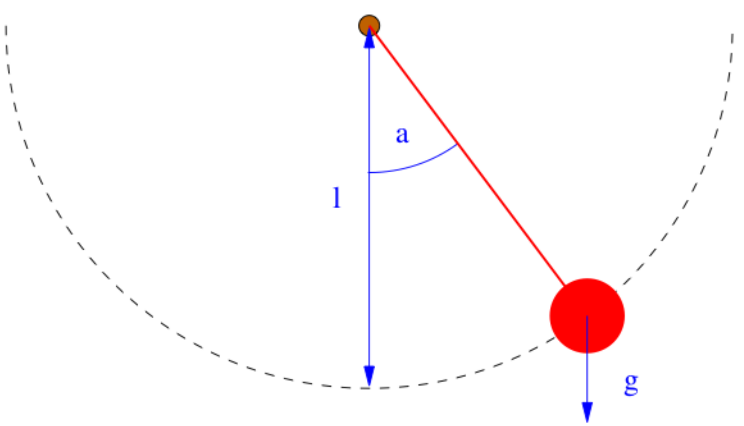
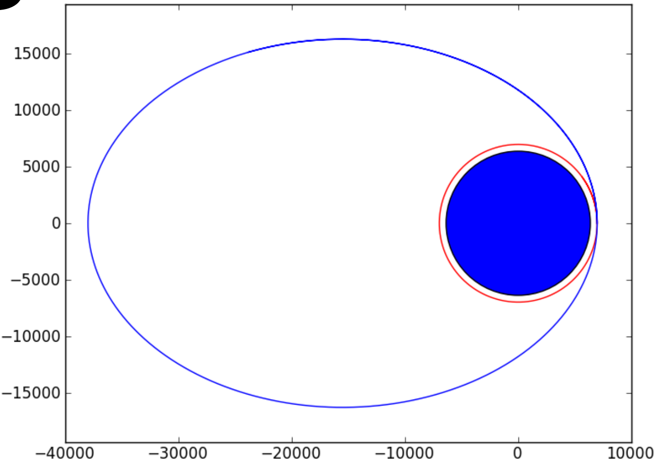
ETHZ Studienwoche 2018

Differentialgleichungen
oder
wie beschreibt man Veränderung





Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t))$$

- DGL zweiter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

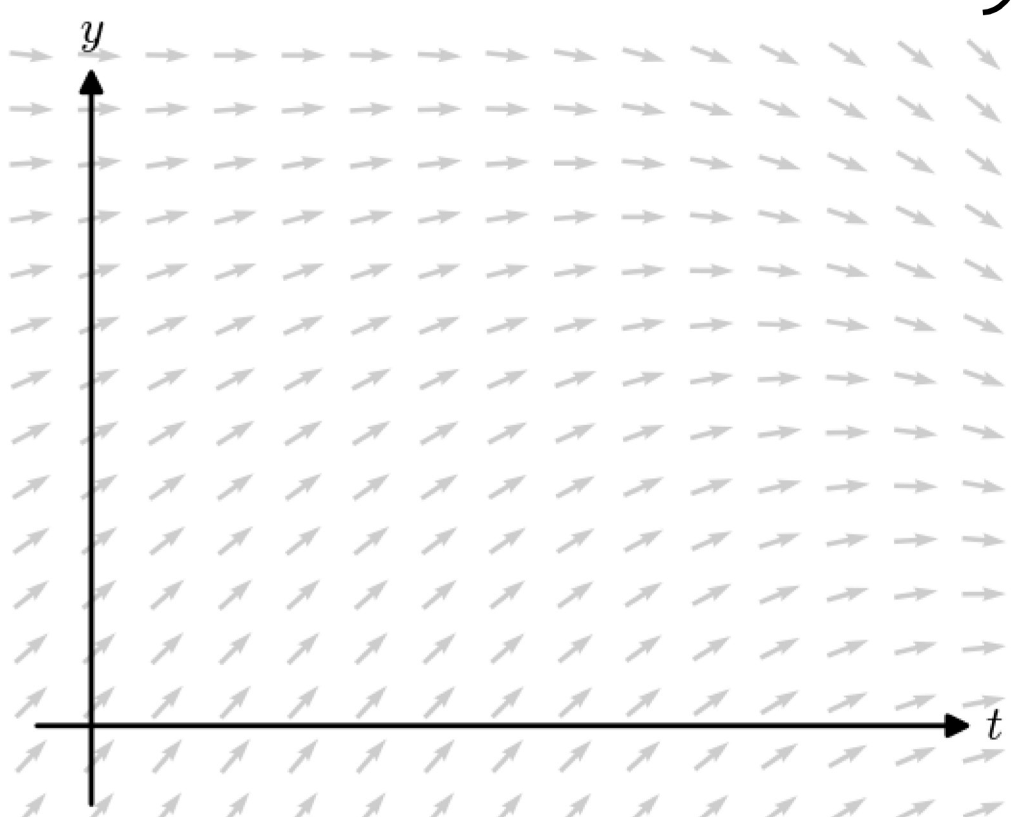
- DGL n-ter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

Einfache numerische Methoden

- DGL erster Ordnung: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t))$
- Anfangswert: $y(t_0) = y_0$

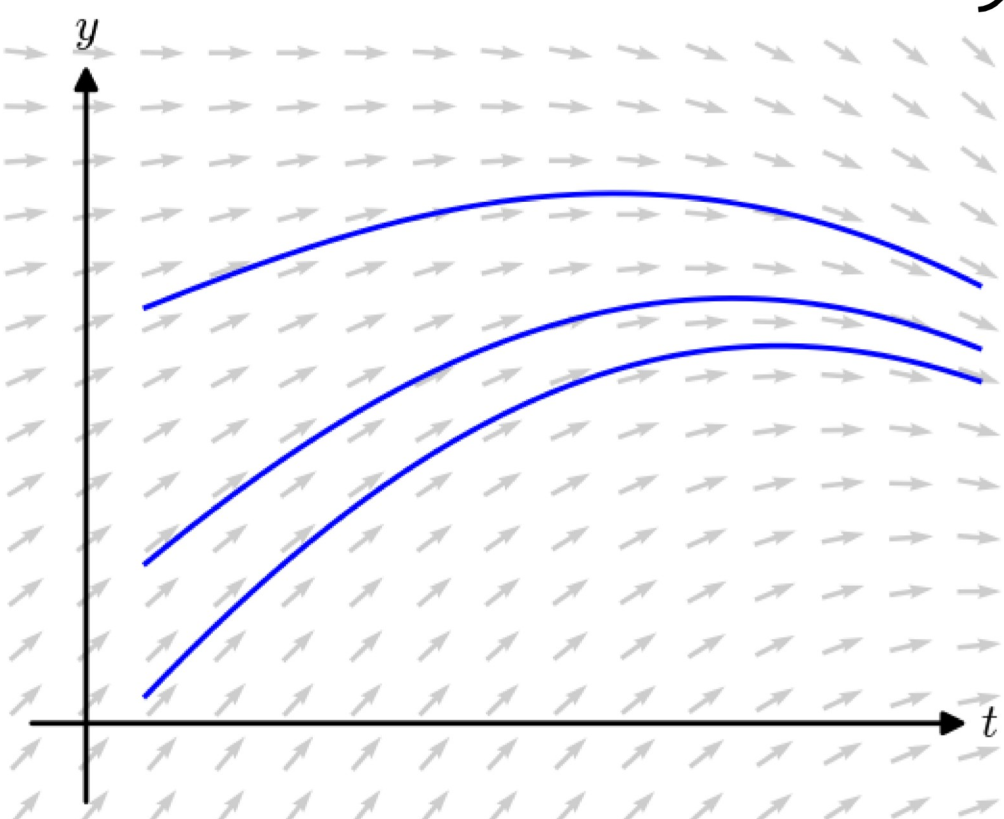
Anfangswertproblem



Einfache numerische Methoden

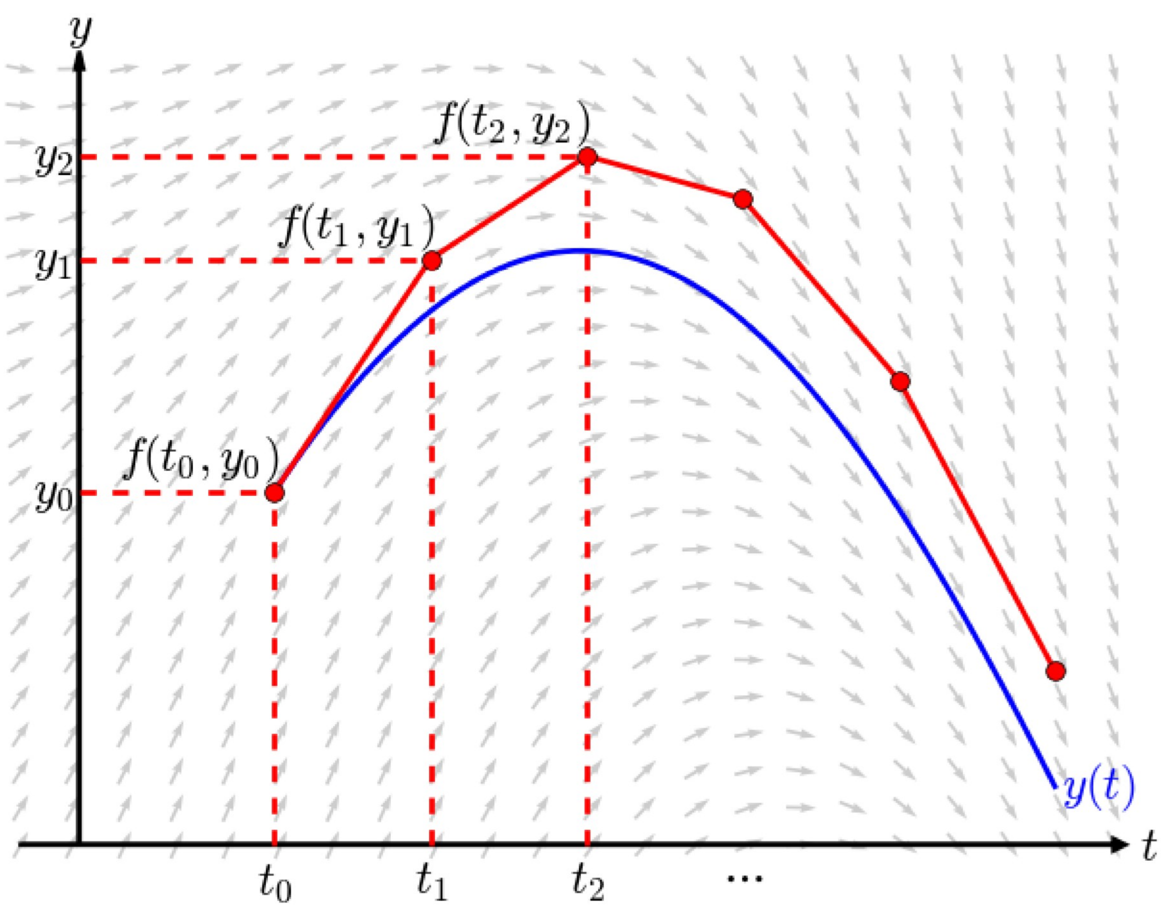
- DGL erster Ordnung: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t))$
- Anfangswert: $y(t_0) = y_0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \textbf{Anfangswertproblem}$$



Euler Verfahren: Explizit

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}\right\}$$

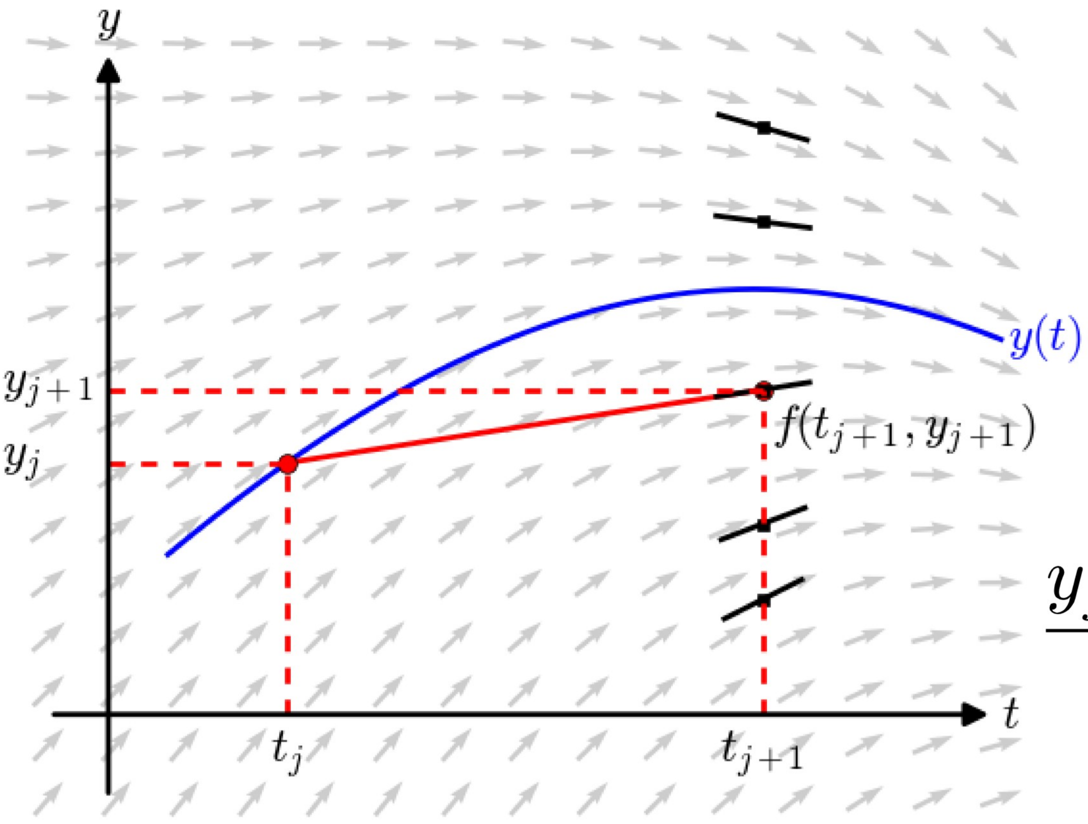


$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = f(t_j, y_j)$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_j, y_j)$$

Euler Verfahren: Implizit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$



$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = f(t_{j+1}, y_{j+1})$$

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} - f(t_{j+1}, y_{j+1}) = 0$$

Modifiziertes Euler Verfahren

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

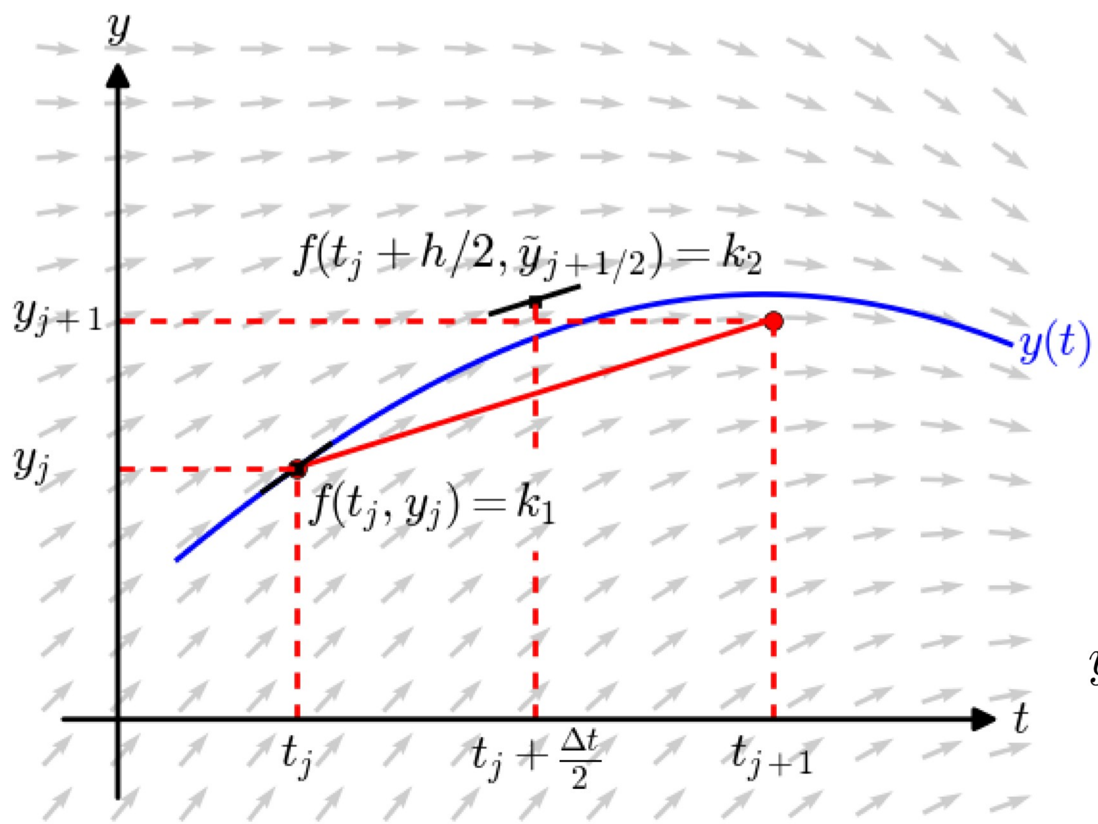
$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{\Delta t}{2} k_1$$

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

$$k_2 = f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

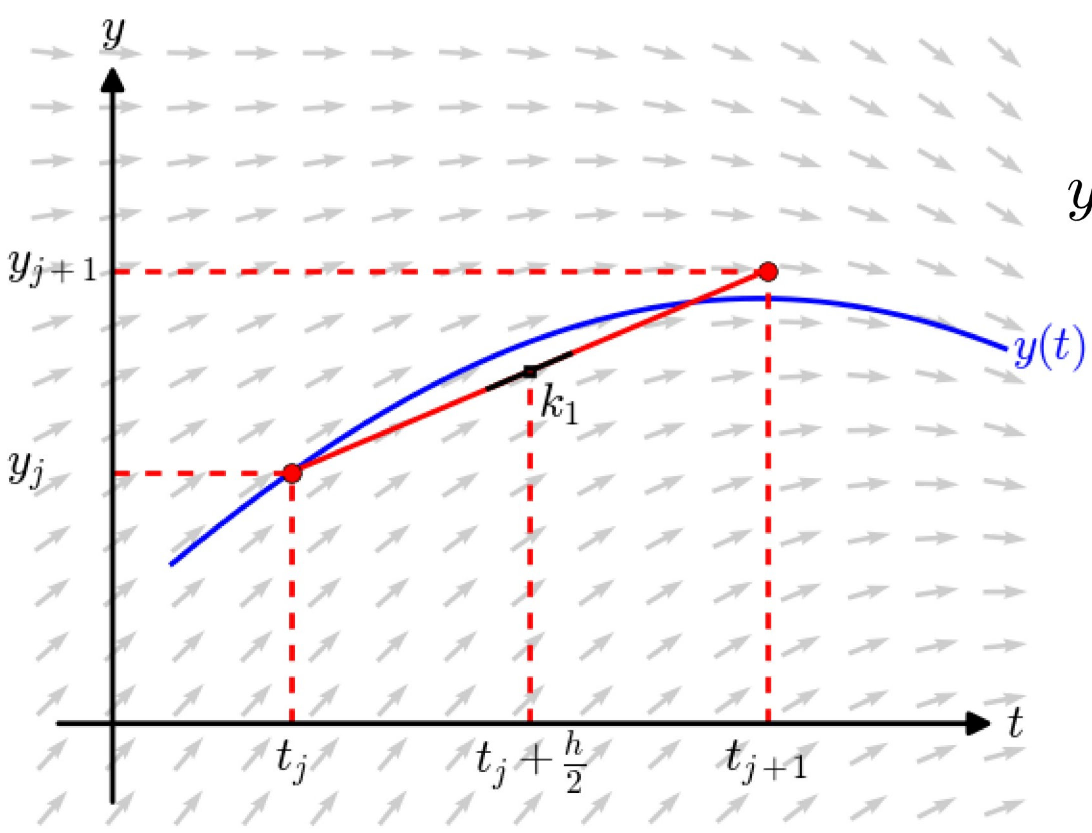
$$y_{j+1} = y_j + \Delta t k_2$$



$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, y_j + \frac{\Delta t}{2} f(t_j, y_j)\right)$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}\right\}$$



$$\frac{\tilde{y}_{j+1/2} - y_j}{\Delta t/2} = \overbrace{f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})}^{k_1}$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$\begin{aligned} y_{j+1} = y_j & \\ & + \Delta t f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)\end{aligned}$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\tilde{y}_{j+1/2} - y_j}{\Delta t/2} = \overbrace{f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})}^{k_1}$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{\Delta t}{2} f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2})$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = \frac{y_j}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\Big(y_j + \Delta t f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1/2})\Big)}_{y_{j+1}}$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$$

$$\begin{aligned} y_{j+1} = {} & y_j \\ & + \Delta t f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)\end{aligned}$$

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2)$$
$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1)$$

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2)\\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1)\end{aligned}\right\}$$

Zwei **gekoppelte** Diff.-Gleichungen erster Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} \\ \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix} \right\}$$

Diff.-Gleichungs **System** erster Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})}\right\} \text{Diff.-Gleichungs } \textbf{System} \text{ erster Ordnung}$$

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Lotka-Volterra-Gleichungen

...Oft nur Raeuber-Beute Modell genannt

- Modell der Wechselwirkung von Raeuber- und Beutepopulation

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\[2em] \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} +N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ -N_2(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{bmatrix}\end{array}\right\}$$

Diff.-Gleichungs **System** erster Ordnung

N_1 ... Anzahl Beutelebewesen

N_2 ... Anzahl Raeuber

ϵ_1 ... Geburtsrate der Beute

ϵ_2 ... Sterberate der Raeuber

γ_1 ... Sterberate der Beute pro Raeuber

γ_2 ... Geburtsrate der Raeuber pro Beute

Projekt 4

- Loese die Lotka-Volterra Diff.-Gl. Mit

$$\epsilon_1 = 1 \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} \quad \gamma_1 = 0.05 \quad \gamma_2 = 0.02$$

$$N_1(t=0) = 80 \quad N_2(t=0) = 40$$

bis Zeit $t = 20$

- Verwende: modifiziertes Euler-Verfahren

Projekt 4

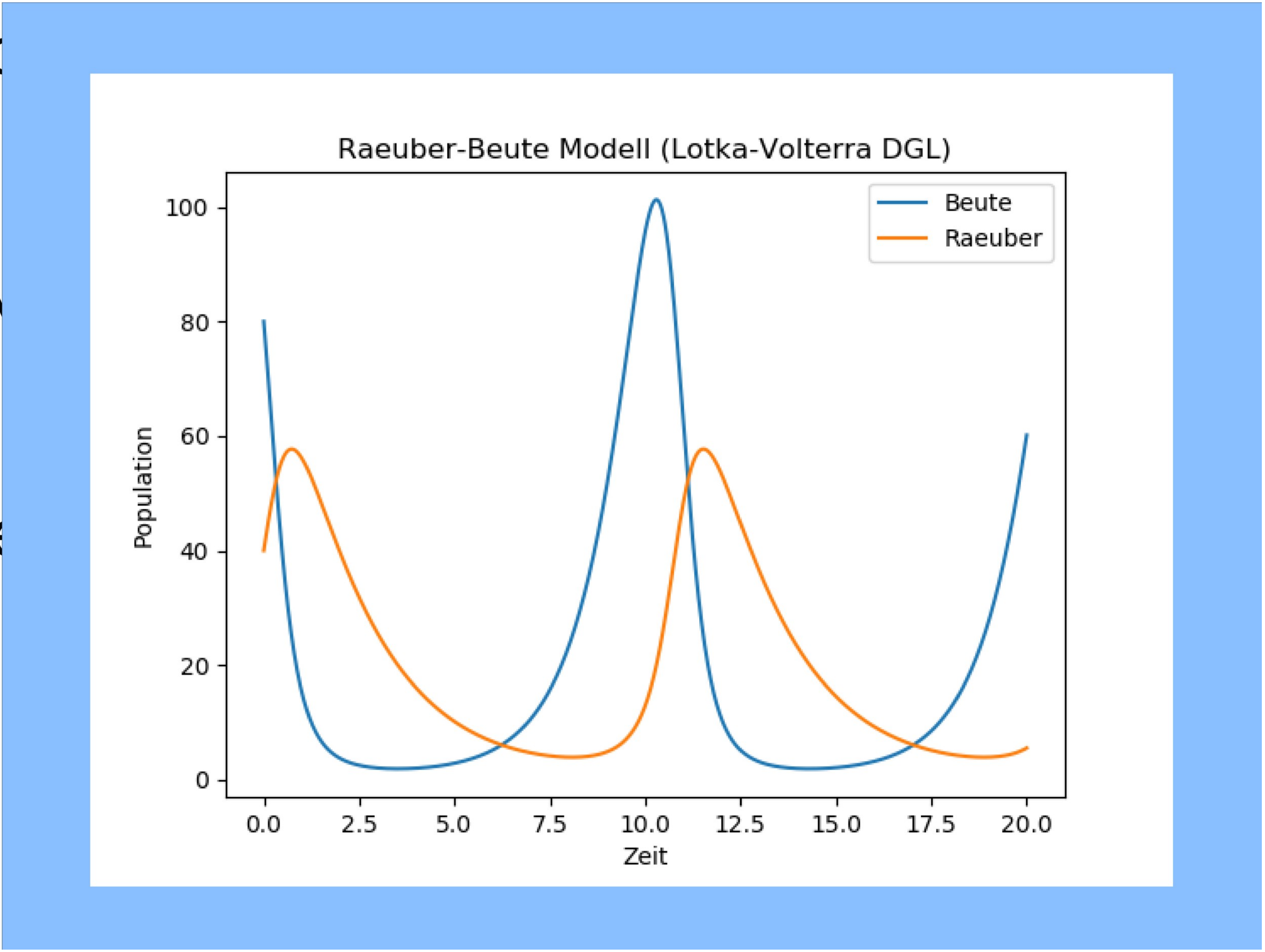
- Lo

ϵ_1

N

bi

- Ve



System von Diff.-Gl.

- System n-ter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^n \mathbf{y}}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, \mathbf{y}(\mathbf{t}), \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{y}}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, ..., y_m]^T$$

- Beispiel: System 2. Ordnung

$$[x, y]^T$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}$$

$$[F_x, F_y]^T$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

$(z_0 = y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}t} = z_1 \;,\; \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = z_2 \quad \ldots \quad \dfrac{\mathrm{d}z_{n-2}}{\mathrm{d}t} = z_{n-1} \\[2em] \dfrac{\mathrm{d}z_{n-1}}{\mathrm{d}t} = f\left(t, z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}\right) \end{cases}$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} = \left[z_0, z_1, z_2, ...z_{n-2}, z_{n-1}\right]^T \\ \\ \mathbf{h} = \left[z_1, z_2, ..., z_{n-1}, f(t, z_0, z_1, ..., z_{n-1})\right]^T \end{array} \right.$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Beispiel: $$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -mg$$

$$z_0 = x$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}t} = z_1 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = -g \end{array}\right.$$

Geschwindigkeit!

$$\mathbf{z} = [z_0, z_1]^T$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{h}$$

$$\mathbf{h} = [z_1, -g]^T$$

Umschreiben in System 1. Ordnung

- Beispiel: $$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} = -2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y^2 - e^t$$

Oder mit “Strich” Notation: $y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t$

$$(z_0 = y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}t} = z_1 \;, \; \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = z_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = -2z_2 + z_1 + z_0^2 - e^t \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{h} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -2z_2 + z_1 + z_0^2 - e^t \end{bmatrix}$$

Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)$$ **Explizit**

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{y}_{j+1})$$ **Implizit**

Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)$$

Explizit

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{y}_{j+1})$$

Implizit

Eventuell muss man ein (Nicht-) Lineares Gleichungs-System loesen!!!

Modifiziertes Euler Verfahren

- Diff.-Gleichung: $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{y}_{j+1/2})$$

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

Explizit!

$$\mathbf{y}_{j+1/2} = \mathbf{y}_j + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)$$

Halber Euler Schritt!

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Diff.-Gleichung: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{y}_{j+1/2})$$

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

Implizit!

$$\mathbf{y}_{j+1/2} = \frac{\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j+1}}{2}$$

Mittelwert zwischen Zeitschritten!

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Diff.-Gleichung: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

$$\frac{\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{y}_{j+1/2})$$

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$$

Implizit!

$$\mathbf{y}_{j+1/2} = \frac{\mathbf{y}_j + \mathbf{y}_{j+1}}{2}$$

Eventuell muss man ein (Nicht-) Lineares Gleichungs-System loesen!!!

Projekt 5

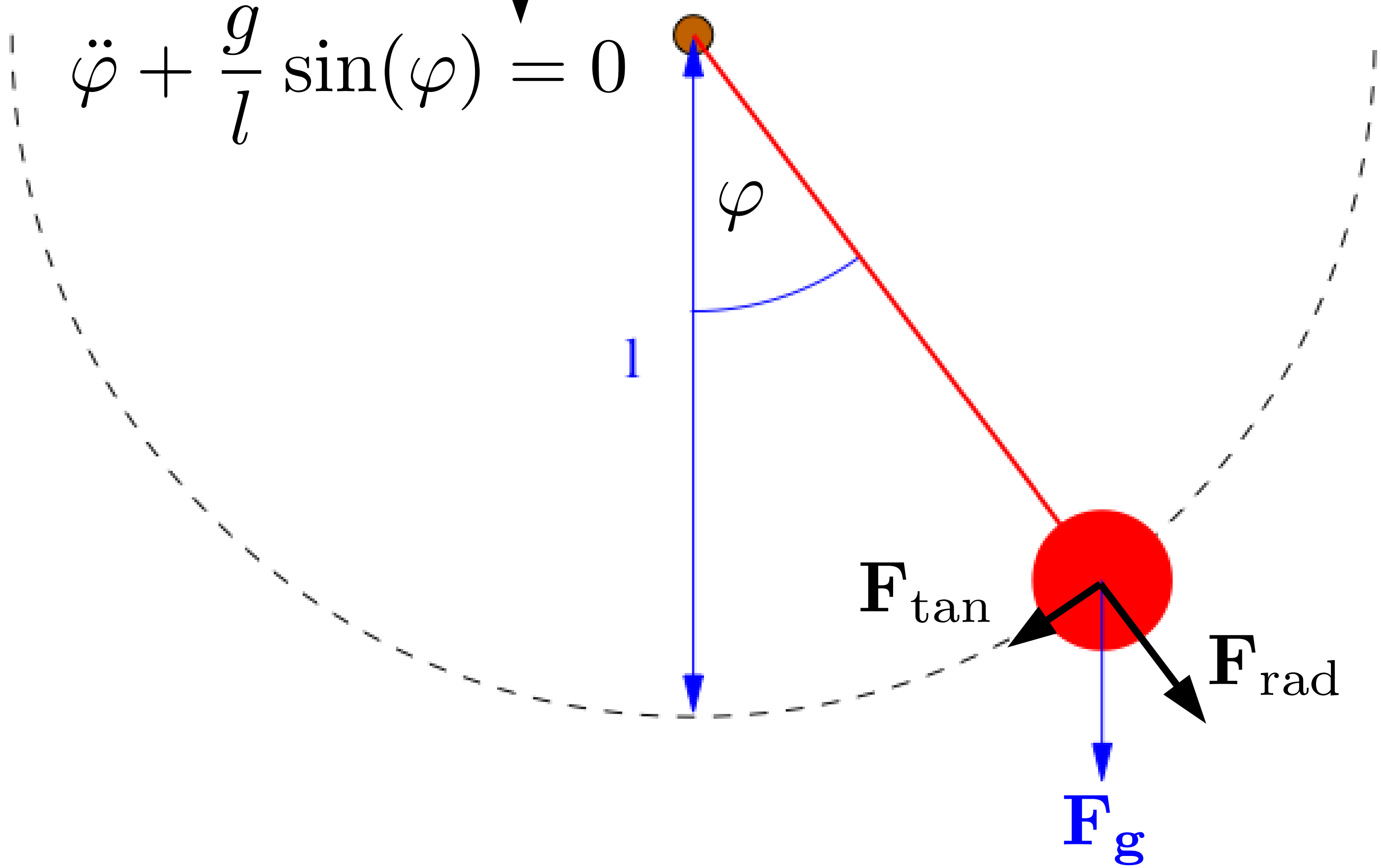
- Pendel

$$F = -mg\sin(\varphi) = ma = ml\ddot{\varphi}$$

Winkelbeschleunigung

Nicht-lineare Diff.-Gl.
2. Ordnung!

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$$



Projekt 5

- Pendel

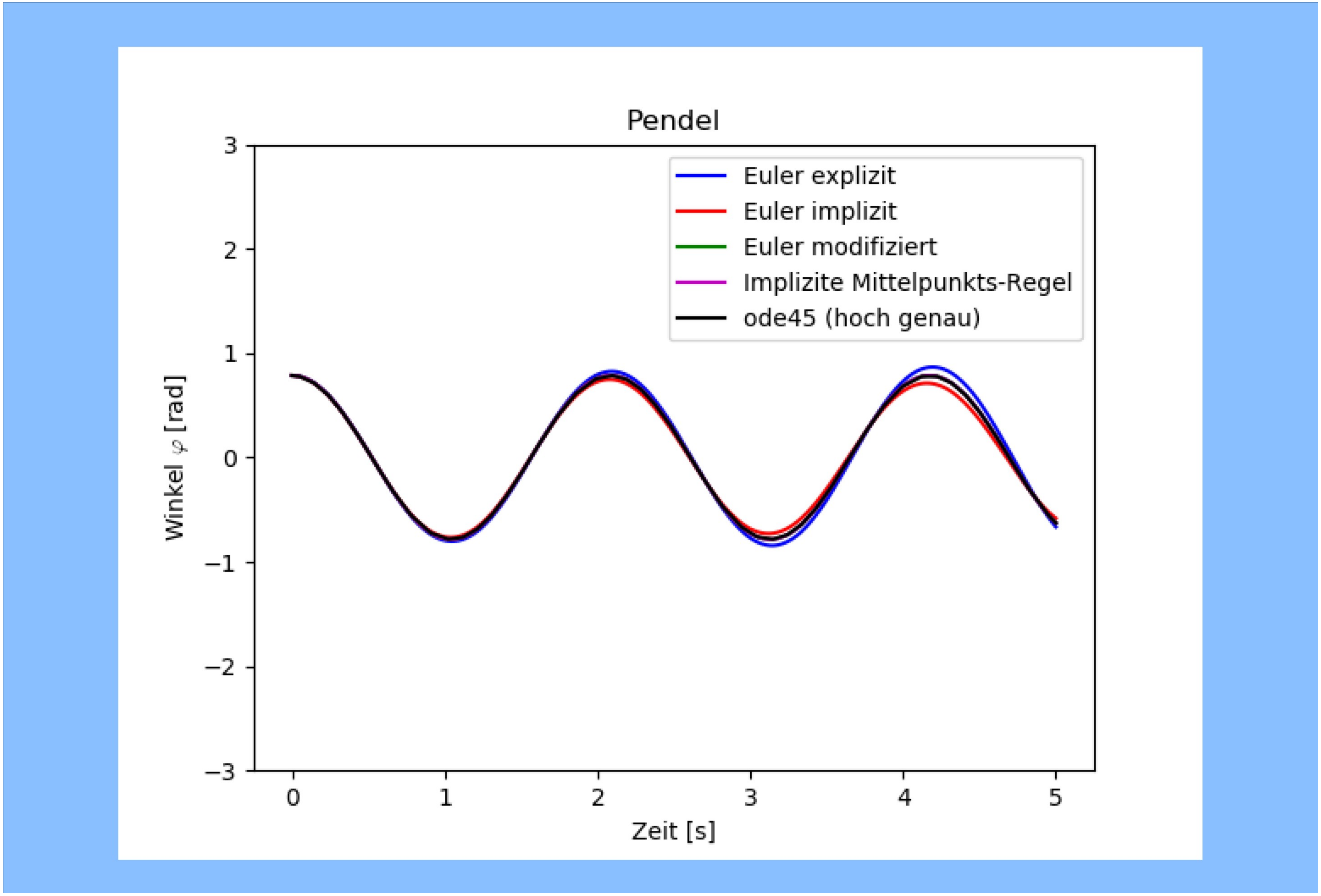
1)Umschreiben in System 1. Ordnung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0 \longrightarrow \dot{\varphi}_1 = ...$$

2)Loese das System mit den verschiedenen Verfahren die wir kennengelernt haben Anfangsbedingungen: freie Wahl!

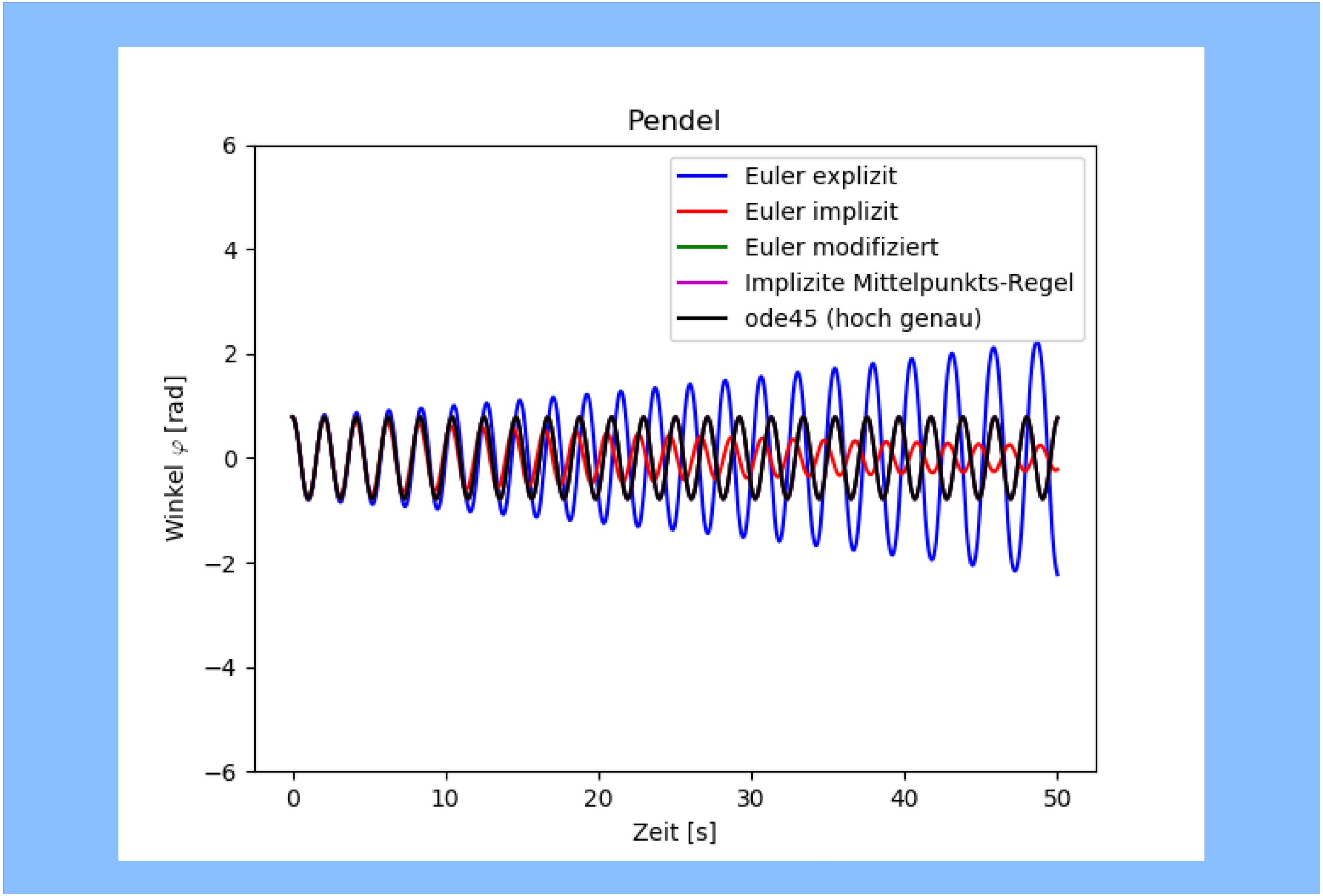
3)Untersuche den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie (potentielle + kinetische)

Projekt 5



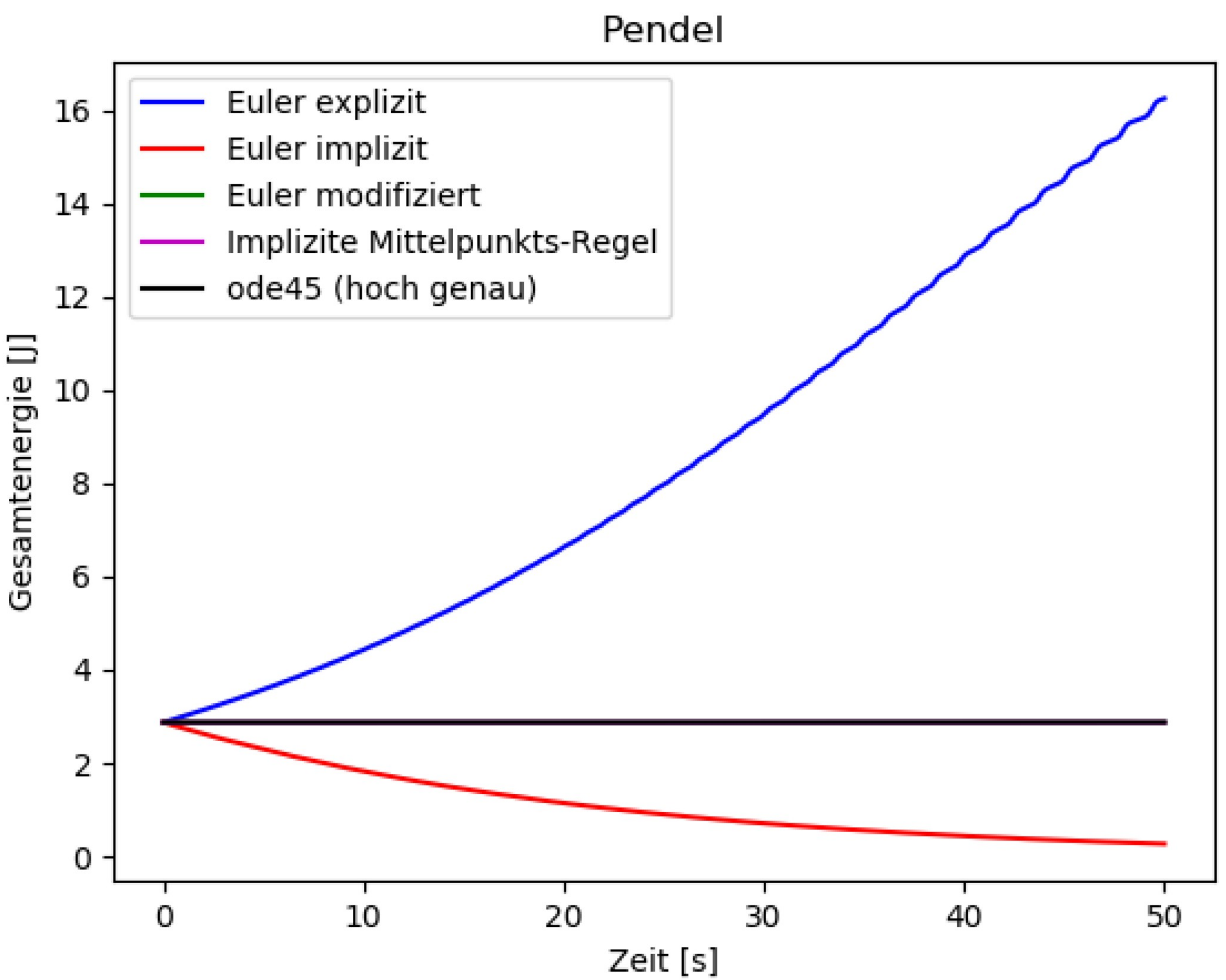
Pendel
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
ode45 (hoch genau)
Winkel φ [rad]
Zeit [s]
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
1
2
3
4
5

Projekt 5



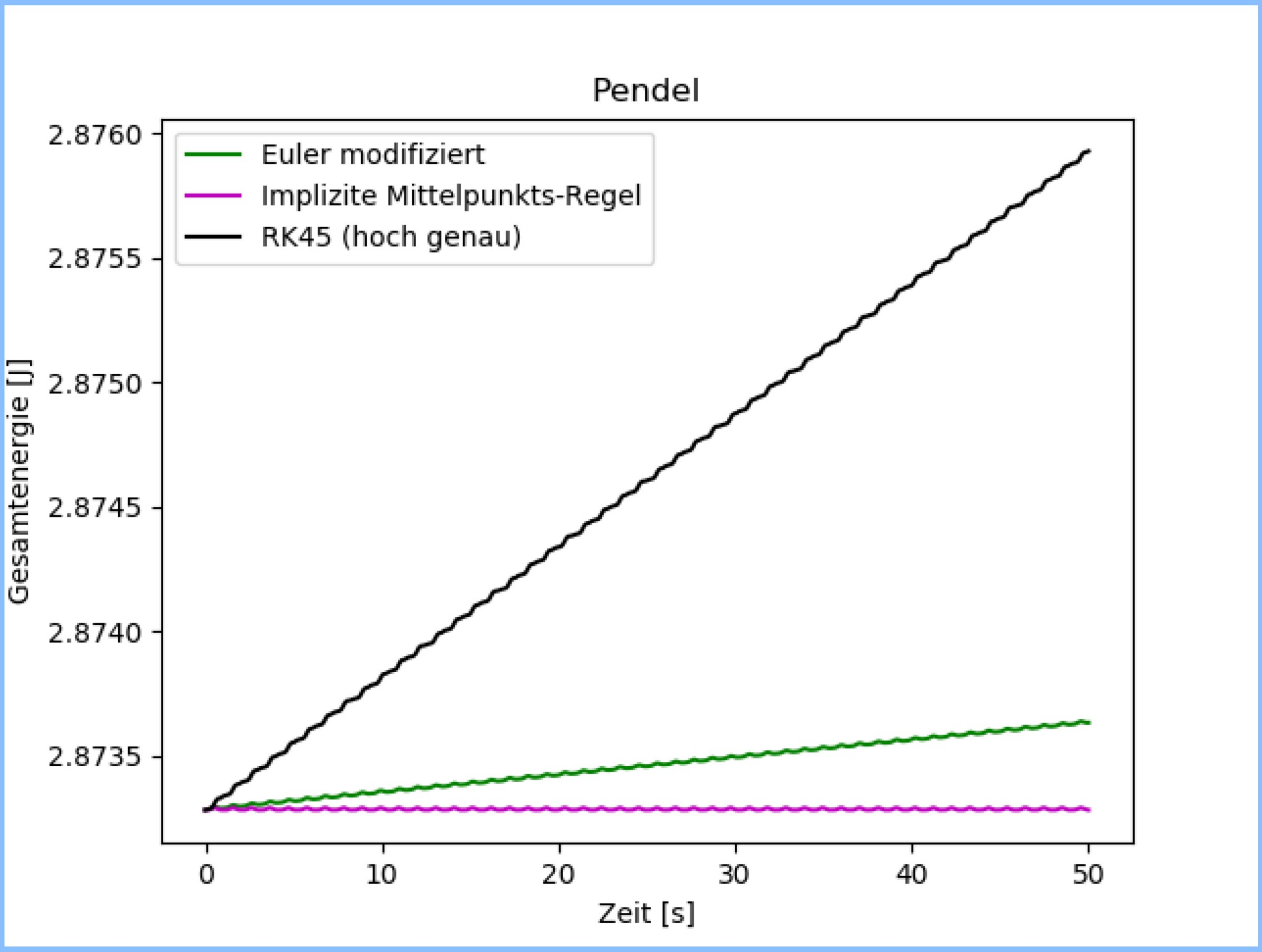
Pendel
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
ode45 (hoch genau)
Winkel φ [rad]
Zeit [s]
6
4
2
0
−2
−4
−6
0
10
20
30
40
50

Projekt 5



Pendel
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
ode45 (hoch genau)
Gesamtenergie [J]
Zeit [s]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
0
10
20
30
40
50

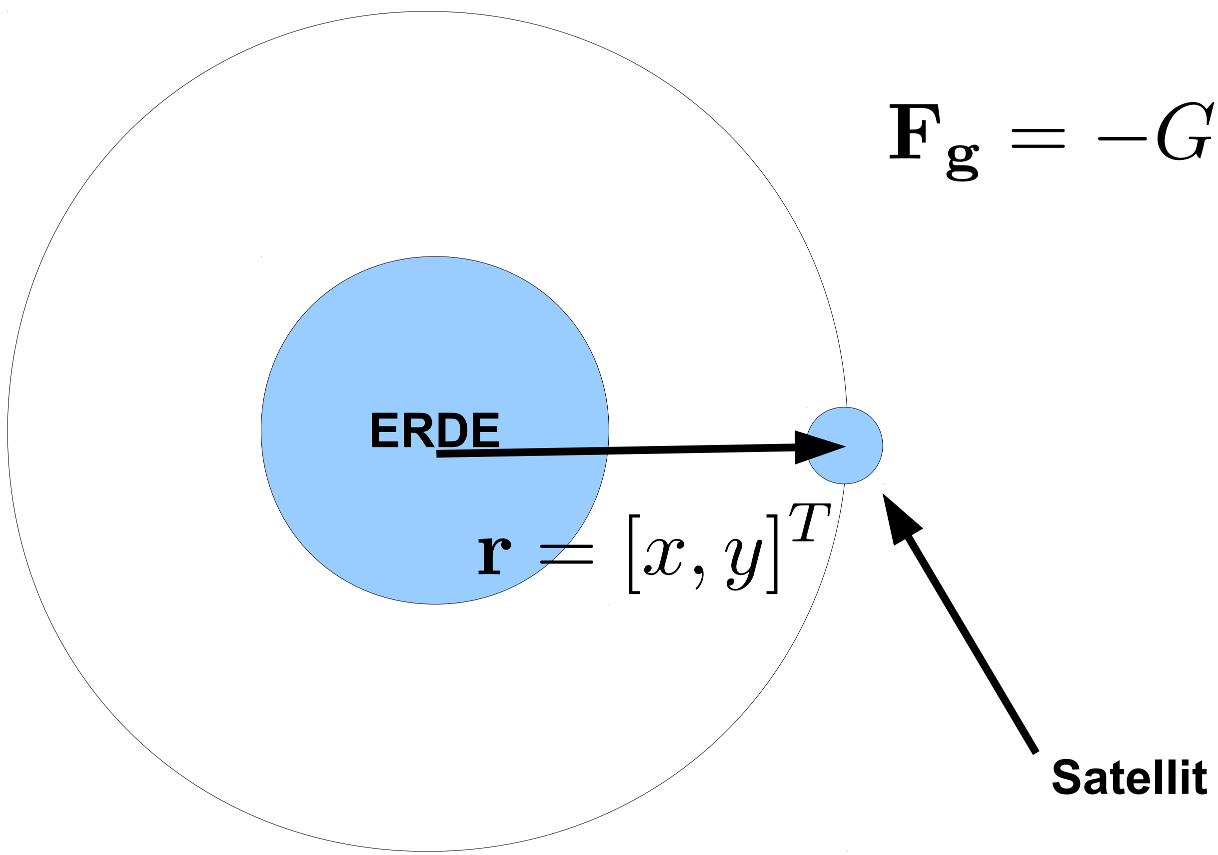
Projekt 5



Pendel
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunkts-Regel
RK45 (hoch genau)
Gesamtenergie [J]
2.8760
2.8755
2.8750
2.8745
2.8740
2.8735
0
10
20
30
40
50
Zeit [s]

Projekt 6

- Satellit



$$\mathbf{F_g} = -G\frac{M_E m_S}{r^3}\mathbf{r}$$

Projekt 6

- Satellit

1) Umschreiben in System 1. Ordnung
   ...

2) Loese das System mit den verschiedenen Verfahren die wir kennengelernt haben
   Anfangsbedingungen: Geostationäre Umlaufbahn...

   Beachte: fuer konstante Kreisbahn Zentripetalkraft = Grav. Kraft!!!

3) Untersuche den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie (potentielle + kinetische)

4) Untersuche den zeitlichen Verlauf des Drehimpuls