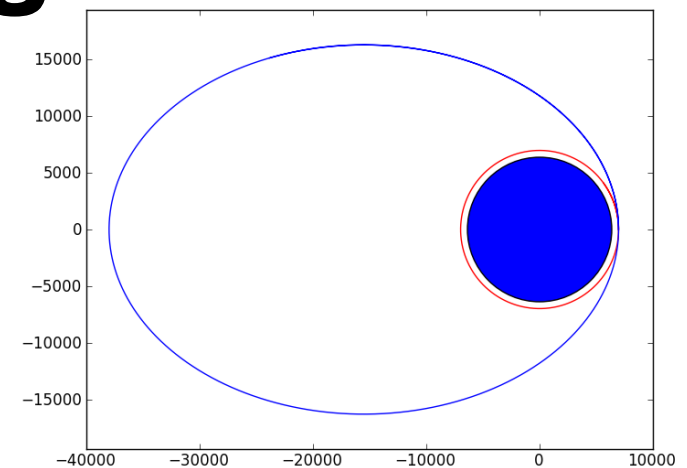
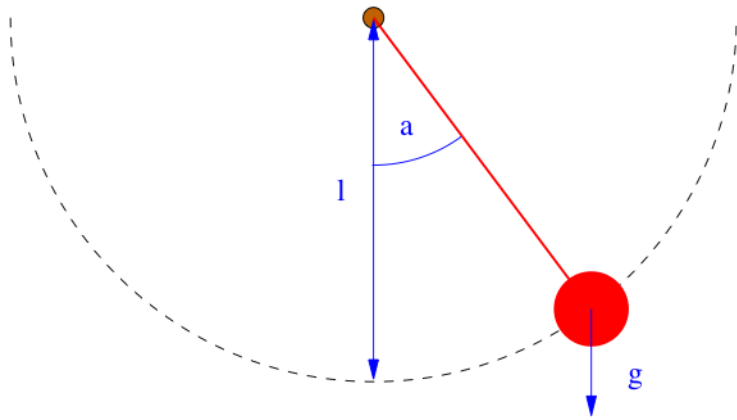


ETHZ Studienwoche 2016

Differentialgleichungen oder wie beschreibt man Veränderung



Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

- DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}\right)$$

- DGL n-ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$

Explizite form

Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

- DGL zweiter Ordnung

$$f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

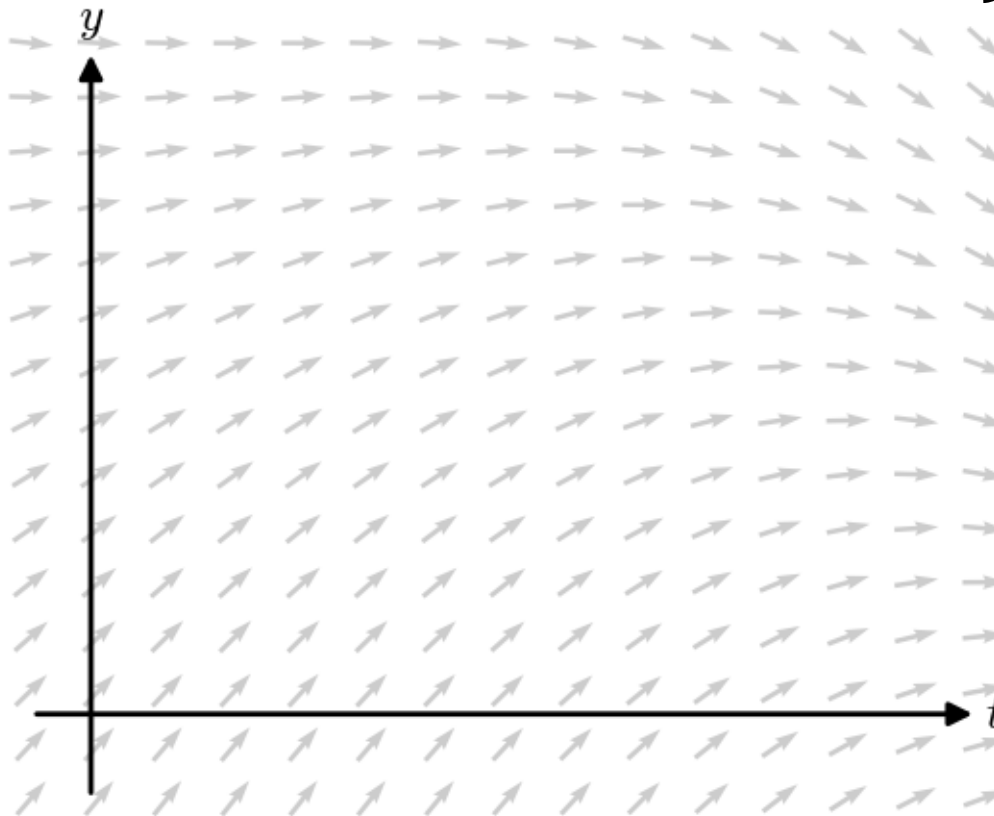
- DGL n-ter Ordnung

$$f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0$$

Implizite form

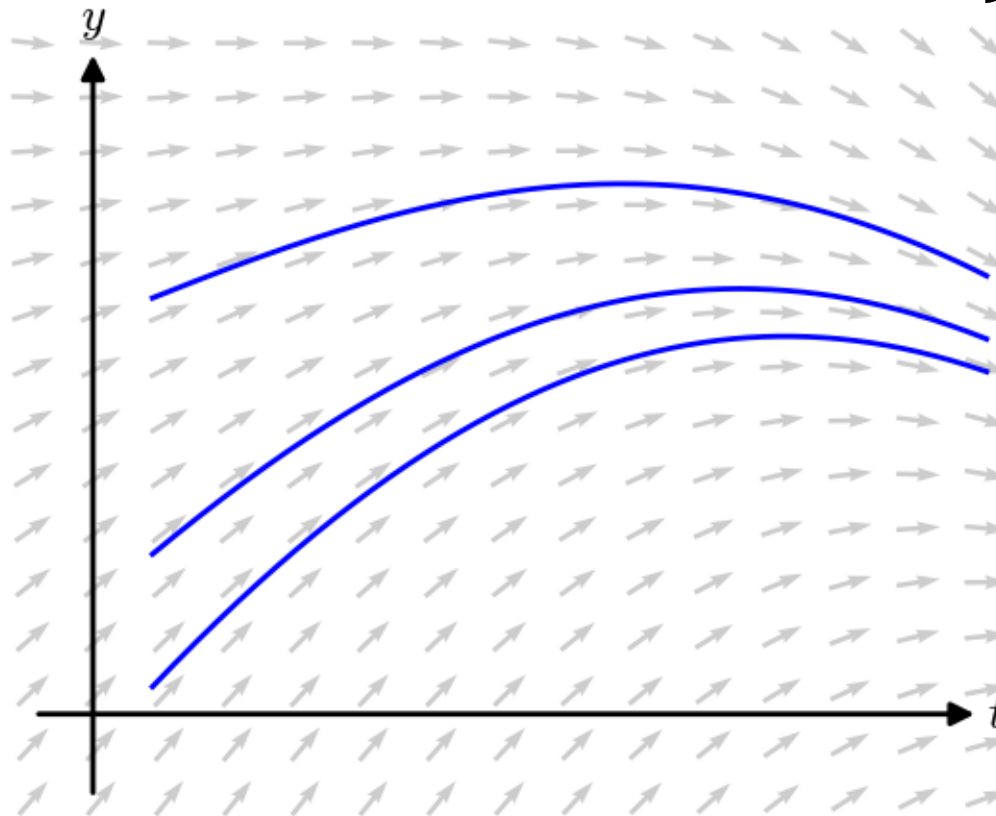
Einfache numerische Methoden

- DGL erster Ordnung: $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$
 - Anfangswert: $y(t_0) = y_0$
- Anfangswertproblem



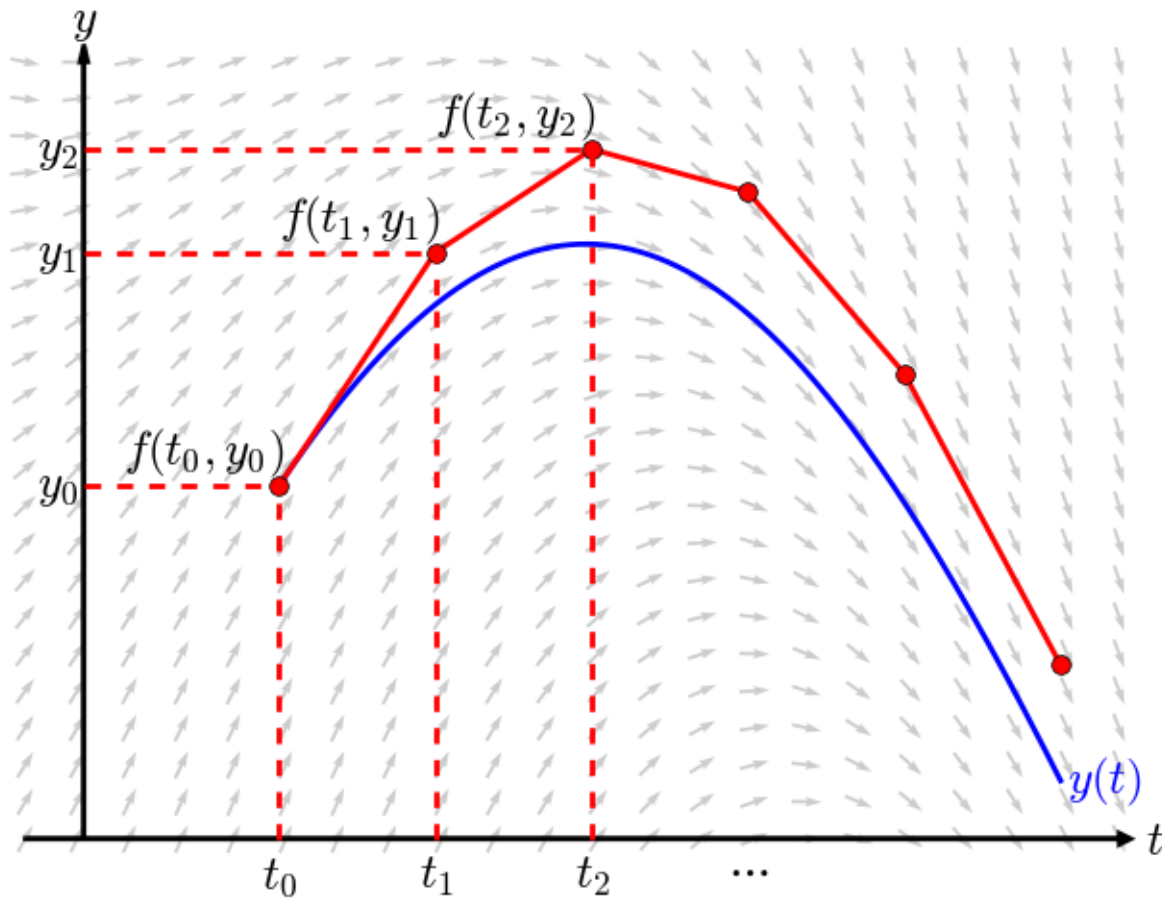
Einfache numerische Methoden

- DGL erster Ordnung: $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$
 - Anfangswert: $y(t_0) = y_0$
- } Anfangswertproblem

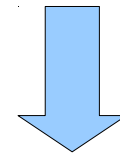


Euler Verfahren: Explizit

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$



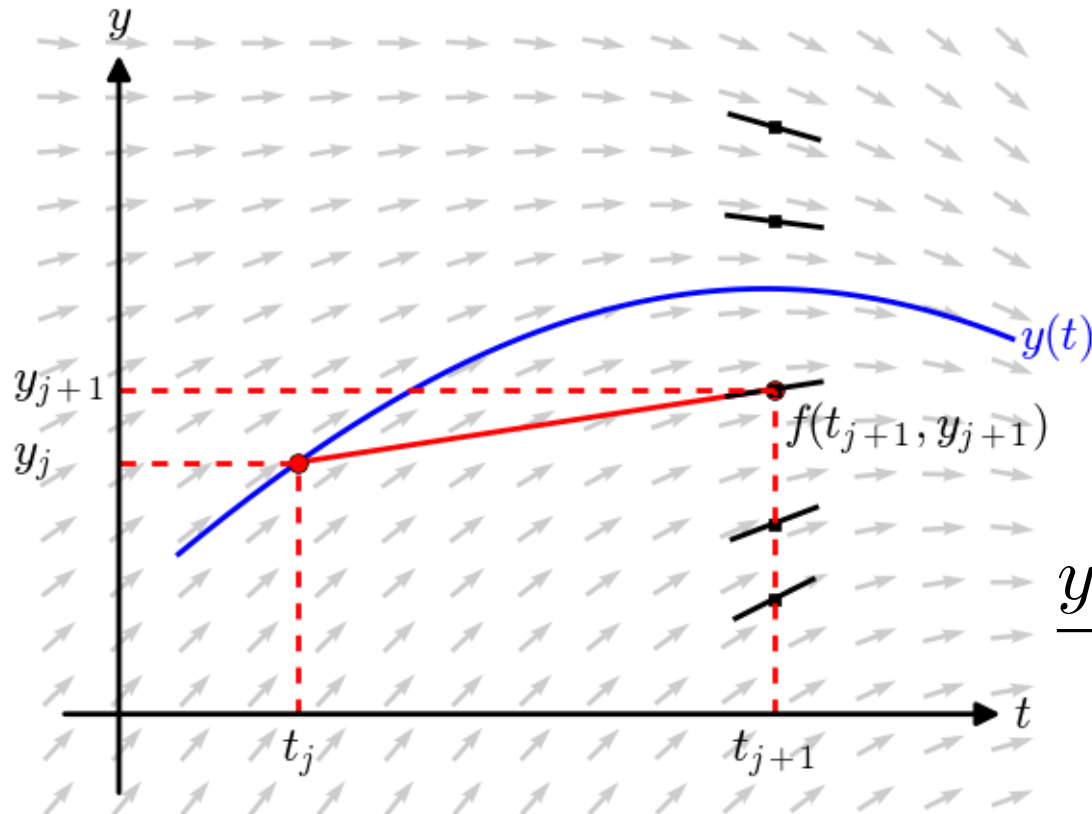
$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = f(t_j, y_j)$$



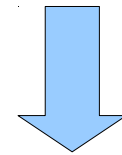
$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_j, y_j)$$

Euler Verfahren: **Implizit**

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$



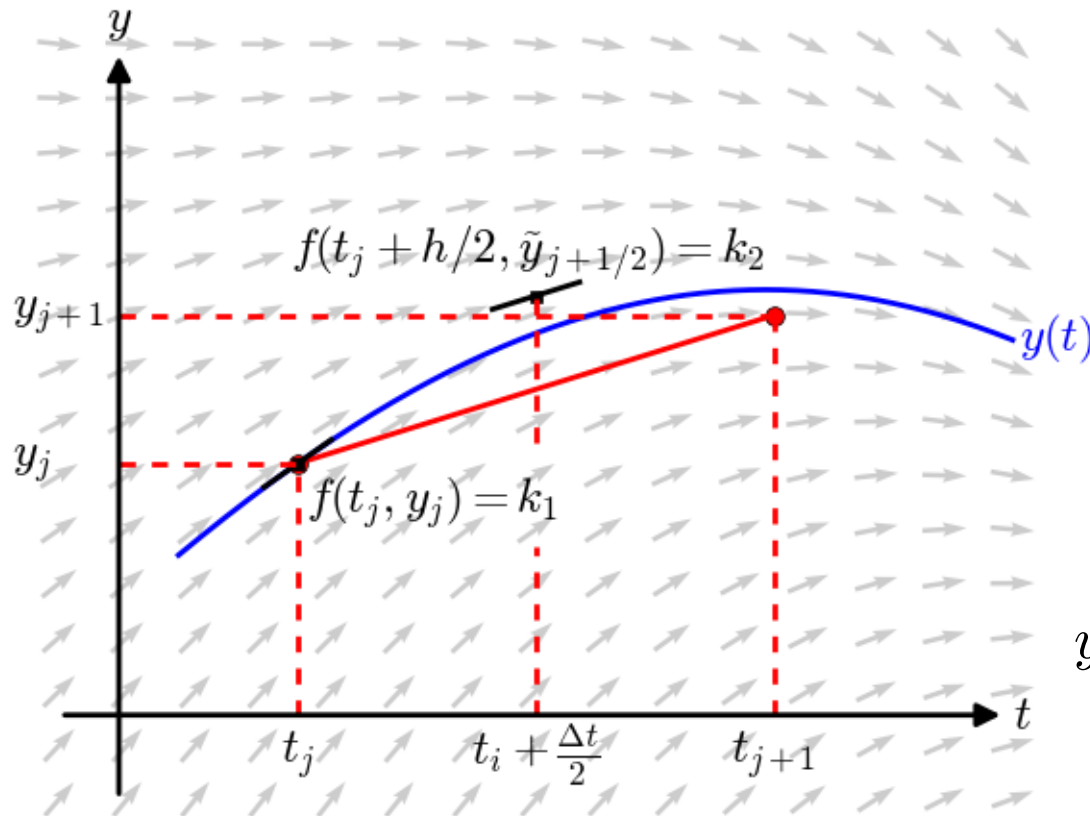
$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = f(t_{j+1}, y_{j+1})$$



$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} - f(t_{j+1}, y_{j+1}) = 0$$

Modifiziertes Euler Verfahren

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$



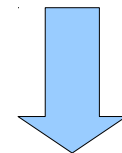
$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{\Delta t}{2} k_1$$

$$k_2 = f\left(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2}\right)$$

$t_{i+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t k_2$$

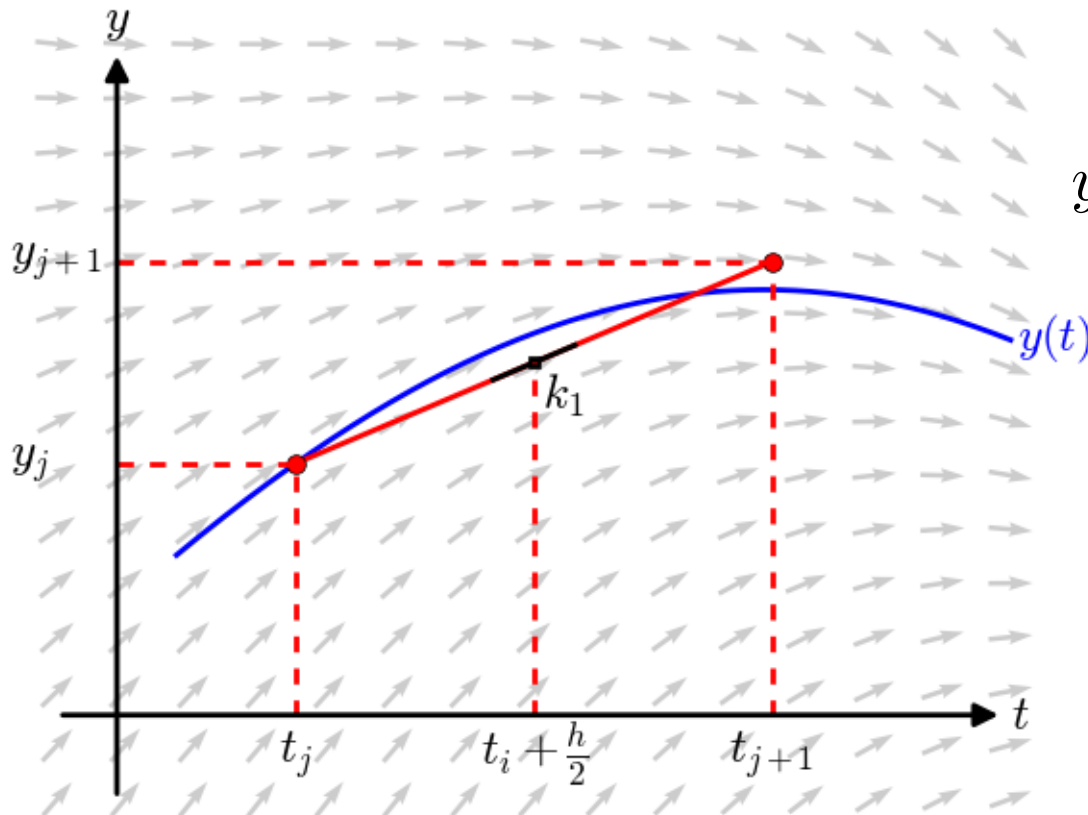


$$y_{j+1} = y_j$$

$$+ f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, y_j + \frac{\Delta t}{2} f(t_j, y_j)\right)$$

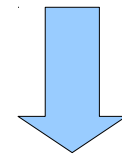
Implizite Mittelpunkts-Regel

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{\tilde{y}_{j+1/2} - y_j}{\Delta t/2} = \overbrace{f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})}^{k_1}$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$



$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

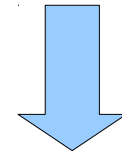
$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{\Delta t}{2} f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = \frac{y_j}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(y_j + \Delta t f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2}) \right)}_{y_{j+1}}$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$$

$$\frac{\tilde{y}_{j+1/2} - y_j}{\Delta t/2} = \overbrace{f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})}^{k_1}$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$



$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f \left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2} \right)$$

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\frac{dN_1}{dt} = +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1)$$

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{aligned} \right\} \text{Zwei **gekoppelte** Diff.-Gleichungen erster Ordnung}$$

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dt} \\ \frac{dN_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dt} \\ \frac{dN_2}{dt} \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Diff.-Gleichungs} \\ \text{System erster} \\ \text{Ordnung} \end{array}$$

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t, \mathbf{y})} \quad \left. \vphantom{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Diff.-Gleichungs} \\ \text{System erster} \\ \text{Ordnung} \end{array}$$

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix}$$

Diff.-Gleichungs
System erster
Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Projekt 4

- Löse die Lotka-Volterra Diff.-Gl. Mit

$$\epsilon_1 = 1 \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} \quad \gamma_1 = 0.05 \quad \gamma_2 = 0.02$$

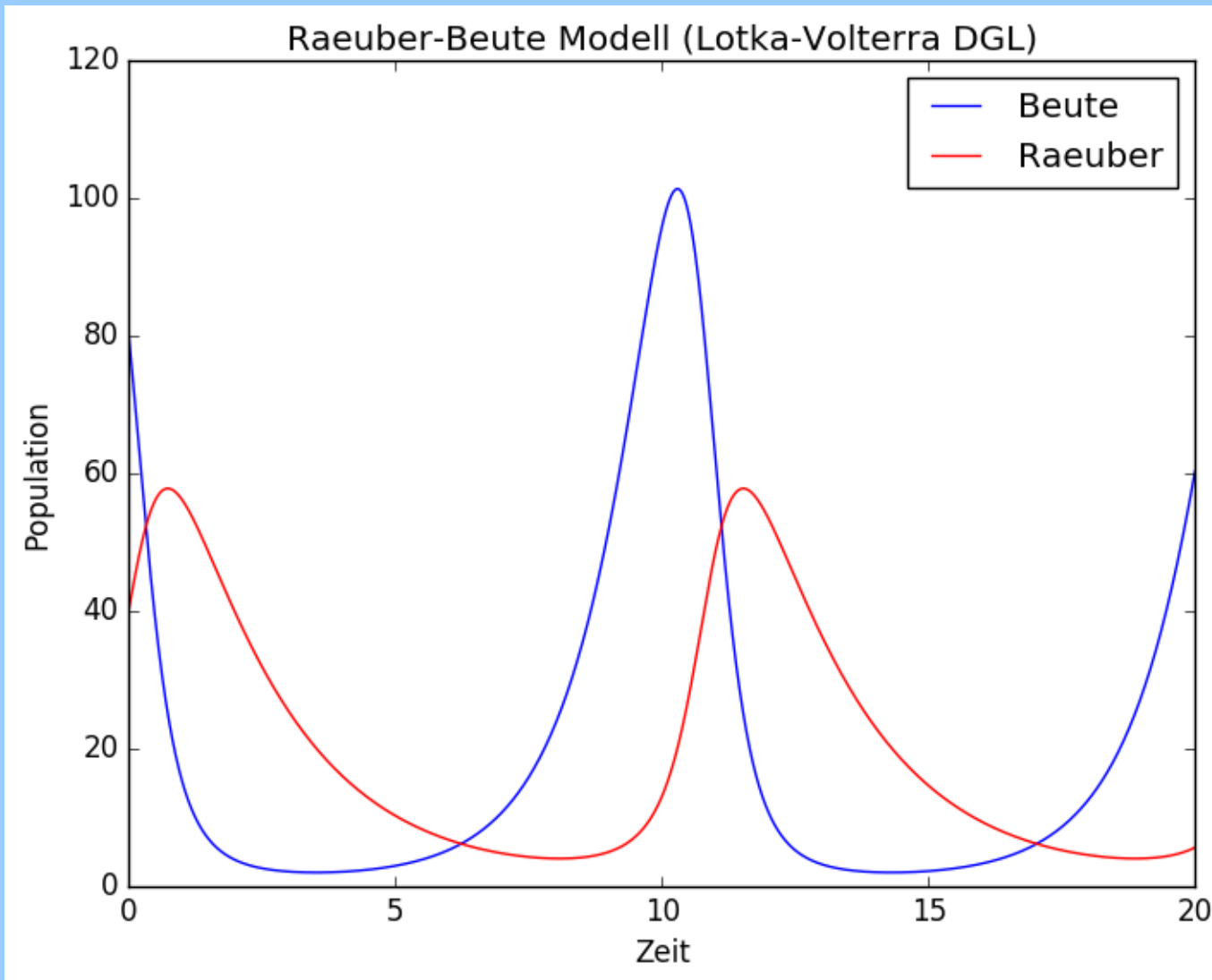
$$N_1(t = 0) = 80 \quad N_2(t = 0) = 40$$

bis Zeit $t = 20$

- Verwende: modifiziertes Euler-Verfahren

Projekt 4

- Lotka
- ϵ_1
- M
- bi
- Ver



System von Diff.-Gl.

- System n-ter Ordnung

$$\frac{d^n \mathbf{y}}{dt^n} = f \left(t, \mathbf{y}(t), \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}\mathbf{y}}{dt^{n-1}} \right)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_m]^T$$

- Beispiel: System 2. Ordnung

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

$[x, y]^T$

$[F_x, F_y]^T$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f \left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right)$$

$$(y_0 = y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_0}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2 \quad \dots \quad \frac{dy_{n-2}}{dt} = y_{n-1} \\ \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = f(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{array} \right.$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f \left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f} \\ \mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}]^T \\ \mathbf{f} = [y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})]^T \end{array} \right.$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Beispiel: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg$

$$x_0 = x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_0}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = -g \end{array} \right. \quad \text{Geschwindigkeit!}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f} \quad \mathbf{x} = [x_0, x_1]^T$$

$$\mathbf{f} = [x_1, -g]^T$$

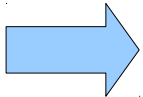
Umschreiben in System 1. Ordnung

- Beispiel: $\frac{d^3y}{dt^3} = -2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y^2 - e^t$

Oder mit "Strich" Notation: $y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t$

$$(y_0 = y)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dt} = y_1 & , \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -2y_2 + y_1 + y_0^2 - e^t \end{cases}$$

 $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -2y_2 + y_1 + y_0^2 - e^t \end{bmatrix}$

Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y_n) \quad \textbf{Explizit}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad \textbf{Implizit}$$

Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y_n) \quad \textbf{Explizit}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad \textbf{Implizit}$$

Eventuell muss man ein (Nicht-) Lineares Gleichungs-System loesen!!!

Modifiziertes Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $\frac{dy}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$

$$\frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{n+1/2}, \mathbf{y}_{n+1/2})$$

$$t_{n+1/2} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$$

Explizit!

$$\mathbf{y}_{n+1/2} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$$



Halber Euler Schritt!

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Diff.-Gleichung: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2})$$

$$t_{n+1/2} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$$

Implizit!

$$y_{n+1/2} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$$



**Mittelwert zwischen
Zeitschritten!**

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Diff.-Gleichung: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2})$$

$$t_{n+1/2} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$$

$$y_{n+1/2} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$$

Implizit!

Eventuell muss man ein (Nicht-) Lineares Gleichungs-System loesen!!!

Projekt 5

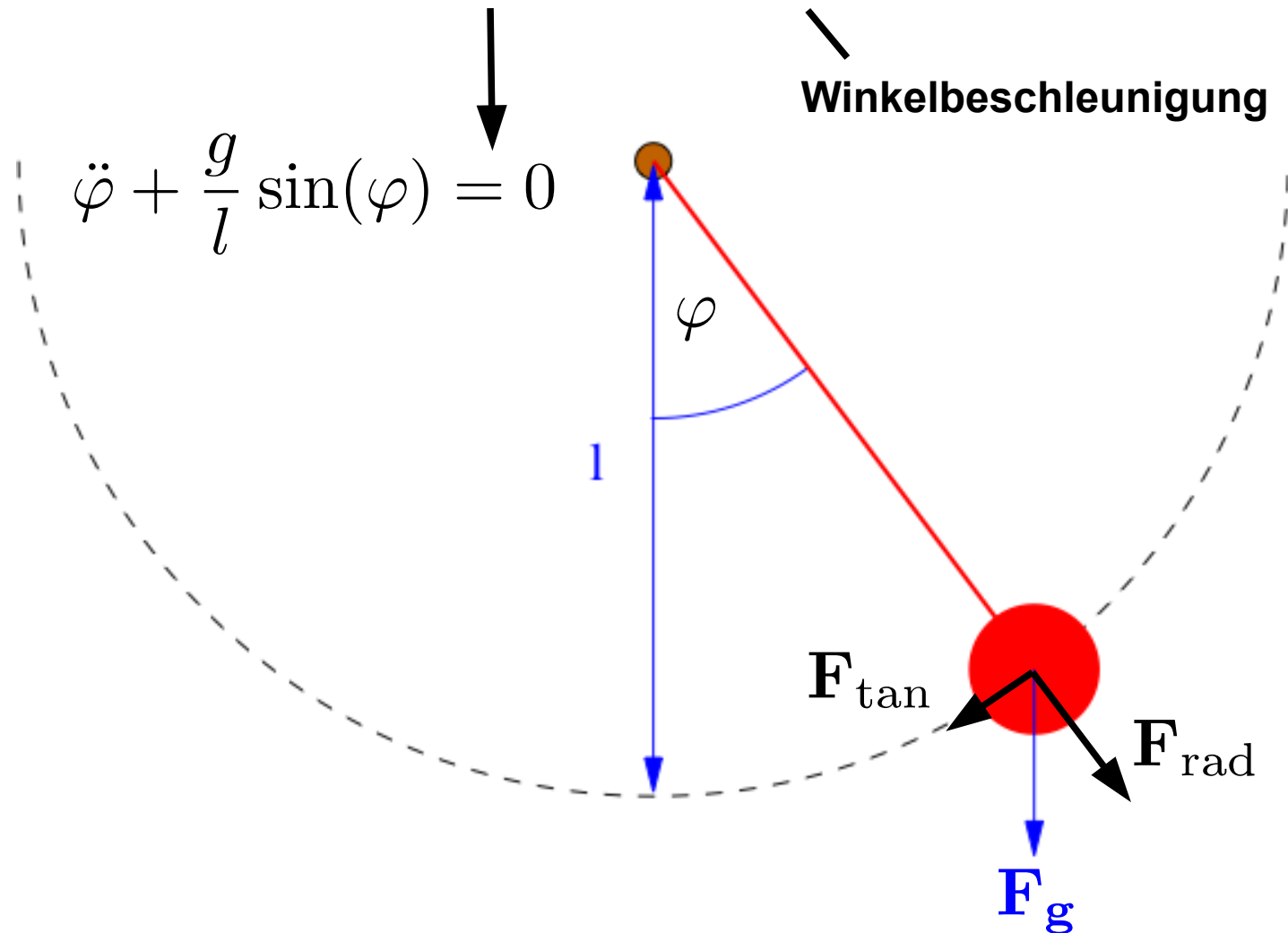
- Pendel

$$F = -mg \sin(\varphi) = ma = ml\ddot{\varphi}$$

Winkelbeschleunigung

Nicht-lineare Diff.-Gl.
2. Ordnung!

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0$$



Projekt 5

- Pendel

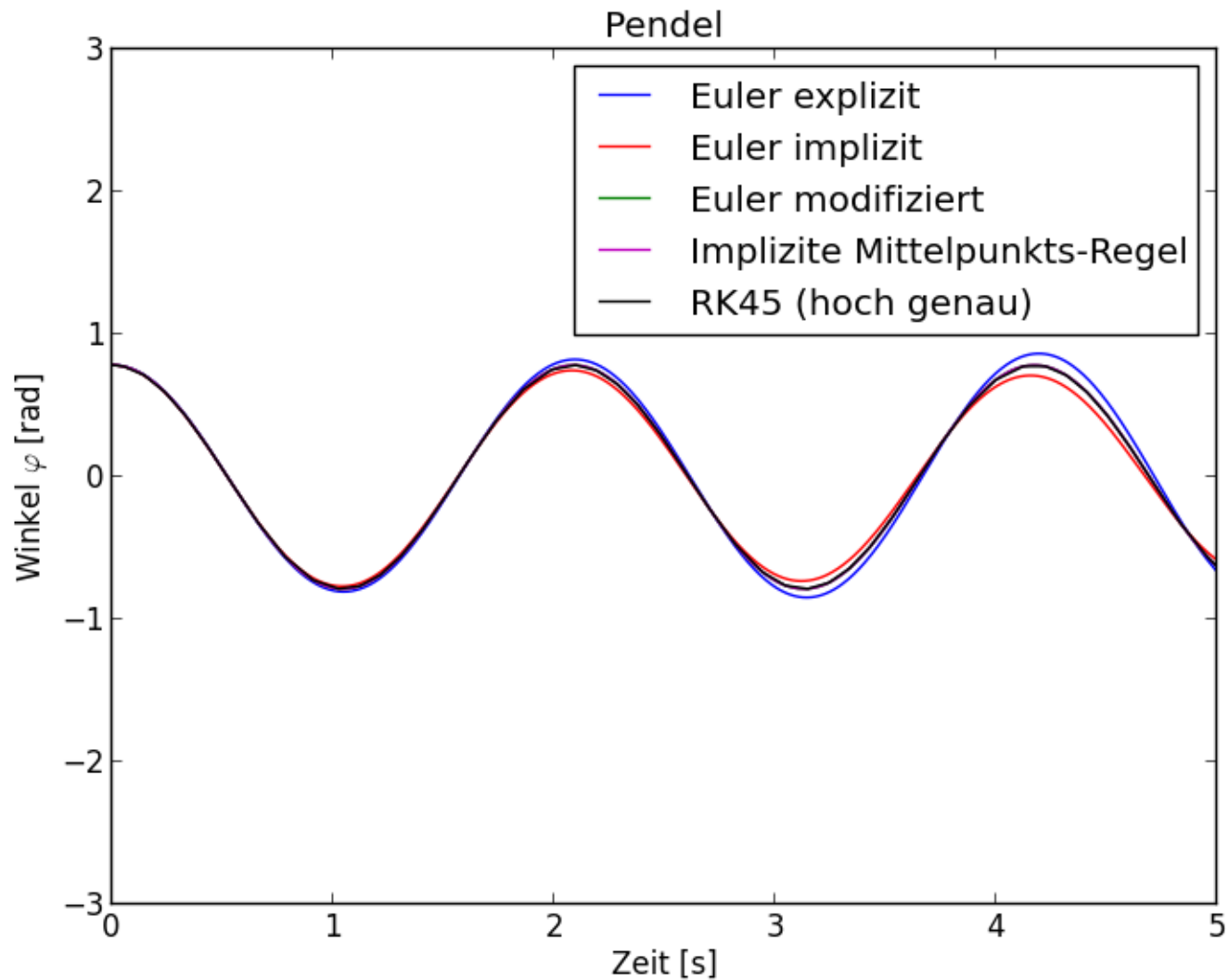
1) Umschreiben in System 1. Ordnung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{\varphi}_1 = \dots$$

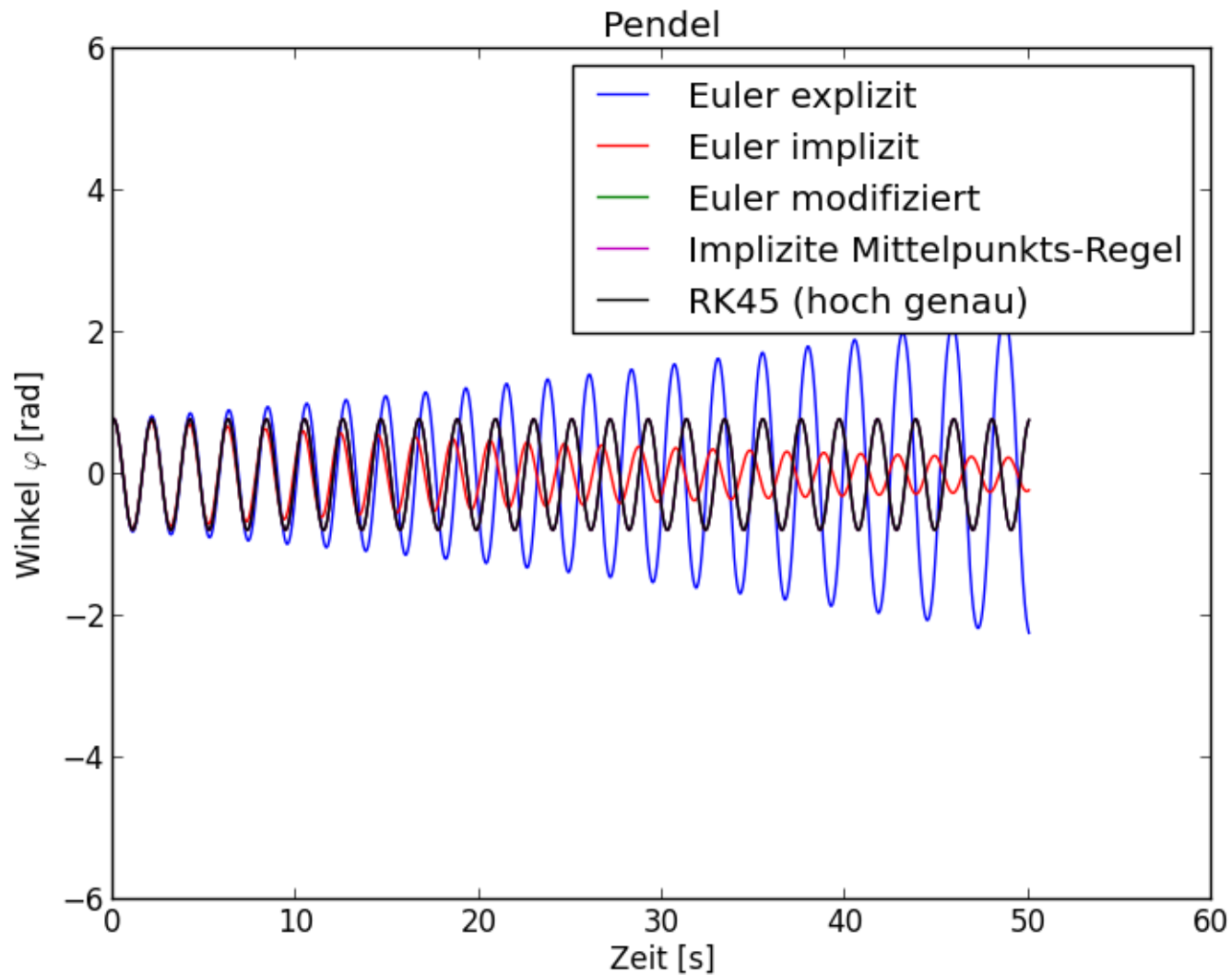
2) Löse das System mit den verschiedenen Verfahren die wir kennengelernt haben
Anfangsbedingungen: freie Wahl!

3) Untersuche den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie (potentielle + kinetische)

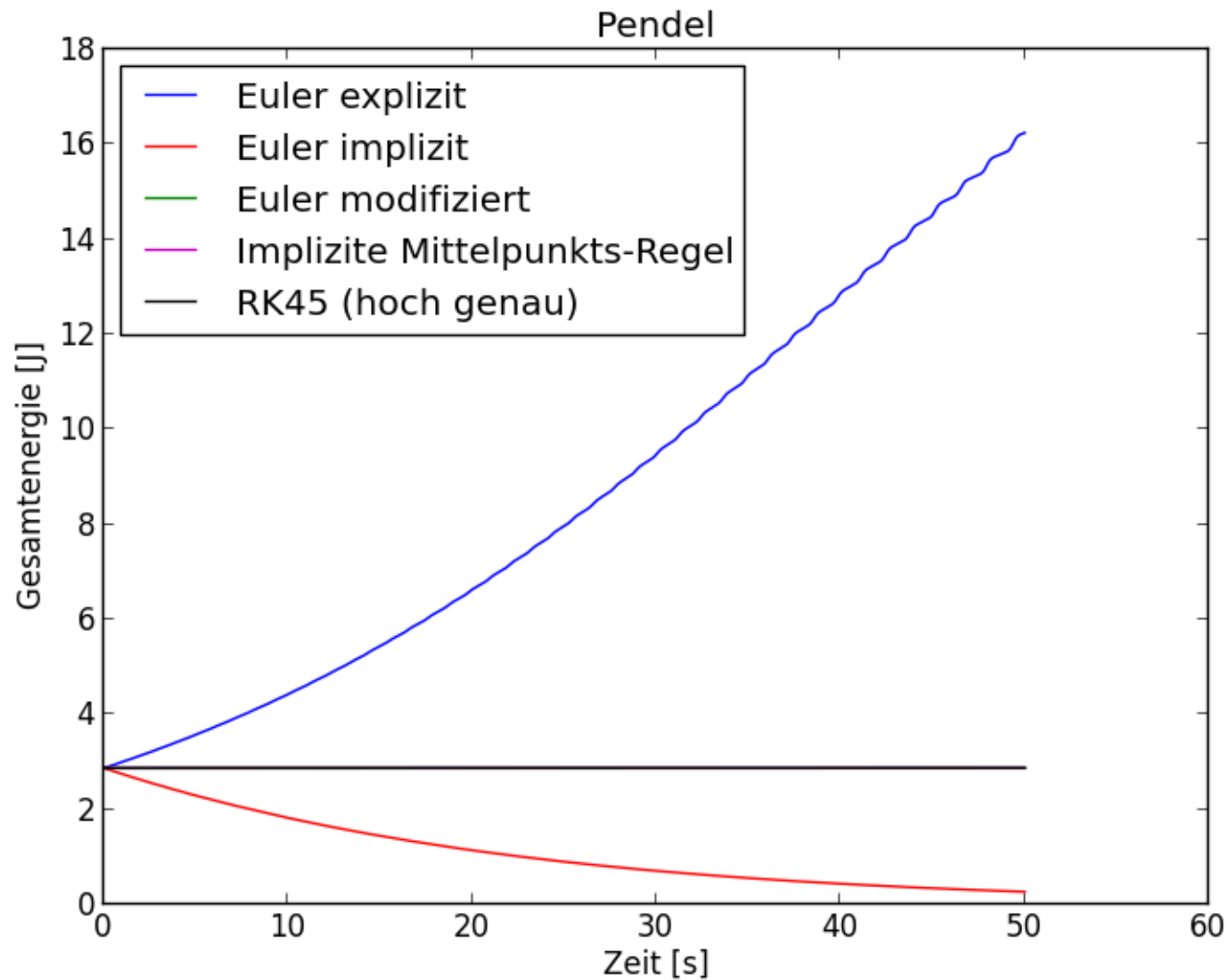
Projekt 5



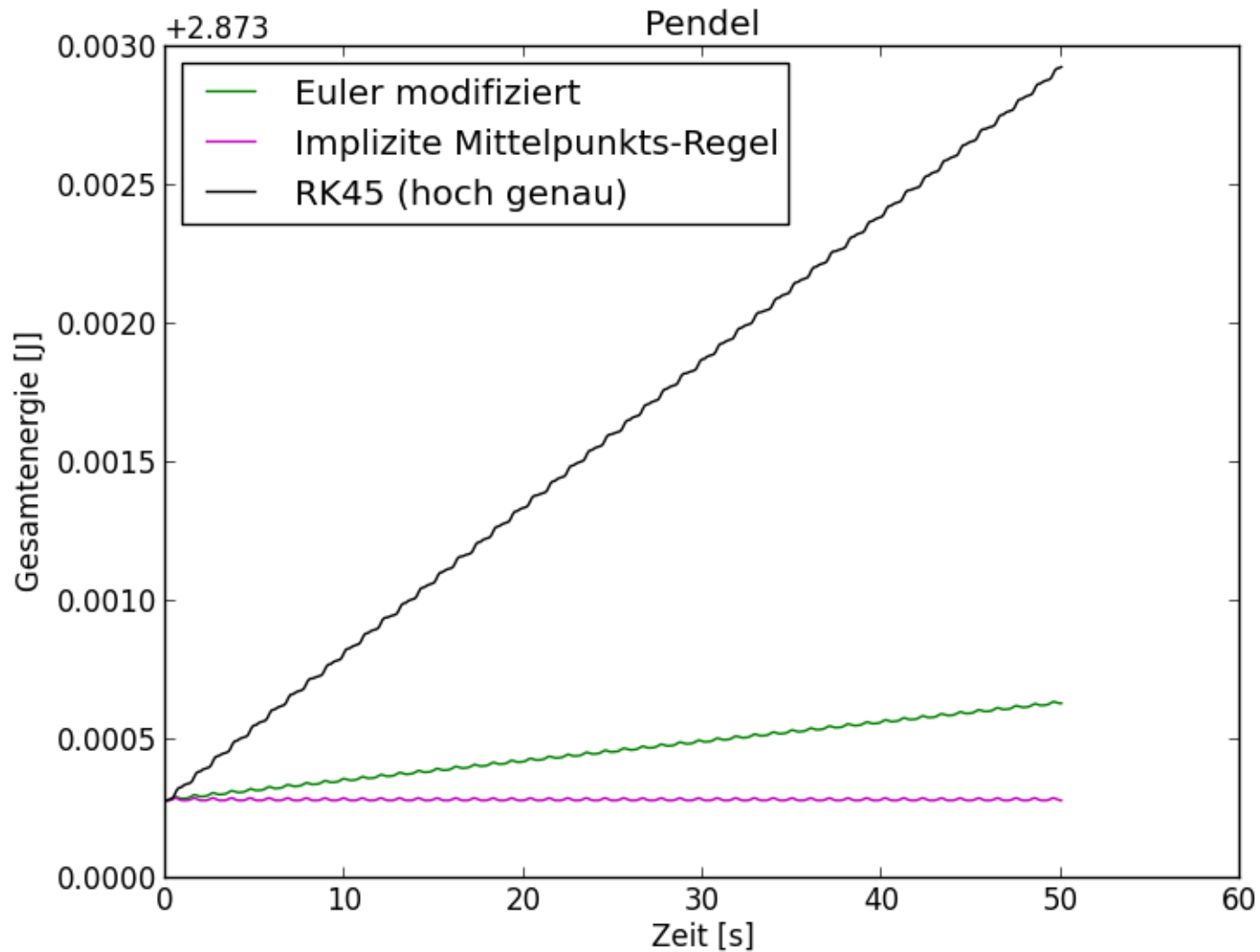
Projekt 5



Projekt 5

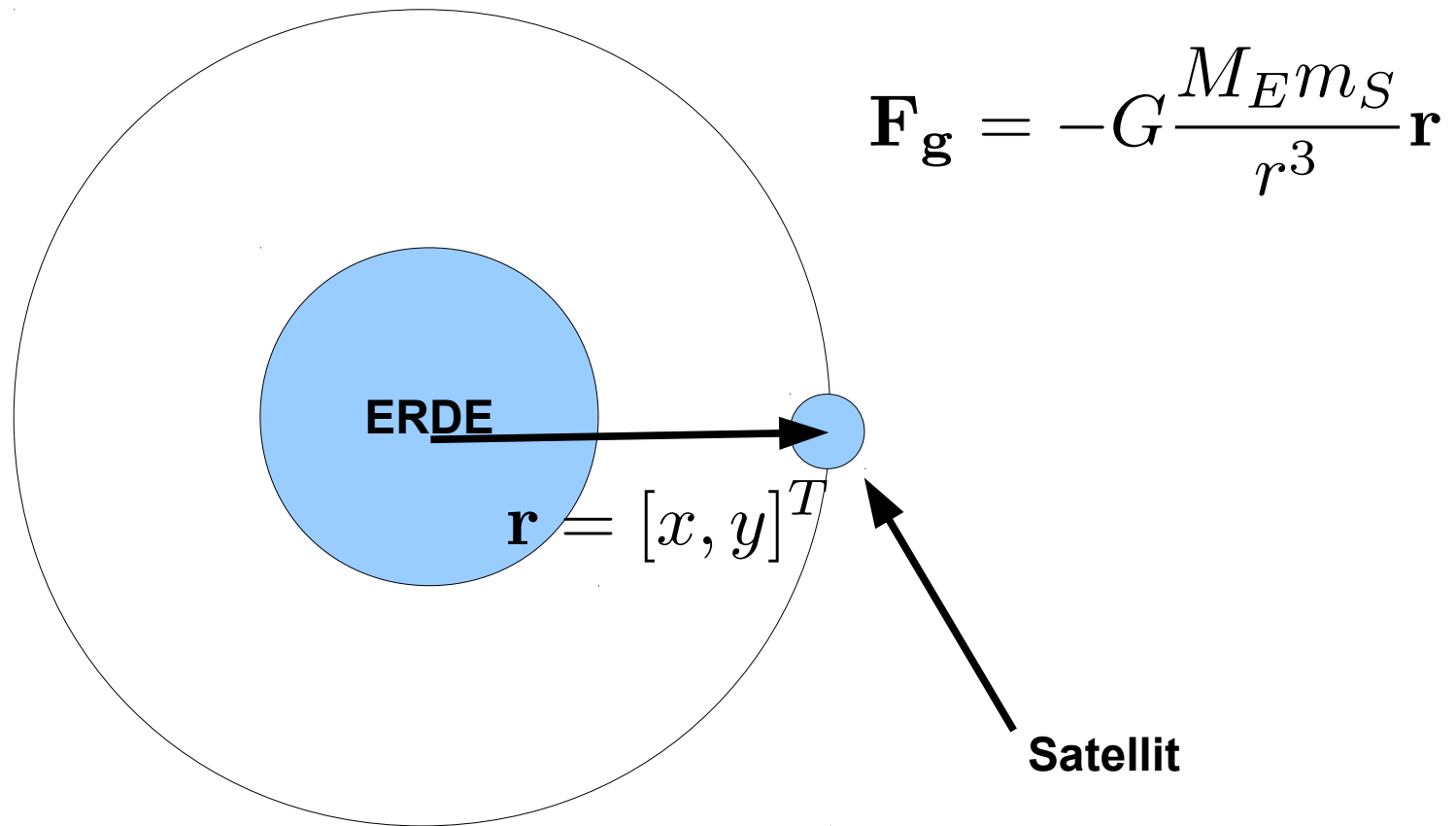


Projekt 5



Projekt 6

- Satellit



Projekt 6

- Satellit

- 1) Umschreiben in System 1. Ordnung

...

- 2) Löse das System mit den verschiedenen Verfahren die wir kennengelernt haben
Anfangsbedingungen: Geostationäre Umlaufbahn...

Beachte: fuer konstante Kreisbahn Zentripetalkraft = Grav. Kraft!!!

- 3) Untersuche den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie (potentielle + kinetische)

- 4) Untersuche den zeitlichen Verlauf des Drehimpuls