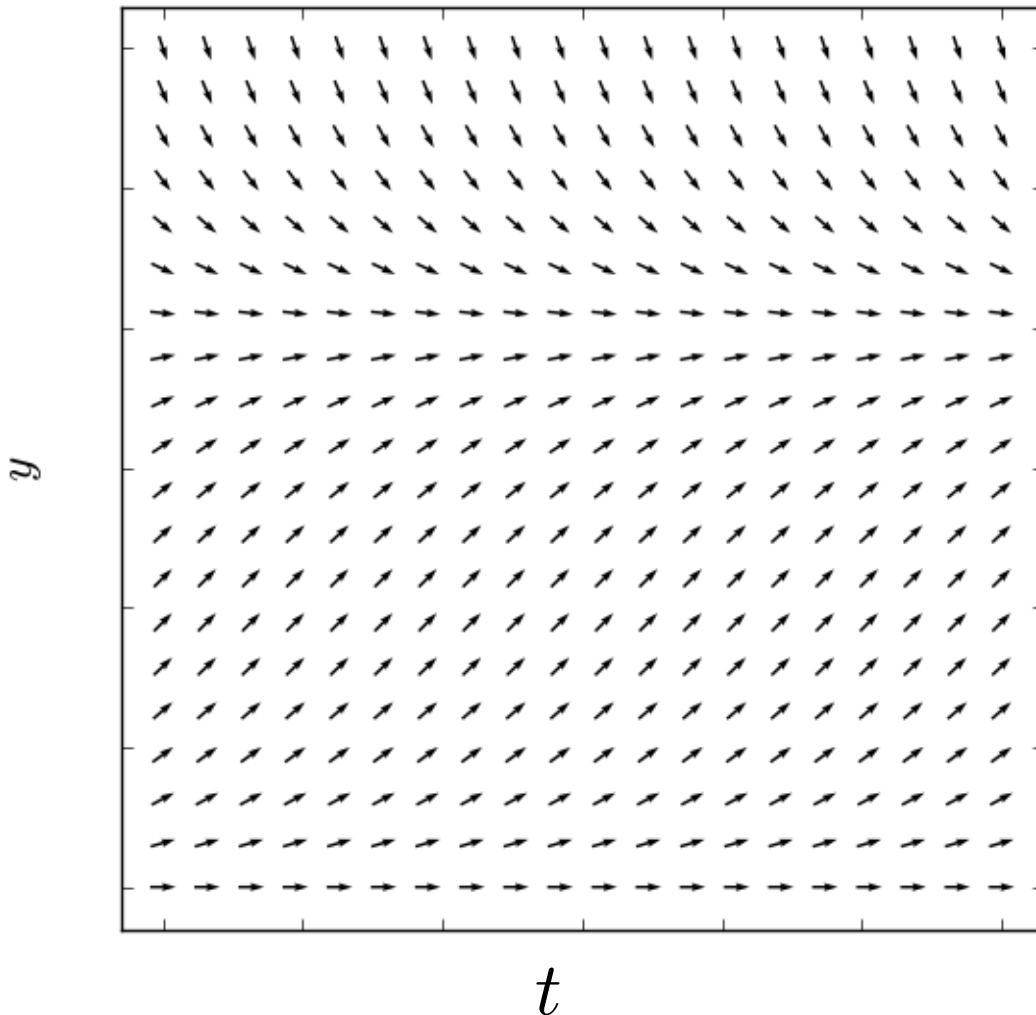
?

y ... Population
 γ ... Geburtsrate
 σ ... Sterberate

Logistische Differentialgleichung

- Populationswachstum

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y - \sigma y^2$$



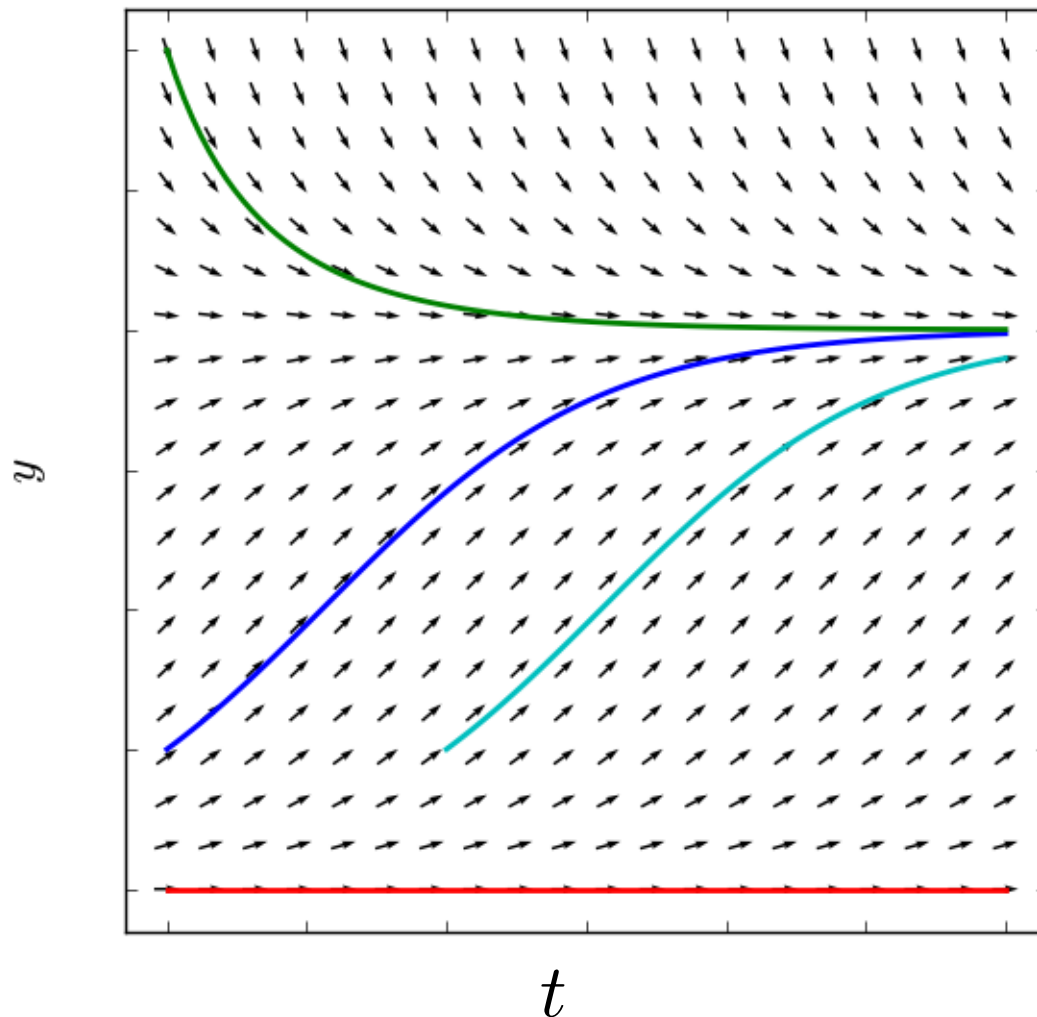
$$y = \frac{\gamma}{\sigma}$$

- y ... Population
- γ ... Geburtsrate
- σ ... Sterberate

Logistische Differentialgleichung

- Populationswachstum

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y - \sigma y^2$$



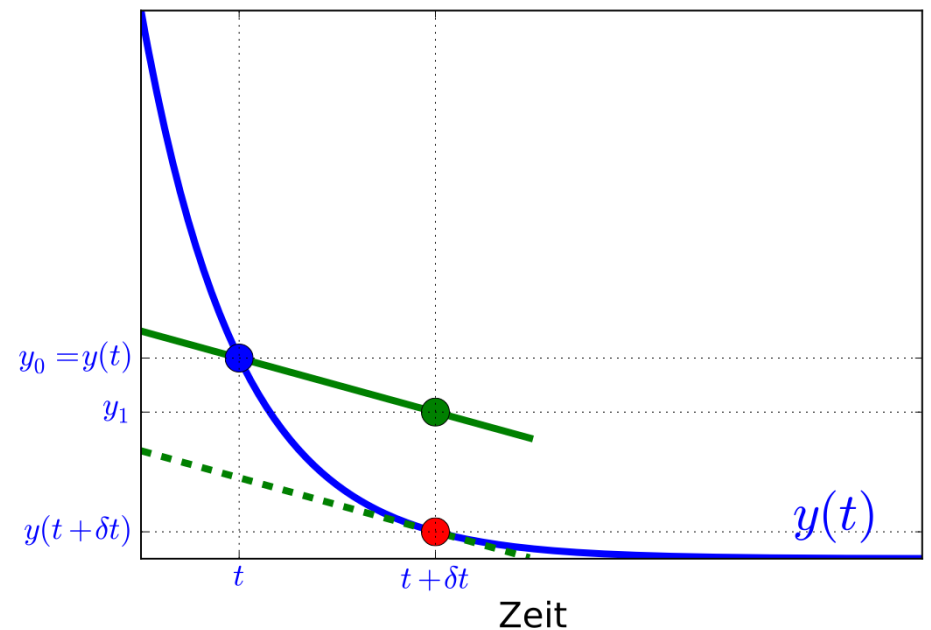
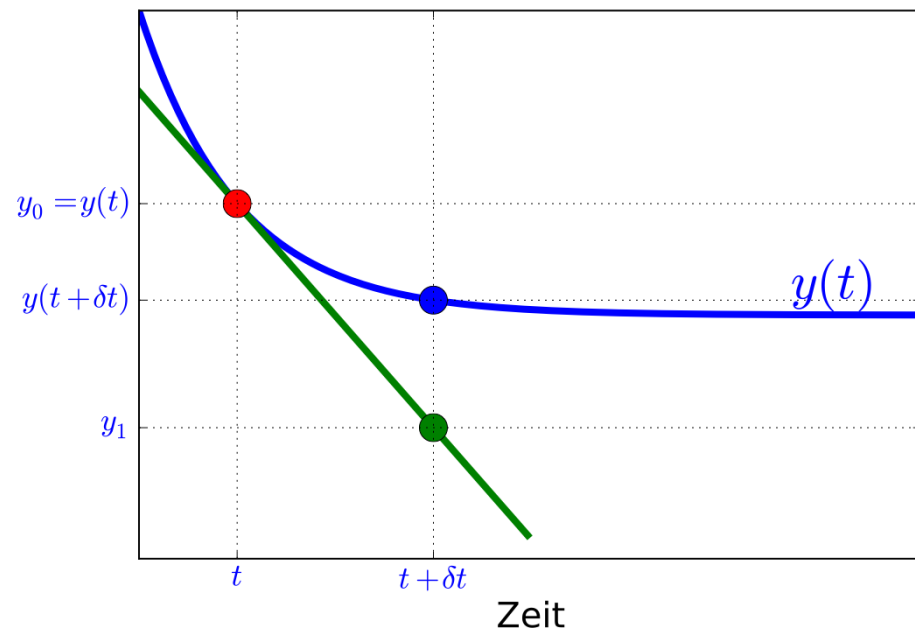
$$y = \frac{\gamma}{\sigma}$$

- y ... Population
- γ ... Geburtsrate
- σ ... Sterberate

Euler Verfahren

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y \quad \lambda < 0$

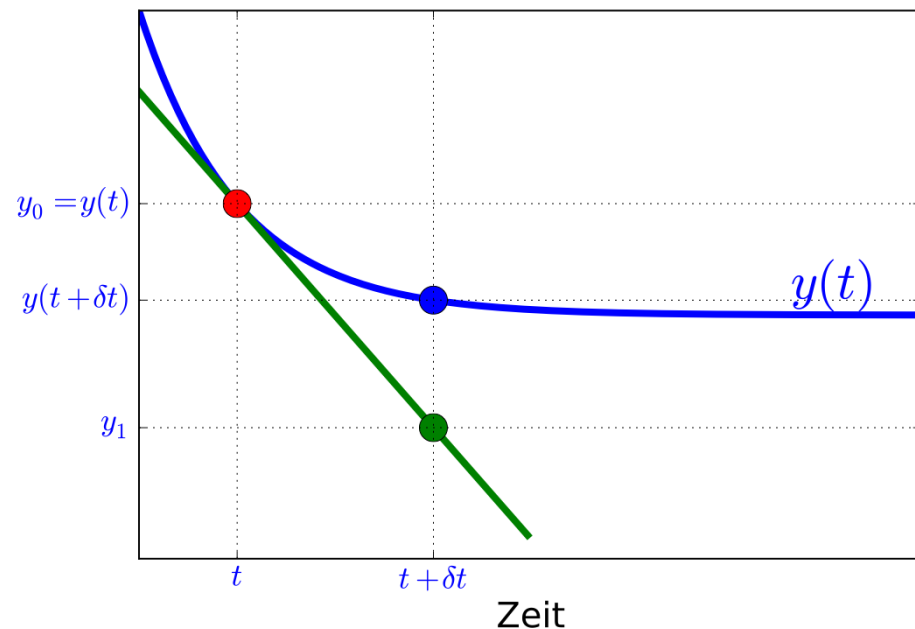
$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \lambda y(?)$$



Euler Verfahren: Explizit

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y \quad \lambda < 0$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \lambda y(t)$$



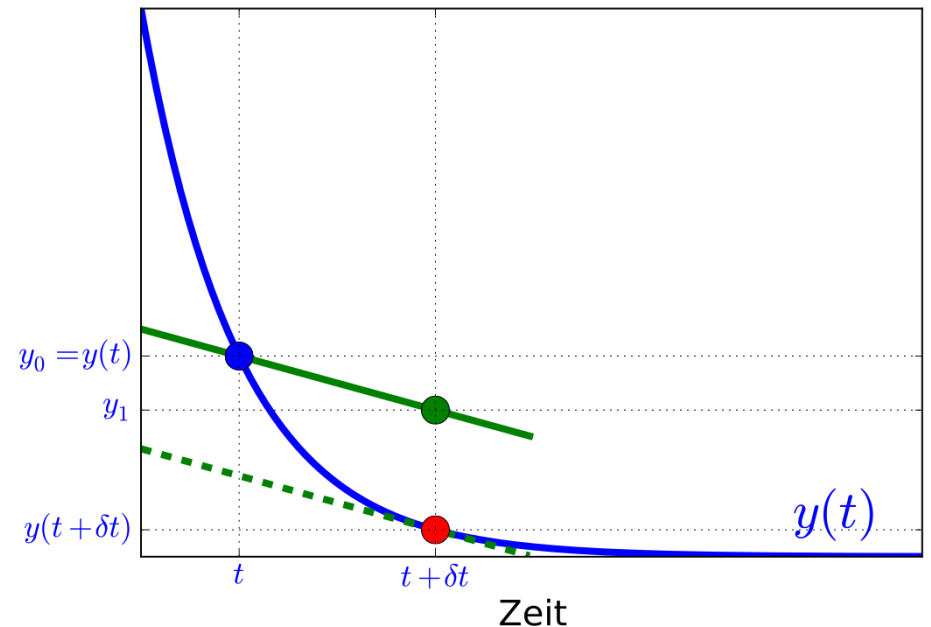
$$y(t + \Delta t) \approx (1 + \Delta t \lambda) y(t) := y_1$$

Euler Verfahren: Implizit

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y \quad \lambda < 0$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \lambda y(t + \Delta t)$$

$$y(t + \Delta t) \approx \frac{1}{1 - \Delta t \lambda} y(t) := y_1$$



Modifiziertes Euler Verfahren

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y \quad \lambda < 0$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \lambda y\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$\frac{y(t + \Delta t/2) - y(t)}{\Delta t/2} \approx \lambda y(t)$$

↑
**Approx. durch halben
expliziten Euler Schritt!**

$$\begin{aligned} y(t + \Delta t) &\approx y(t) + \Delta t \lambda y\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ &\approx y(t) + \Delta t \lambda \left(y(t) + \frac{\Delta t}{2} \lambda y(t) \right) \\ &\approx \left(1 + \Delta t \lambda + \frac{\Delta t^2 \lambda^2}{2} \right) y(t) := y_1 \end{aligned}$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y \quad \lambda < 0$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \lambda y\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

↑ **Approx. durch Mittelwert!**

$$y(t + \Delta t/2) \approx \frac{y(t) + y(t + \Delta t)}{2}$$

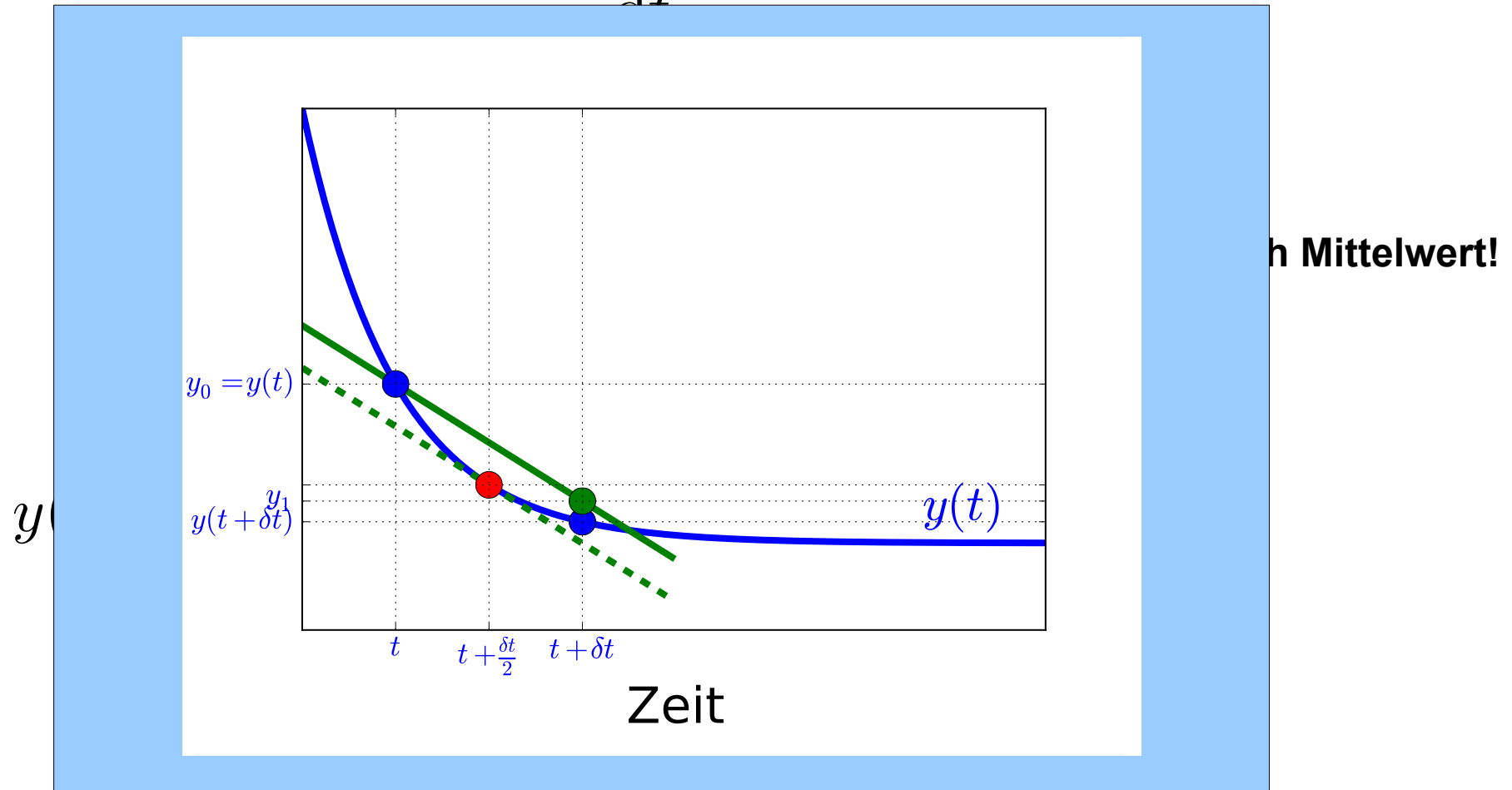
$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta t \lambda y\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$\approx y(t) + \Delta t \lambda \frac{y(t) + y(t + \Delta t)}{2}$$

$$\approx \frac{1 + \lambda \Delta t/2}{1 - \lambda \Delta t/2} y(t) := y_1$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Radioaktiver Zerfall $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ $\lambda < 0$



$$\approx \frac{1 + \lambda \Delta t / 2}{1 - \lambda \Delta t / 2} y(t) := y_1$$

Projekt 2

- **Loese** $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ mit $y(0) = 1$ $\lambda = -10$

bis $t = 1$

- **Verwende:** explizites & implizites Euler Verfahren
- **Vergleiche** mit der exakten Lösung:

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

- **Untersuche** den Fehler $E = |y_N - y(1)|$ als Funktion der Schrittweite

Projekt 2+

- **Loese** $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ mit $y(0) = 1$ $\lambda = -10$

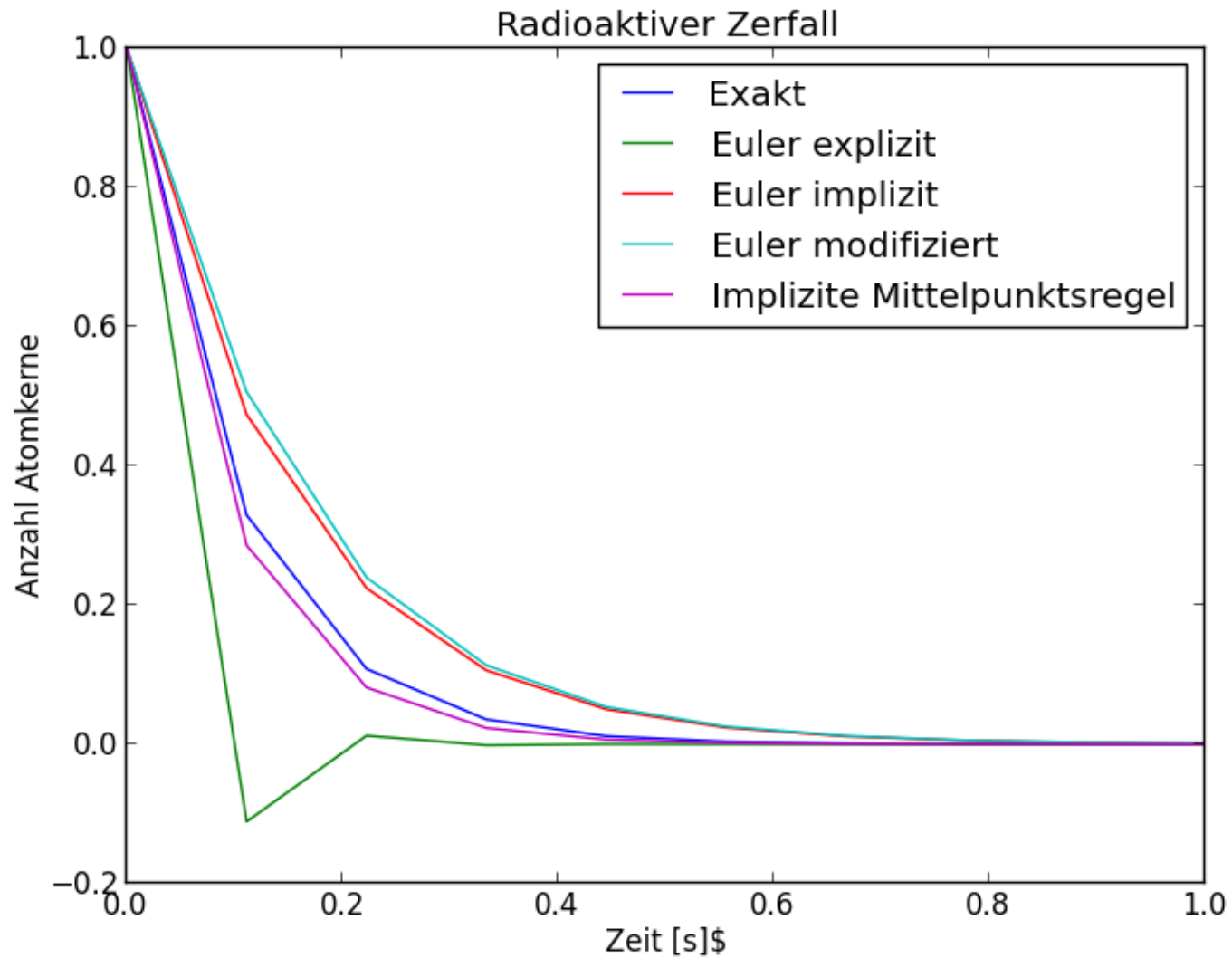
bis $t = 1$

- **Verwende:** modifiziertes Euler-Verfahren und implizite Mittelpunkts-Regel
- **Vergleiche** mit der exakten Lösung:

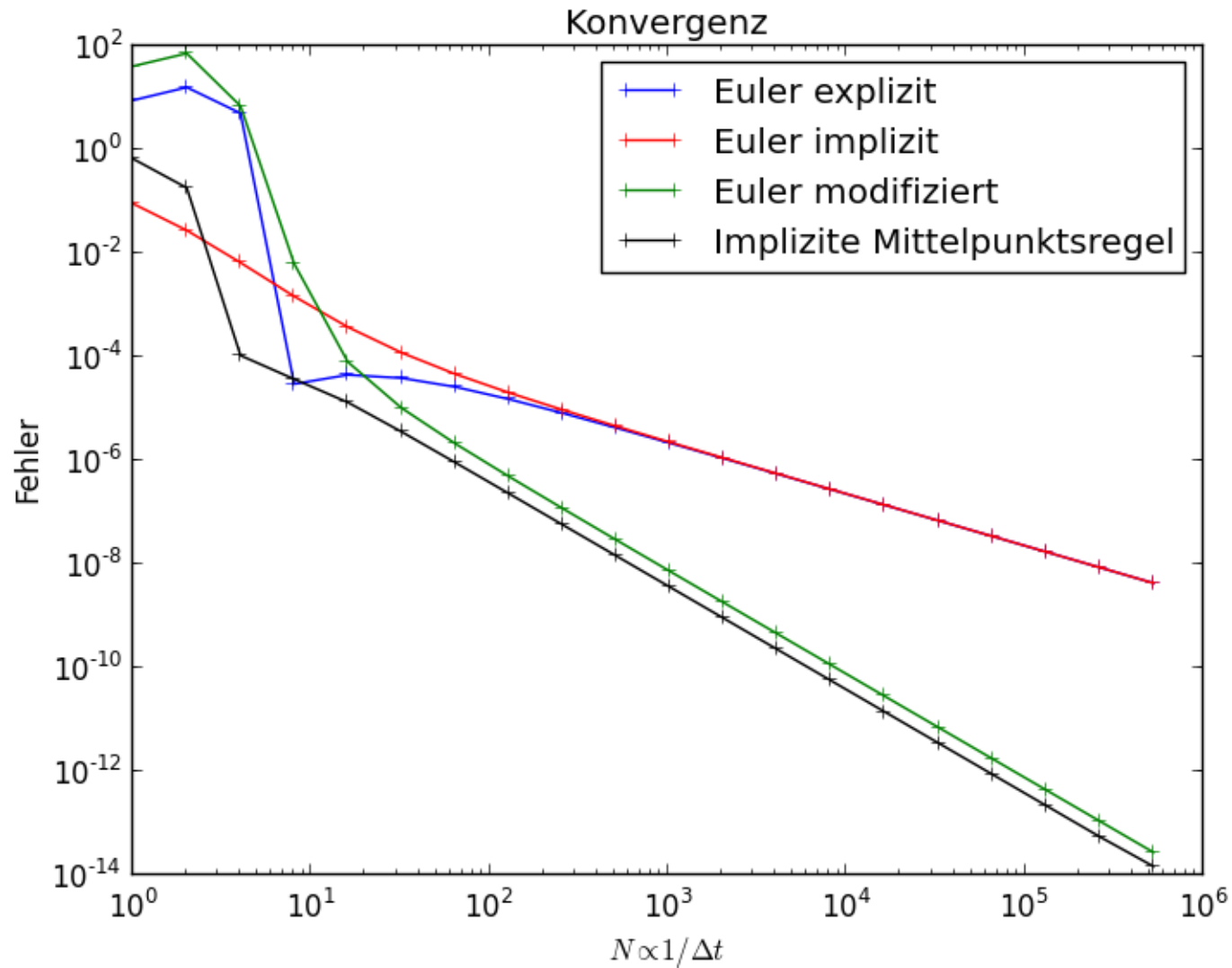
$$y(t) = e^{\lambda t}$$

- **Untersuche** den Fehler $E = |y_N - y(1)|$ als Funktion der Schrittweite

Projekt 2



Projekt 2



Projekt 3

- Logistische Diff.-Gleichung $\frac{dy}{dt} = \gamma y - \sigma y^2$
mit

$$\gamma = 1 \quad \sigma = 2 \quad y(t = 0) = y_0$$

- Verwende: explizites Euler Verfahren und modifiziertes Euler-Verfahren
- Vergleiche mit der exakten Loesung:

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sigma + \left(\frac{\gamma}{y_0} - \sigma\right) e^{-\gamma t}}$$

- Untersuche den Fehler $E = |y_N - y(3)|$ als Funktion der Schrittweite

Projekt 3+

- Logistische Diff.-Gleichung $\frac{dy}{dt} = \gamma y - \sigma y^2$
mit

$$\gamma = 1 \quad \sigma = 2 \quad y(t = 0) = y_0$$

- Verwende: implizites Euler Verfahren und implizite Mittelpunkts-Regel
- Vergleiche mit der exakten Loesung:

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sigma + \left(\frac{\gamma}{y_0} - \sigma\right) e^{-\gamma t}}$$

- Untersuche den Fehler $E = |y_N - y(3)|$ als
Funktion der Schrittweite