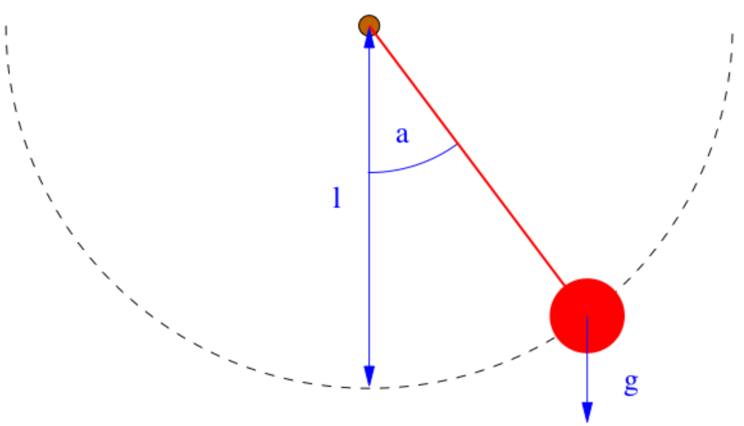
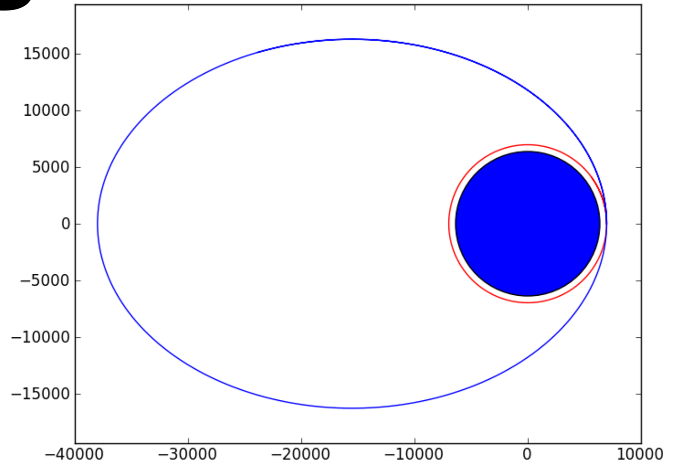
ETHZ Studienwoche 2017

Differentialgleichungen oder wie beschreibt man Veränderung





Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t))$$

- DGL zweiter Ordnung

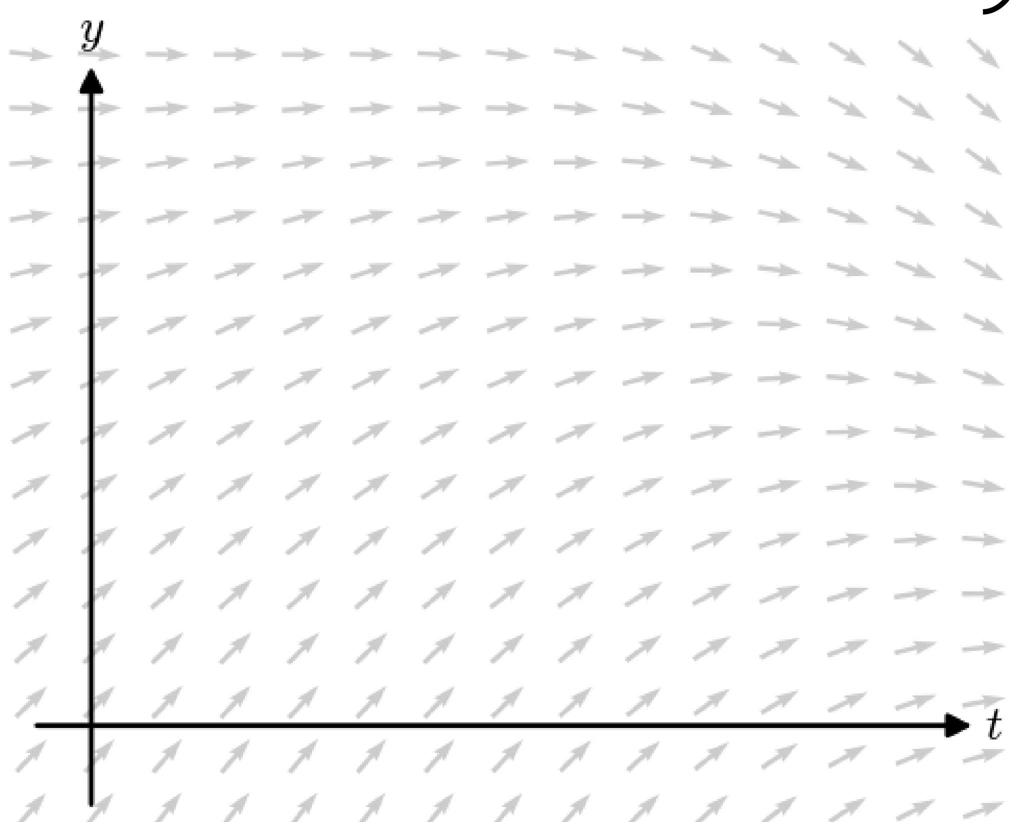
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

- DGL n-ter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

Einfache numerische Methoden

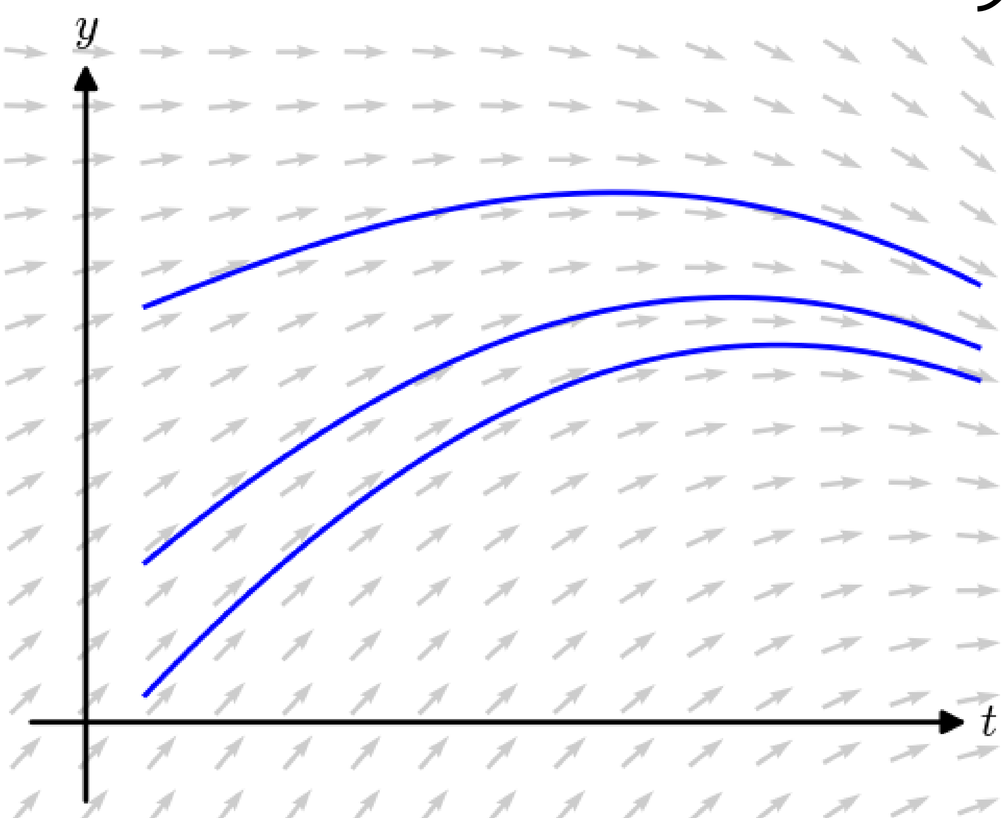
$$\left.\begin{array}{ll} \text{• DGL erster Ordnung:} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)) \\[2em] \text{• Anfangswert:} & y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \textbf{Anfangswertproblem}$$



Einfache numerische Methoden

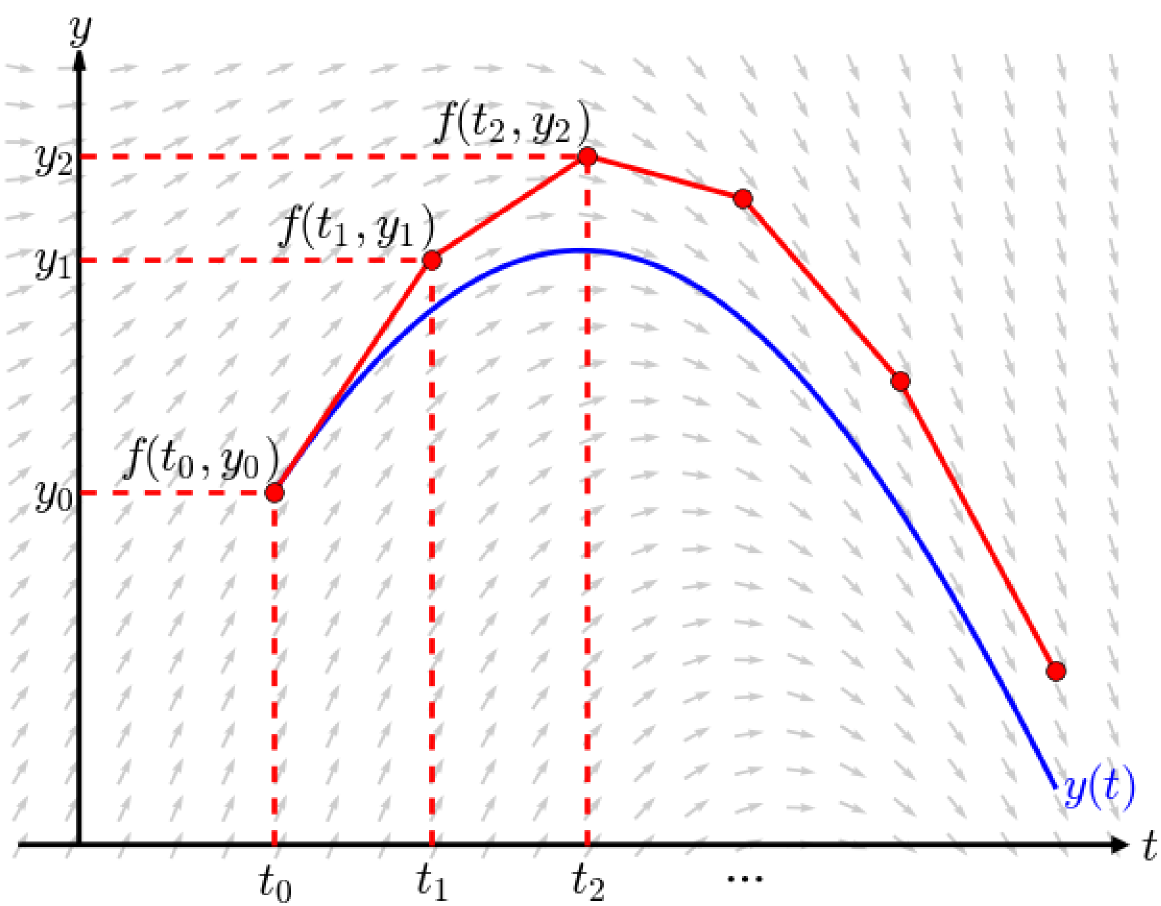
- DGL erster Ordnung: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t))$
- Anfangswert: $y(t_0) = y_0$

Anfangswertproblem



Euler Verfahren: Explizit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$



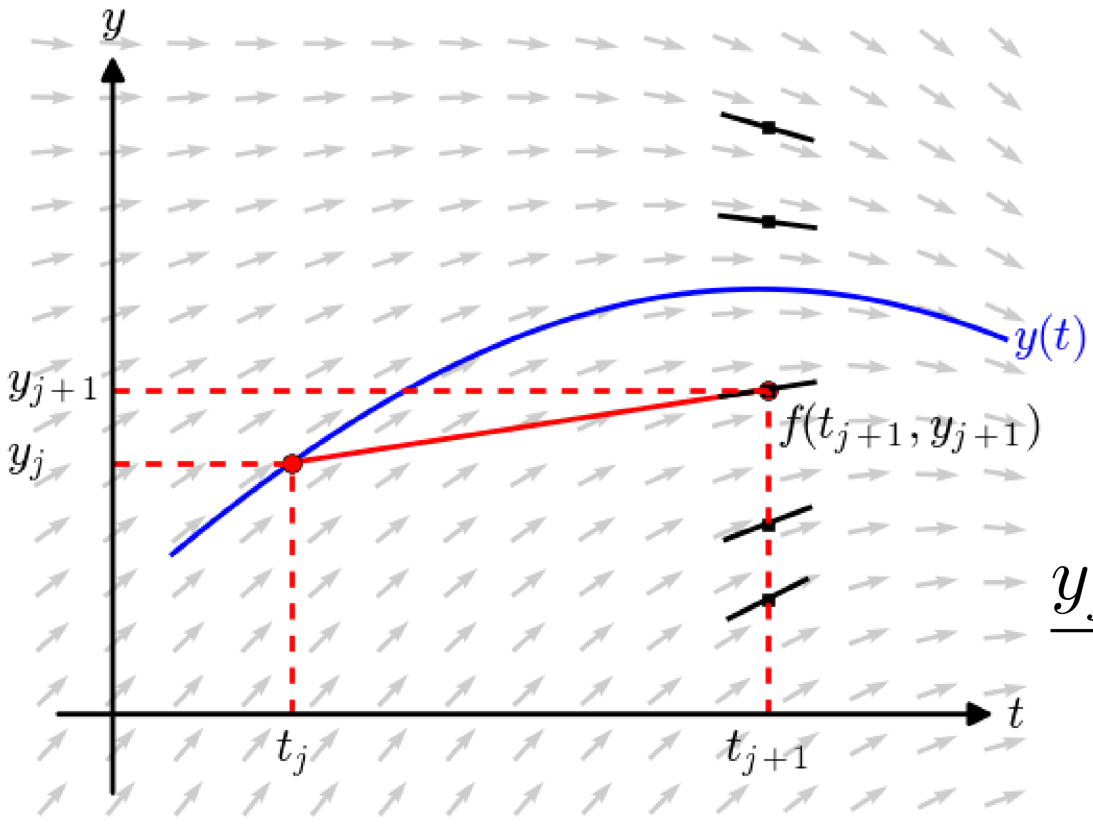
$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = f(t_j, y_j)$$

$$\Downarrow$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_j, y_j)$$

Euler Verfahren: Implizit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

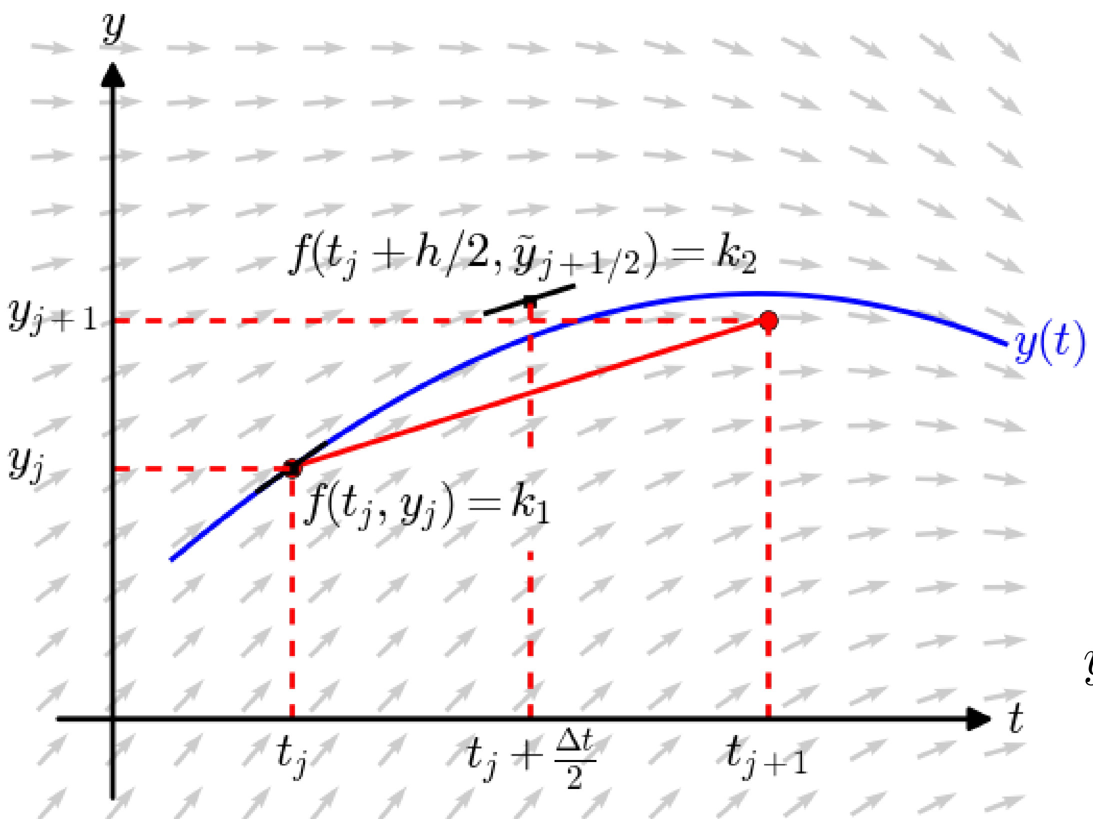


$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = f(t_{j+1}, y_{j+1})$$

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} - f(t_{j+1}, y_{j+1}) = 0$$

Modifiziertes Euler Verfahren

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}\right\}$$



$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{\Delta t}{2} k_1$$

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

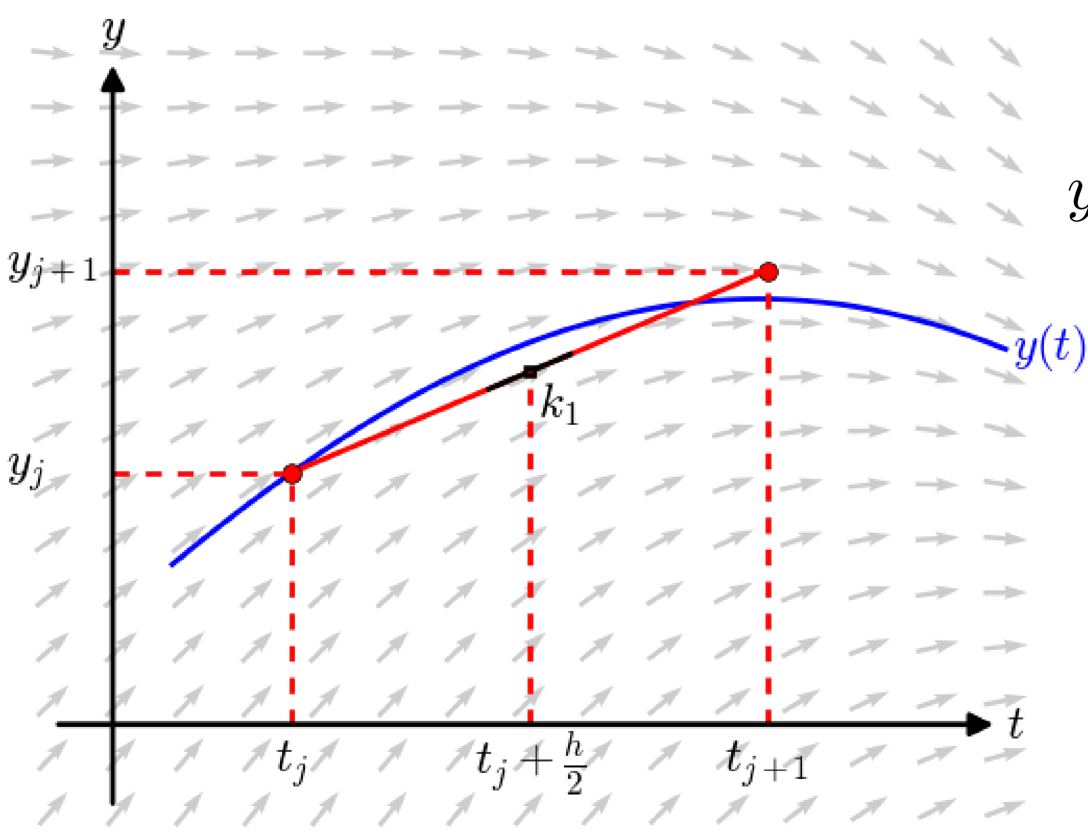
$$k_2 = f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t k_2$$

$$\begin{aligned} y_{j+1} = y_j & \\ &+ \Delta t f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, y_j + \frac{\Delta t}{2} f(t_j, y_j)\right)\end{aligned}$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$



$$\frac{\tilde{y}_{j+1/2} - y_j}{\Delta t/2} = \overbrace{f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})}^{k_1}$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$\begin{aligned} y_{j+1} = y_j \\ + \Delta t f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right) \end{aligned}$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\tilde{y}_{j+1/2} - y_j}{\Delta t/2} = \overbrace{f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})}^{k_1}$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{\Delta t}{2} f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = \frac{y_j}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(y_j + \Delta t f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})\right)}_{y_{j+1}}$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$$

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2)$$
$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1)$$

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2)\\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1)\end{aligned}\right\}$$

Zwei **gekoppelte** Diff.-Gleichungen erster Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} \\ \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix}\right\}$$

Diff.-Gleichungs **System** erster Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})}\right\}$$

Diff.-Gleichungs **System** erster Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\ &\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Diff.-Gleichungs **System** erster Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Projekt 4

- Loese die Lotka-Volterra Diff.-Gl. Mit

$$\epsilon_1 = 1 \qquad \epsilon_2 = \frac{1}{2} \qquad \gamma_1 = 0.05 \qquad \gamma_2 = 0.02$$

$$N_1(t=0) = 80 \qquad N_2(t=0) = 40$$

  bis Zeit $t = 20$

- Verwende: modifiziertes Euler-Verfahren

Projekt 4

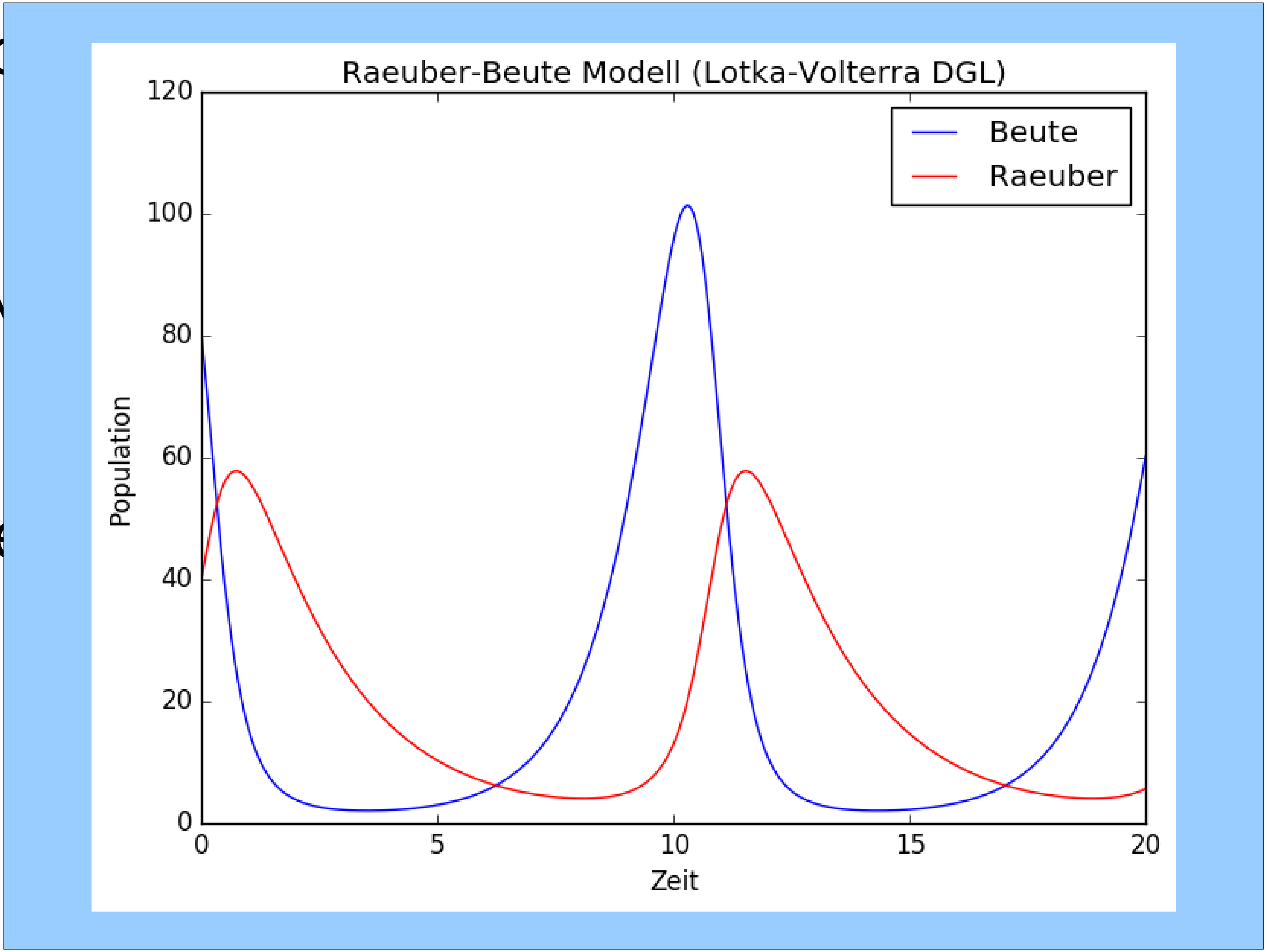
- Lo

ϵ_1

N

bi

- Ve



System von Diff.-Gl.

- System n-ter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^n \mathbf{y}}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, \mathbf{y}(\mathbf{t}), \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{y}}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m]^T$$

- Beispiel: System 2. Ordnung

$$[x, y]^T$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}$$

$$[F_x, F_y]^T$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

$$(y_0 = y)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t} = y_1 \quad , \quad \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2 \qquad \ldots \qquad \dfrac{\mathrm{d}y_{n-2}}{\mathrm{d}t} = y_{n-1} \\[2em] \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}t} = f\left(t, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\right) \end{array}\right.$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} & \mathbf{y} = \left[y_0, y_1, y_2, ...y_{n-2}, y_{n-1}\right]^T \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f} & \\ & \mathbf{f} = \left[y_1, y_2, ..., y_{n-1}, f(t, y_0, y_1, ..., y_{n-1})\right]^T \end{array} \right.$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Beispiel: $m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -mg$

$$x_0 = x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = x_1 \\ \\ \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -g \end{array} \right.$$

Geschwindigkeit!

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1]^T$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = [x_1, -g]^T$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Beispiel: $$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} = -2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y^2 - e^t$$

Oder mit "Strich" Notation: $y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t$

$$(y_0 = y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t} = y_1 \quad , \quad \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -2y_2 + y_1 + y_0^2 - e^t \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -2y_2 + y_1 + y_0^2 - e^t \end{bmatrix}$$

Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)$$ **Explizit**

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{y}_{j+1})$$ **Implizit**

Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)$$ **Explizit**

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{y}_{j+1})$$ **Implizit**

Eventuell muss man ein (Nicht-) Lineares Gleichungs-System loesen!!!

Modifiziertes Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{y}_{j+1/2})$$

Explizit!

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

$$\mathbf{y}_{j+1/2} = \mathbf{y}_j + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)$$

Halber Euler Schritt!

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Diff.-Gleichung: $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{y}_{j+1/2})$$

Implizit!

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

$$\mathbf{y}_{j+1/2} = \frac{\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j+1}}{2}$$

Mittelwert zwischen Zeitschritten!

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Diff.-Gleichung: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{y}_{j+1/2})$$

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

Implizit!

$$\mathbf{y}_{j+1/2} = \frac{\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j+1}}{2}$$

Eventuell muss man ein (Nicht-) Lineares Gleichungs-System loesen!!!

Projekt 5

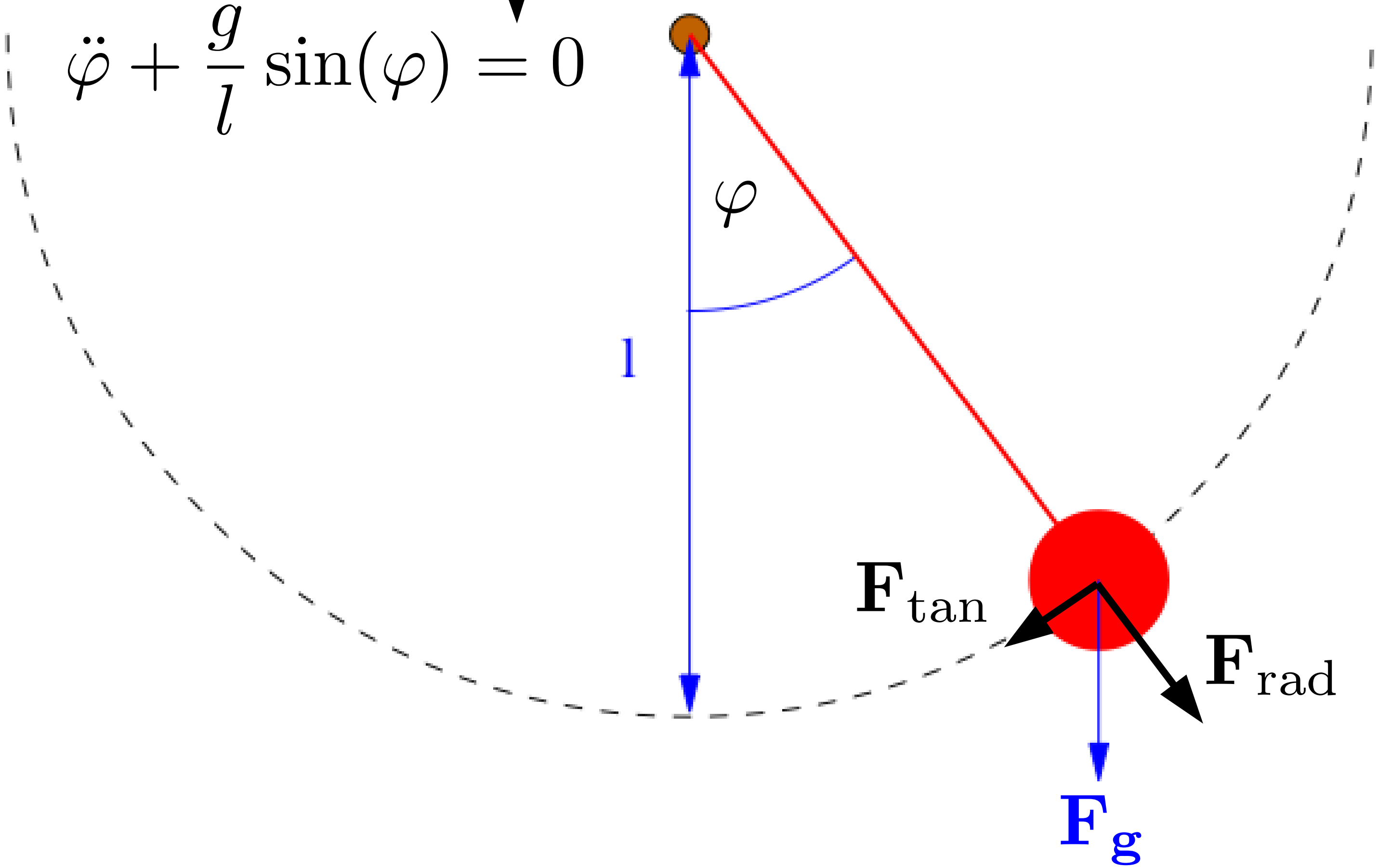
- Pendel

$$F = -mg\sin(\varphi) = ma = ml\ddot{\varphi}$$

Winkelbeschleunigung

Nicht-lineare Diff.-Gl.
2. Ordnung!

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$$



Projekt 5

- Pendel

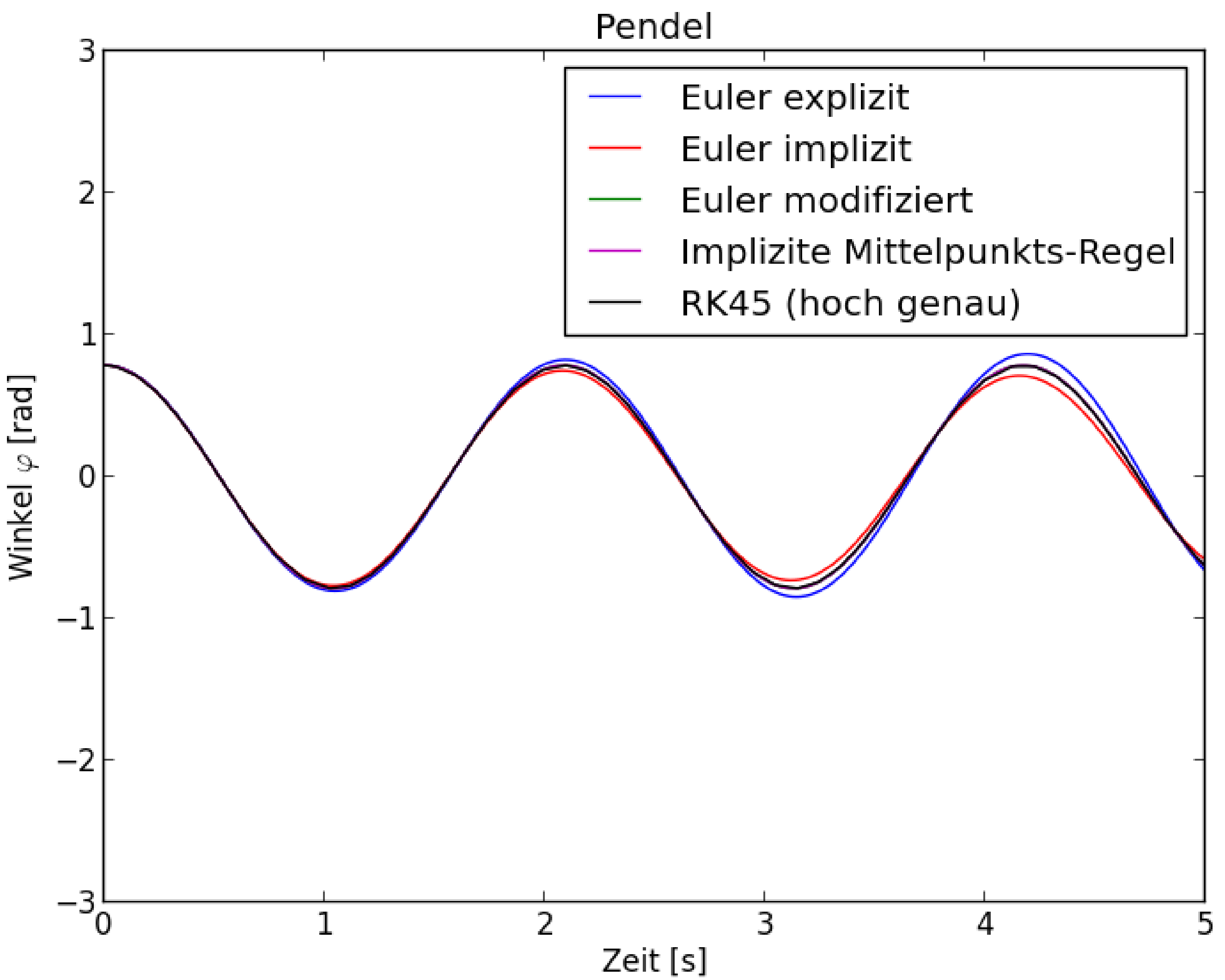
1) Umschreiben in System 1. Ordnung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{\varphi}_1 = ...$$

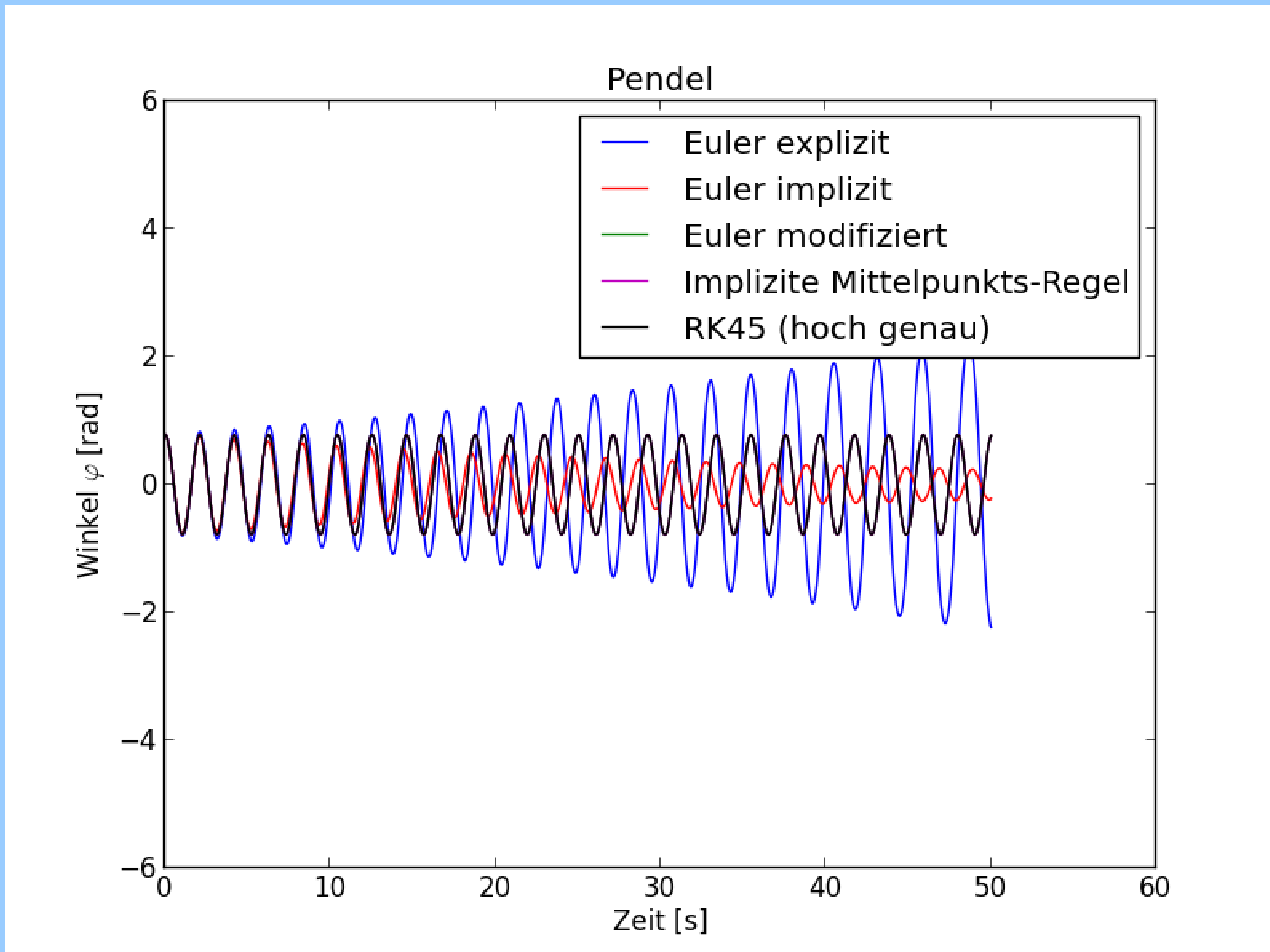
2) Loese das System mit den verschiedenen Verfahren die wir kennengelernt haben
Anfangsbedingungen: freie Wahl!

3) Untersuche den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie (potentielle + kinetische)

Projekt 5

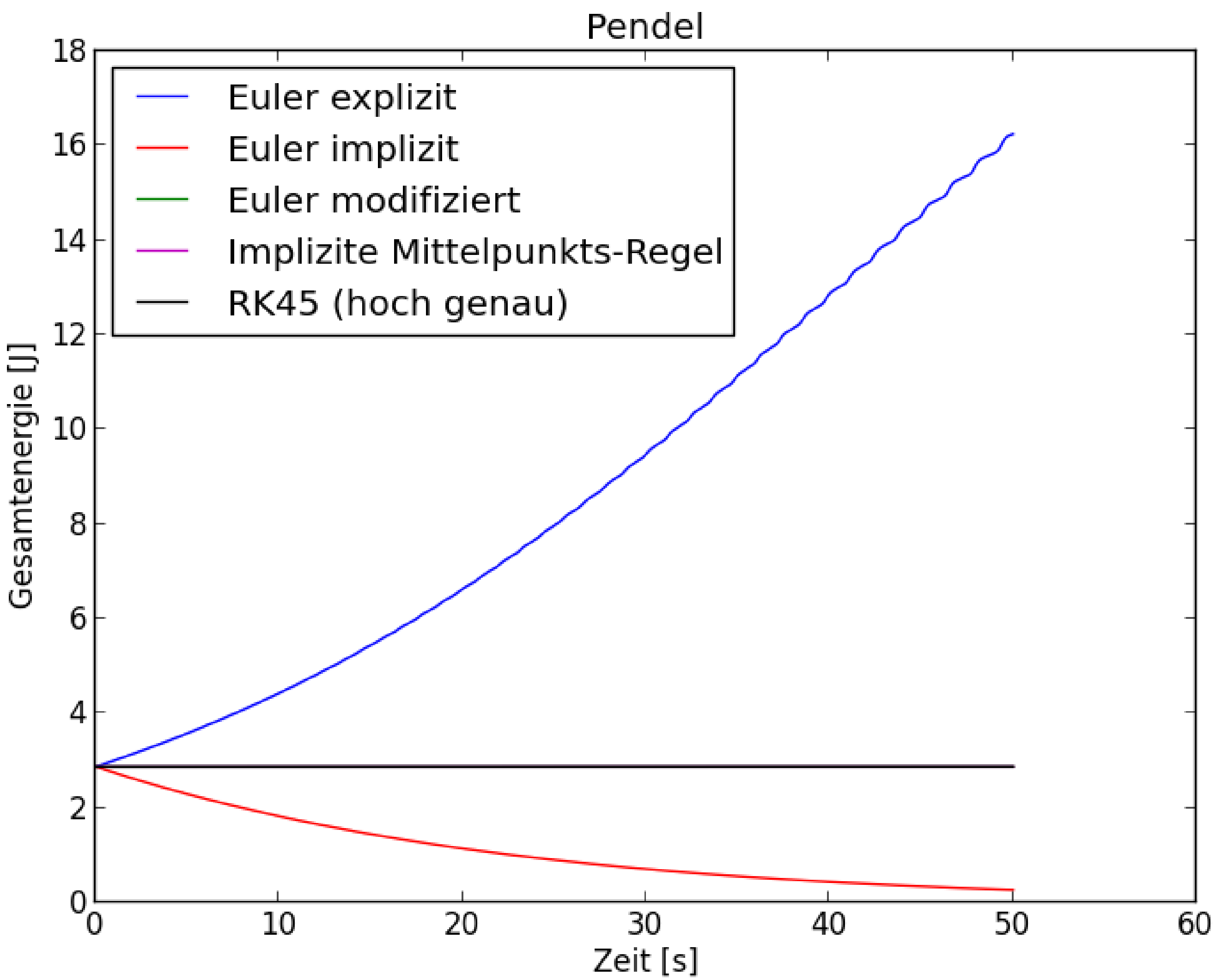

Pendel
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
RK45 (hoch genau)
Winkel φ [rad]
Zeit [s]
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
1
2
3
4
5

Projekt 5



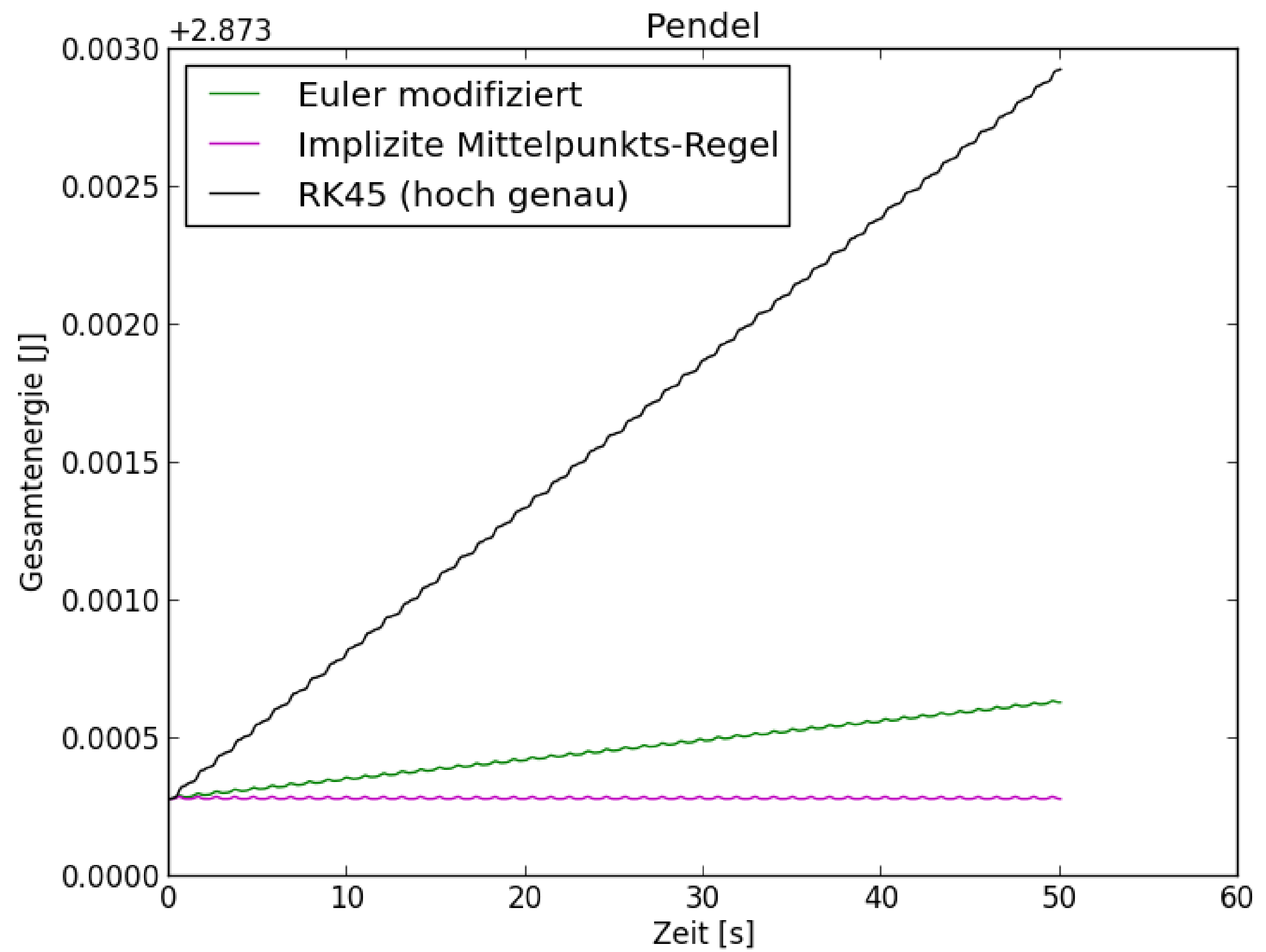
Pendel
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
RK45 (hoch genau)
Winkel φ [rad]
Zeit [s]
6
4
2
0
−2
−4
−6
0
10
20
30
40
50
60

Projekt 5



Pendel
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
RK45 (hoch genau)
Gesamtenergie [J]
Zeit [s]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
0
10
20
30
40
50
60

Projekt 5

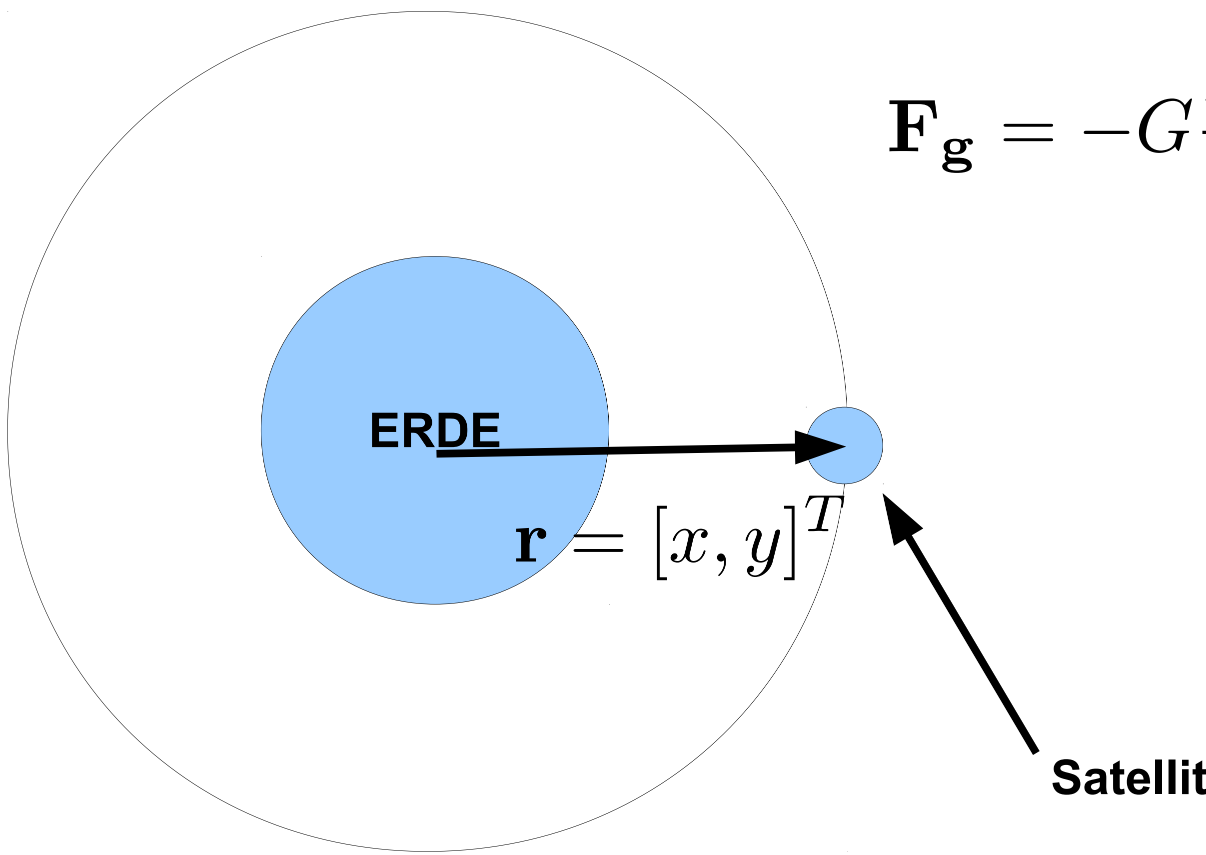


Pendel
+2.873
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
RK45 (hoch genau)
Gesamtenergie [J]
Zeit [s]
0.0000
0.0005
0.0010
0.0015
0.0020
0.0025
0.0030
0
10
20
30
40
50
60

Projekt 6

- Satellit

$$\mathbf{F_g} = -G\frac{M_E m_S}{r^3}\mathbf{r}$$



Projekt 6

- Satellit

  1) Umschreiben in System 1. Ordnung
     ...

  2) Loese das System mit den verschiedenen Verfahren die wir kennengelernt haben
     Anfangsbedingungen: Geostationäre Umlaufbahn...

     Beachte: fuer konstante Kreisbahn Zentripetalkraft = Grav. Kraft!!!

  3) Untersuche den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie (potentielle + kinetische)

  4) Untersuche den zeitlichen Verlauf des Drehimpuls