

# Ausgewählte Themen der Funktionentheorie

Philipp Zimmermann

5. Januar 2017

## **Abstract**

Skriptum zur Vorlesung "Ausgewählte Themen der Funktionentheorie", die im Herbstsemester 2016 von Professor H. Knörrer an der ETH Zürich gehalten wurde.

Bemerkung: Kapitel 2 überarbeitet.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Maximumprinzip, Sätze von Phragmen-Lindelöf und Konvergenzsätze in der Funktionentheorie</b>	<b>6</b>
1.1	Maximumprinzip . . . . .	6
1.2	Das Schwarz'sche Lemma . . . . .	9
1.3	Hadamards Dreikreisesatz . . . . .	11
1.4	Satz von Borel-Carathéodory . . . . .	12
1.5	Formel und Ungleichung von Jensen . . . . .	13
1.6	Gleichmässige, lokal-gleichmässige, kompakte und stetige Konvergenz . . .	16
1.7	Sätze von Arzéla-Ascoli, Montel und Vitali . . . . .	20
1.8	Die Sätze von Phragmen und Lindelöf . . . . .	28
1.8.1	Drei Verallgemeinerungen des Maximumprinzips . . . . .	28
1.8.2	Die Phragmen-Lindelöf Winkelfunktion $h(\theta)$ . . . . .	31
1.8.3	Der Satz von Carlson . . . . .	33
1.9	Ein paar Anwendungen . . . . .	34
1.9.1	Riemann'sche $\zeta$ -Funktion und Lindelöf'sche Vermutung . . . . .	34
1.9.2	Lindelöf'sche Vermutung und ihre Konsequenzen . . . . .	36
1.9.3	Der Satz von Paley-Wiener . . . . .	38
1.9.4	Green'sche Funktionen in der Vielteilchentheorie* . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Hypergeometrische Funktionen</b>	<b>43</b>
2.1	Die Gamma-Funktion . . . . .	43
2.1.1	Definition der Gamma-Funktion und die Partialbruchdarstellung .	43
2.1.2	Zwei Anwendungen des Satzes von Vitali und ein zweiter Beweis für die Konvergenz des $\Gamma$ -Integrals* . . . . .	46
2.1.3	Elementare Eigenschaften der Gamma-Funktion . . . . .	48
2.1.4	Asymptotik der Gamma-Funktion . . . . .	51
2.1.5	Die Beta-Funktion (Euler-Integral der ersten Art) . . . . .	52
2.1.6	Die Legendre'sche Verdoppelungsformel . . . . .	53
2.2	Die Produktdarstellung der Gamma-Funktion . . . . .	54
2.3	Die Reihenentwicklung der Gamma-Funktion . . . . .	56
2.4	Konturintegraldarstellung von Hankel . . . . .	59
2.5	Mellin-Transformation . . . . .	61
2.6	Hypergeometrische Reihe . . . . .	63
2.6.1	Spezialfälle der hypergeometrischen Funktion . . . . .	64
2.6.2	Pochhammer-Integral . . . . .	67
2.6.3	Gauss'sche Summenformel . . . . .	68
2.6.4	Konfluente hypergeometrische Reihe (Kummer'sche Funktion) . .	70
2.7	Differentialgleichungen . . . . .	72
2.7.1	Hypergeometrische Gleichung und Lösungen um den Punkt $z=0$ .	72
2.7.2	Einschub: Reguläre singuläre Punkte . . . . .	73
2.7.3	Die Lösung um $z=1$ und ihre Relation zur Lösung in der Nähe von $z=0$ . . . . .	75

2.7.4	Konfluente hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	76
2.7.5	Die Legendre-Polynome . . . . .	77
2.7.6	Das Integral von Barnes . . . . .	77
2.8	Die Monodromie-Darstellung . . . . .	82
2.8.1	Analytische Fortsetzung längs Kreisketten und Wegen ([3])* . . . .	82
2.8.2	Der Cauchy'sche Fundamentalsatz und die Monodromie-Darstellung ([6]) . . . . .	91
2.8.3	Die Monodromie-Darstellung der hypergeometrischen Gleichung und das Schwarz'sche Dreieck . . . . .	93
2.9	Kettenbrüche in der Funktionentheorie . . . . .	98
2.9.1	Nachbarschafts-Relationen und ein Einblick in unendliche Ketten- brüche . . . . .	98
2.9.2	Äquivalenz zwischen Reihen und Kettenbrüchen* . . . . .	108
2.9.3	Gleichmässige Konvergenz von Kettenbrüchen . . . . .	110
2.9.4	C-Kettenbrüche und korrespondierende Reihe . . . . .	111
2.9.5	Limitärperiodische Kettenbrüche . . . . .	120
<b>3</b>	<b>Randwertprobleme holomorpher Funktionen</b>	<b>128</b>
3.1	Cayley-Abbildung und ein paar nützliche Formeln . . . . .	128
3.2	Blasche-Produkte ([2]) . . . . .	129
3.2.1	Unendliche Produkte . . . . .	130
3.2.2	Divisoren . . . . .	135
3.2.3	Beschränkte Funktionen in $\mathbb{E}$ und Blaschke-Produkte . . . . .	138
3.3	Hardy-Funktionen . . . . .	150
3.3.1	Vorbereitendes Material zu $L^p$ -Räumen und Fourier-Transformation	150
3.3.2	Hardy-Funktionen auf der oberen Halbebene . . . . .	153
3.3.3	Hardy-Funktionen auf der Einheitskreisscheibe . . . . .	165
3.3.4	Poisson-Kern und Herglotz Darstellung . . . . .	169
3.3.5	Innere und äussere Funktionen . . . . .	172

## Verwendete Kurznotation im Vorlesungsskript:

- Für den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl  $z := x + iy \in \mathbb{C}$  schreiben wir  $x =: \operatorname{Re}(z)$ ,  $y =: \operatorname{Im}(z)$ , sowie für die komplexe Konjugation (involutorischer Körperautomorphismus von  $\mathbb{C}$ )  $\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z := x + iy \mapsto \tau(z) := \bar{z} := x - iy$ .
- Obere Halbebene:  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$
- Untere Halbebene:  $\mathbb{H}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}(z) < 0\}$
- Rechte Halbebene:  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .
- Geschlitzte Ebene entlang negativer Achse:  $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ .
- Offener Ball um  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit Radius  $r$ :  $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$
- Abgeschlossener Ball um  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit Radius  $r$ :  $\bar{B}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$
- Einheitskreis  $\mathbb{E} := B_1(0)$
- Wir benutzen folgende Abkürzung für bestimmte Teilmengen einer Menge  $D \subset \mathbb{C}$ :

$$\operatorname{Open}(D) := \{O \subset D \mid O \text{ offen und nicht-leer}\}$$

$$\operatorname{Closed}(D) := \{A \subset D \mid A \text{ abgeschlossen und nicht-leer}\}$$

$$\operatorname{Compact}(D) := \{K \subset D \mid K \text{ kompakt und nicht-leer}\}$$

- Die Klasse der stetigen Funktionen von einem metrischen Raum  $(X, d_X)$  in die komplexe Zahlenebene bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}(X)$ .
- Die Klasse der holomorphen Funktionen von einem Bereich  $D \subset \mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  bezeichnen wir mit:  $\mathcal{O}(D)$ .
- Die Supremumsnorm auf der Menge aller beschränkten Funktionen von einer Teilmenge  $A$  des metrischen Raumes  $(X, d)$  in die komplexe Ebene, die durch  $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$  notiert wird, schreiben wir als  $\|f\|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|$ .

## Einführung

Provisorische Themenübersicht:

Eine detailliertere Zusammenstellung der geplanten Themen findet man auf der Homepage <https://people.math.ethz.ch/~knoerrer/Ankuendigung.pdf> von Professor H. Knörrer.

- Konsequenzen des Maximumprinzips  $\rightarrow$  Sätze von Phragmen und Lindelöf  $\rightarrow$  Green'sche Funktionen in quantenstatistischer Physik
- Satz Arzela-Ascoli
- Sätze Montel und Vitali (Konvergenz analytischer Funktionenfolgen)
- Hypergeometrische Funktionen und korrespondierende Differentialgleichung:

$$y'' + \left( \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - 1} \right) y' + \left( \frac{-\alpha\alpha'}{z} - \frac{\gamma\gamma'}{z - 1} + \beta\beta' \right) \frac{y}{z(z - 1)} = 0,$$

wobei  $y = y(z)$  im Allgemeinen eine komplexwertige Funktion ist.

- Randwertprobleme von holomorphen Funktionen in der oberen Halbebene.  
Nevanlinna-Herglotz Funktionen:  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  analytisch  
 $\Rightarrow \exists \mu$  (Borel-Mass):

$$f(z) = b + cz + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right] d\mu(t).$$

# 1 Maximumprinzip, Sätze von Phragmen-Lindelöf und Konvergenzsätze in der Funktionentheorie

## 1.1 Maximumprinzip

Zuallererst wollen wir eine zentrale Aussage der Funktionentheorie, das sogenannte Maximumprinzip, wiederholen und erste Konsequenzen davon diskutieren. Jedoch um dieses beweisen zu können benötigen wir folgenden Satz, der uns sagt wann eine komplexe Wurzelfunktion bzw. ein Logarithmus definiert werden kann.

**Satz 1.1.** (Lokaler Logarithmus / Wurzelfunktion) Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in D$  derart, dass  $f(z_0) \neq 0$ , sowie  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U \subset D$  von  $z_0$  und holomorphe Funktionen  $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für alle  $z \in U$  gilt:

$$\exp(g(z)) = f(z), \quad h(z)^n = f(z).$$

*Beweis.* Da  $f(z_0) \neq 0$  ist, gibt es eine von Null verschiedene komplexe Zahl  $w_0 \in \mathbb{C}$ , so dass

$$\exp(w_0) = f(z_0).$$

Da  $\exp'(w_0) = \exp(w_0) \neq 0$ , gibt es nach dem Satz der lokalen Umkehrabbildung offene Umgebungen  $W \subset \mathbb{C}$  von  $w_0$  und  $V \subset \mathbb{C}$  von  $\exp(w_0)$ , so dass  $\phi := \exp|_W : W \rightarrow V$  eine biholomorphe Abbildung ist. Nun definieren wir

$$U := \{z \in D \mid f(z) \in V\}, \quad g := \phi^{-1} \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dann gilt  $f(z_0) = \exp(w_0) \in V \Rightarrow z_0 \in U$  und die Funktion  $g$  ist holomorph, sowie

$$\exp[g(z)] = \phi(g(z)) = f(z)$$

für jedes  $z \in U$ . Wählen wir nun noch  $h(z) := \exp(g(z)/n)$ , so ist dieser Satz bewiesen.  $\square$

Damit können wir nun das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion auf einem Gebiet charakterisieren.

**Lemma 1.1.** (Lokale Normalform) Sei  $z_0 \in G$ ,  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $z_0$  in  $G$ , so dass

1. die Einschränkung  $f|_U$  konstant ist oder
2. es gibt eine biholomorphe Abbildung  $\Phi : U \rightarrow V$ , wobei  $V$  eine Umgebung des Nullpunkts ist und ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass gilt

$$f|_U = f(z_0) + \Phi^n. \tag{1.1}$$

*Beweis.* (Lemma der lokalen Normalform) Bemerke, dass wenn die erste Aussage gelten würde  $f$  in ganz  $G$  nach dem Identitätssatz konstant wäre. Deshalb wollen wir annehmen  $f \neq \text{const.}$  Sei  $z_0 \in G$ ,  $f(z_0) =: w_0$ , dann betrachte die Funktion  $g(z) := f(z) - w_0$ , welche in  $G$  holomorph ist mit  $g(z_0) = 0$ . Sei zusätzlich  $r > 0$  derart, dass  $B_r(z_0) \subset G$  (ein solches  $r$  existiert, da  $G$  offen ist), damit folgt mit dem Potenzreihenentwicklungssatz ( $g(z_0) = 0$ )

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \forall z \in B_r(z_0),$$

wobei in der Tat der Konvergenzradius der Taylor-Reihe grösser gleich  $r$  sein kann. Nach dem Identitätssatz können nicht alle  $a_k$  null sein, da sonst  $g^{(k)}(z_0) = 0$  und damit  $g \equiv 0$  wäre, jedoch per Annahme  $f \neq \text{const.}$ , weshalb es ein  $n \in \mathbb{N}$  geben muss, so dass

$$\forall k < n : a_k = 0, \quad a_n \neq 0.$$

Daraus folgt, dass die Potenzreihe von  $g$  die Form

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_n (z - z_0)^n \underbrace{\left( 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} (z - z_0) + \dots \right)}_{:=h(z)}$$

hat, wobei die Funktion  $h$  holomorph ist und wir formal den Faktor  $a_n (z - z_0)^n$  ausklammerten. Jedoch wissen wir in der Tat aus der Funktionentheorie-Vorlesung: Sei  $g : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit einer  $n$ -fachen Nullstelle in  $z_0 \in B_r(z_0)$ , dann besitzt die Funktion  $h_1 : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h_1(z) := \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$  eine stetige Fortsetzung  $h_0$  auf  $B_r(z_0)$  mit  $h_0(z_0) \neq 0$ . Nach dem Satz über die Existenz einer lokalen Wurzelfunktion folgt nun, dass es eine holomorphe Funktion  $\psi$  auf einer offenen Umgebung  $U' \subset B_r(z_0)$  von  $z_0$  gibt, so dass  $\psi^n(z) = h(z)$  und damit erhalten wir

$$g(z) = a_n (z - z_0)^n \psi^n(z).$$

Nun definieren wir  $\Phi_1 : U' \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\Phi_1(z) = a_n^{1/n} (z - z_0) \psi(z)$ . Dann sehen wir, dass gilt

$$f(z) = f(z_0) + \Phi_1^n(z), \quad \text{mit } \Phi_1(z_0) = 0, \quad \Phi_1'(z_0) = a_n^{1/n} \psi(z_0) \neq 0.$$

Deshalb können wir den Satz der lokalen Umkehrfunktion verwenden und damit gibt es eine offene Umgebung  $U \subset U'$  von  $z_0$  und  $V \subset \mathbb{C}$  von 0, so dass  $\Phi := \Phi_1|_U : U \rightarrow V$  eine biholomorphe Abbildung ist.  $\square$

Aus dem Beweis sehen wir, dass die natürliche Zahl  $n$  gerade die Vielfachheit von  $f$  in  $z_0$  ist.

Nun formulieren wir das Maximumprinzip und beweisen dieses.

**Satz 1.2.** (Maximumprinzip) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet (offen, zusammenhängend). Wenn eine holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0 \in G$  ein Betragsmaximum hat, so ist sie konstant, d.h.  $\forall z \in G : |f(z_0)| \geq |f(z)|$ .

*Bemerkung 1.1.* Wir machen zwei Bemerkungen zum Maximumprinzip:

1. Wegen des Identitätssatzes genügt es vorauszusetzen, dass  $f$  nur ein lokales Betragsmaximum hat.
2. *Version des Maximumprinzips für Kompakta:*

Sei  $K \subset \mathbb{C}$  ein Kompaktum in der komplexen Ebene und  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, deren Einschränkung auf  $\overset{\circ}{K}$  holomorph ist. Dann gilt

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)|. \quad (1.2)$$

Die zweite Bemerkung ist eine Folgerung des **allgemeinen Extremalwertsatzes**:

Sei eine stetige, reell-wertige Funktion  $f$  auf einem nicht-leeren, kompakten, topologischen Raum  $(E, \mathcal{T})$  gegeben. Dann gibt es Punkte  $x_{min}, x_{max} \in E$ , so dass für alle  $x \in E$  gilt:  $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ .

*Beweis.* Da per Voraussetzung  $f$  stetig ist und  $E$  kompakt, ist das Bild  $A := f(E)$  ebenfalls kompakt. Nun zeigen wir, dass  $A$  ein grösstes Element  $M$  und ein kleinstes Element  $m$  hat. Da dann  $m, M \in A$  muss es  $x_{min}, x_{max} \in E$  geben mit  $m = f(x_{min}), M = f(x_{max})$ . Wenn  $A$  kein grösstes Element hätte, dann wäre die Familie  $\{(-\infty, a)\}_{a \in A}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Da aber  $A$  kompakt ist, würde eine endliche Teilüberdeckung  $\{(-\infty, a_i)\}_{i=1}^n$  existieren. Wenn nun  $a_j$  das grösste Element in  $a_1, \dots, a_n$  wäre, dann wäre  $a_j$  nicht in der Teilüberdeckung enthalten. Damit kann die angegebene Teilüberdeckung nicht  $A$  überdecken und es muss ein grösstes Element geben. Eine ähnliche Argumentation zeigt, dass  $A$  ein kleinstes Element hat. Anhand des Beweises sehen wir, dass anstatt  $\mathbb{R}$  als Zielmenge eine beliebige geordnete Menge betrachtet werden kann.  $\square$

Dieser Satz sagt uns also, dass  $f$  ein Betragsmaximum hat und wegen dem Maximumprinzip wird dieses sicherlich bereits auf dem Rand angenommen.

*Beweis.* (Maximumprinzip)

Wir nehmen an, dass  $f$  nicht konstant ist und ein Betragsmaximum in  $z_0$  hat. Dann gibt es nach dem Lemma über die lokale Normalform offene Umgebungen  $U, V$  von  $z_0$  bzw.  $0$  und eine biholomorphe Abbildung  $\Phi : U \rightarrow V$ , so dass  $f|_U = f(z_0) + \Phi^n$ . Aber dann kann  $f$  kein Maximum in  $z_0$  haben, also muss  $f$  konstant sein.  $\square$

**Behauptung 1.1.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, sowie  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und gilt

$$\operatorname{Re}(f) = \text{const. oder } \operatorname{Im}(f) = \text{const. oder } |f| = \text{const.}, \quad (1.3)$$

dann ist  $f$  selbst konstant.

*Beweis.* Für die erste Aussage betrachte

$$F_1(z) := \exp f(z) \Rightarrow |F_1(z)| = \exp \operatorname{Re}(f(z))$$

und wende nun das Maximumprinzip an. Für die zweite Aussage betrachte die Komposition  $F_2 := \exp \circ f \circ \iota$  mit  $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto iz$  und wende wieder das Maximumprinzip an.  $\square$

## 1.2 Das Schwarz'sche Lemma

**Lemma 1.2.** (Schwarz'sches Lemma) Sei  $f : \overline{B}_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und im Innern holomorph. Sei der Nullpunkt ein Fixpunkt der Abbildung und  $\forall z \in \overline{B}_r(0) : |f(z)| \leq M$ , dann gilt

$$|f(z)| \leq M \frac{|z|}{r}, \quad \forall z \in \overline{B}_r(0) \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq \frac{M}{r}. \quad (1.4)$$

*Beweis.* (Schwarz'sches Lemma) Wenn  $f$  konstant wäre, dann müsste  $f$  die Nullfunktion sein und die Aussagen sind dann offensichtlich wahr. Deshalb nehmen wir nun an  $f \neq \text{const}$ . Für  $z \in \partial B_r(0)$  gilt klarerweise die Aussage. Da  $f$  in  $B_r(0)$  holomorph ist, kann sie um  $z_0 = 0$  in eine Potenzreihe entwickelt werden, mit Konvergenzradius mindestens  $r$  und hat die Form

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,$$

da  $a_0 = 0$ . Deshalb ist die Funktion  $\phi : B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\phi(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

holomorph (Riemann'scher Hebbarkeitssatz) und hat Taylorreihe

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k.$$

Für jedes  $\rho \in (0, r)$  folgt aus  $|f(z)| \leq M$  für  $z \in \partial B_\rho(0)$ :

$$|\phi(z)| \leq \sup_{z \in \partial B_\rho(0)} |\phi(z)| \leq \frac{M}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow r} \frac{M}{r}.$$

Nach dem Zusatz zum Maximumsprinzip über kompakte Teilmengen gilt dann sogar die Ungleichung für alle  $z$  in  $B_r(0)$ . Durch Einsetzen finden wir

$$|f(z)| \leq |z| \frac{M}{r}, \quad \forall z \in B_r(0)$$

$$|\phi(0)| = |f'(0)| \leq \frac{M}{r}$$

$\square$

Setzt man  $r, M = 1$  so erhält man die übliche Variante des Schwarz'schen Lemmas. Dieses Resultat wollen wir nun verallgemeinern.

**Satz 1.3.** (Verallgemeinerung des Schwarz'schen Lemmas)

Sei  $\mathbb{E}$  die Einheitskreisscheibe und  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, sowie  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{E}$  paarweise verschiedene Nullstellen von  $f$ . Für alle  $z \in \mathbb{E}$  gilt dann

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - d_1}{\bar{d}_1 z - 1} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{z - d_n}{\bar{d}_n z - 1} \right| \cdot |f|_{\mathbb{E}}, \quad (1.5)$$

wobei  $|f|_{\mathbb{E}} := \sup_{z \in \mathbb{E}} |f(z)|$  die Supremumsnorm bezeichnet.

**Behauptung 1.2.**

(1) Jede Möbiustransformation der Form

$$f(z) = e^{i\lambda} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{E} \quad (1.6)$$

ist ein holomorpher Automorphismus der Einheitskreisscheibe.

(2)  $b(z, d_k) := b_{d_k}(z) = \frac{z - d_k}{\bar{d}_k z - 1}$ ,  $|d_k| < 1$  sind dann biholomorphe Abbildungen  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ . Für  $z \in \partial\mathbb{E}$  gilt:

$$|b_{d_k}(z)| = 1. \quad (1.7)$$

*Beweis.* (Behauptung)

(1) Zuerst wollen wir zeigen, dass es sich bei  $f$  um einen holomorphen Automorphismus handelt. Die Holomorphie ist klar, da Möbiustransformationen  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  holomorph sind, ausser in  $z = -d/c$ , jedoch  $1/z_0 \notin \mathbb{E}$ , also ist  $f$  in der ganzen Einheitskreisscheibe holomorph. Nun gilt bekanntlich

$$z, z_0 \in \mathbb{E} \Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| < 1,$$

also ist die Abbildung wohldefiniert. Die Bijektivität ist leicht einzusehen und es handelt sich also in der Tat um einen holomorphen Automorphismus.

(2) Die zweite Aussage sieht man durch einfaches Ausrechnen von  $|b_{d_k}|^2$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - d}{\bar{d}z - 1} \right|^2 &= \frac{(z - d)(\bar{z} - \bar{d})}{(\bar{d}z - 1)(d\bar{z} - 1)} \\ &= \frac{|z|^2 - (d\bar{z} + \bar{d}z) + |d|^2}{|d|^2|z|^2 - (\bar{d}z + \bar{z}d) + 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

*Beweis.* (Verallgemeinerung des Schwarz'schen Lemmas)

Sei  $z \in \mathbb{E}$  fixiert und  $m := \max\{|z|, |d_1|, \dots, |d_n|\}$ . Wir definieren die Abbildung  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  durch das endliche Produkt

$$h(w) := \prod_{k=1}^n b(w, d_k)$$

und betrachten die holomorphe Funktion  $g := \frac{f}{h}$ . Die Holomorphie folgt daraus, dass  $f$  in den Punkten  $d_k$  eine Nullstelle hat und somit  $g$  holomorph in diese Punkte fortgesetzt werden kann. Wir wählen  $r > 0$  derart, dass für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$   $d_k \in B_r(0)$  und  $z \in B_r(0)$  gilt, also  $m < r < 1$ . Dann gilt für alle  $w \in \overline{B_r}(0)$  nach dem Zusatz des Maximumprinzips über kompakte Teilmengen

$$|g(z)| \leq \max_{w \in \partial B_r(0)} \left| \frac{f(w)}{h(w)} \right| \leq \frac{\overbrace{|f|_{\partial B_r(0)}}^{\leq |f|_{\mathbb{E}}}}{\min_{w \in \partial B_r(0)} \prod_{k=1}^n |b(w, d_k)|} \xrightarrow{r \rightarrow 1} |f|_{\mathbb{E}}$$

Der Grenzübergang gilt, da für  $w \in \partial \mathbb{E}$  wir  $|h(w)| = 1$  haben und damit

$$\lim_{r \rightarrow 1} \min_{w \in \partial B_r(0)} |h(w)| = 1.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

*Bemerkung 1.2.* Wie wir im Abschnitt 1.5 sehen werden, geht die Formel 1.5 für  $z = 0$  in die Jensen'sche Ungleichung über.

### 1.3 Hadamards Dreikreisesatz

**Satz 1.4.** (Dreikreisesatz von Hadamard) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, welche nicht identisch verschwindet. Gegeben seien weiter zwei positive reelle Zahlen  $r_1, r_2$  mit  $0 < r_1 < r_2 < \infty$ , so dass der Kreisring  $A_{1,2} := \{z \in G \mid r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  in  $G$  vollständig enthalten ist. Dann gilt für die reell-wertige Funktion

$$M : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, r \mapsto M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad (1.8)$$

immer die Ungleichung

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}} \cdot M(r_2)^{\frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}}. \quad (1.9)$$

Mit anderen Worten: Die reell-wertige Funktion  $\phi : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, r \mapsto \phi(r) := \log M(r)$  ist eine in der Variable  $\log r$  konvexe Funktion und erfüllt deshalb

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2). \quad (1.10)$$

*Beweis.* Wir definieren die mehrwertige Funktion  $\phi(z) = z^\lambda f(z)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ( $\lambda$  muss später noch bestimmt werden), welche auf dem Gebiet  $G$  definiert sein soll. Dann erhalten wir über das Maximumprinzip für alle  $z \in A_{1,2}$

$$|\phi(z)| \leq \max\{r_1^\lambda M(r_1), r_2^\lambda M(r_2)\}.$$

Wir definieren nun  $\lambda$  derart, dass die zwei Ausdrücke übereinstimmen, d.h

$$r_1^\lambda M(r_1) = r_2^\lambda M(r_2) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\log M(r_2)/M(r_1)}{\log r_2/r_1}.$$

Dies ist möglich, da  $|\phi(z)|$  eine eindeutige Funktion auf  $A_{1,2}$  darstellt. Da die Funktion  $\phi$  das Maximum auf dem Rand annimmt gilt für jede weitere reelle Zahl  $r \in [r_1, r_2]$  die Ungleichung  $M(r) \leq \left(\frac{r_1}{r}\right)^\lambda M(r_1)$  und damit folgt aufgrund der Monotonie des Logarithmus

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \left(\frac{r_1}{r}\right)^\lambda M(r_1) \Leftrightarrow \\ \log M(r) &\leq \frac{\log M(r_1) - \log M(r_2)}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log \frac{r_1}{r} + \log M(r_1) \Leftrightarrow \\ \log M(r) &\leq \left[ \log M(r_1) \log \frac{r_2}{r} + \log M(r_2) \log \frac{r}{r_1} \right] / \log \frac{r_2}{r_1} \\ M(r) &\leq M(r_1)^{\frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}} \cdot M(r_2)^{\frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}}. \end{aligned}$$

Den zweiten Ausdruck im Satz erhalten wir durch Bilden des Logarithmus. □

## 1.4 Satz von Borel-Carathéodory

**Satz 1.5.** (Satz von Borel-Carathéodory) Sei  $f : \overline{B}_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, die im Innern holomorph ist. Wir definieren die Funktionen  $M(r) := \max_{|z| \leq r} |f(z)|$  und

$A(r) := \max_{|z| \leq r} |\operatorname{Re}(f(z))|$  auf dem Intervall  $(0, R)$ , dann gilt:

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \quad (1.11)$$

*Beweis.*

(1) Wir nehmen  $f \neq \text{const.}$  an und betrachten den Spezialfall  $f(0) = 0$ . Es gilt  $A(R) > 0$  nach dem Identitätssatz. Nun definieren wir die Abbildung

$$\phi(z) := \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$$

und bemerken, dass  $|\operatorname{Re}(f(z))| < A(R)$  für  $|z| < R$  gilt. Deswegen ist  $\phi(z)$  holomorph. Wir benutzen die übliche Notation  $f := u + iv$ . Es folgt

$$|\phi|^2 = \frac{|f|^2}{4A^2 - 4A\operatorname{Re}(f) + |f|^2} = \frac{u^2 + v^2}{(2A - u)^2 + v^2} \leq 1,$$

da  $|2A - u| \geq |u|$ . Das Schwarz'sche Lemma angewandt auf die Funktion  $\phi$  liefert:

$$|\phi(z)| \leq \frac{r}{R}$$

für  $|z| = r < R$ . Wir sehen

$$\begin{aligned} f &= (2A - f)\phi \Rightarrow (1 + \phi)f = 2A\phi \\ |f(z)| &= 2A \left| \frac{\phi(z)}{1 + \phi(z)} \right| \leq 2A \frac{|\phi(z)|}{1 - |\phi(z)|} \\ &\leq 2A \frac{r/R}{1 - r/R} = 2A \frac{r}{R - r}. \end{aligned}$$

(2) Der allgemeine Fall folgt durch Anwendung des Spezialfalls auf die Funktion  $f(z) - f(0)$ :

$$\begin{aligned} |f(z) - f(0)| &\leq \frac{2r}{R - r} \cdot \max_{|z|=r} |\operatorname{Re}(f(z) - f(0))| \\ &\leq \frac{2r}{R - r} \cdot [A(R) + |f(0)|] \\ \Rightarrow |f(z)| &\leq \frac{2r}{R - r} A(R) + \left[1 + \frac{2r}{R - r}\right] \cdot |f(0)| \end{aligned}$$

□

## 1.5 Formel und Ungleichung von Jensen

Bevor wir die Formel von Jensen angeben und beweisen, benötigen wir einen weiteren Satz aus der Funktionentheorie, welcher ebenfalls eine Aussage über die Existenz einer Wurzel- und Logarithmusfunktion macht.

**Satz 1.6.** (Logarithmus-/Wurzelfunktion für Elementargebiete)

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Elementargebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, die nirgends auf  $G$  verschwindet. Sei weiter  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es holomorphe Funktionen  $g, h : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für alle  $z \in G$  gilt

$$\exp g(z) = f(z) \text{ und } h(z)^n = f(z). \quad (1.12)$$

*Beweis.* Da die Funktion  $f'/f$  ebenfalls auf  $G$  holomorph ist, gibt es eine holomorphe Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $F' = f'/f$  (Stammfunktion). Dann ist die Funktion  $\phi := e^{-F}f : G \rightarrow \mathbb{C}$  auch holomorph und hat eine verschwindende Ableitung für alle  $z \in G$ . Da nun  $G$  zusammenhängend ist, ist  $\phi$  konstant. Wir wählen einen Punkt  $z_0 \in G$  und eine komplexe Zahl  $w_0$ , so dass  $e^{w_0} = f(z_0)$  ist und definieren die Funktion

$$g : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } g(z) := F(z) - F(z_0) + w_0.$$

Dann ist  $g$  ebenfalls holomorph und für jedes  $z \in G$  gilt

$$\exp g(z) = \exp F(z) \phi(z_0) = \exp F(z) \phi(z) = f(z).$$

Die andere Funktion erhalten wir durch setzen von  $h(z) := \exp \frac{g(z)}{n}$ . □

**Satz 1.7.** (Jensen Formel) Sei  $f$  holomorph in einem Gebiet  $G$  mit  $\overline{B_R}(0) \subset G$  und  $f(0) \neq 0$ . Desweiteren sei  $r \in (0, R)$  derart, dass  $f$  keine Nullstellen auf Rand  $\partial B_r(0)$  und im Innern  $B_r(0)$  die Nullstellen  $d_1, \dots, d_n$  (mit möglicher Wiederholung) hat. Dann gilt:

$$\log |f(0)| + \log \frac{r^n}{\prod_{k=1}^n d_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi})| d\phi. \quad (1.13)$$

*Beweis.* (a) Spezialfall: Zuerst betrachten wir den Fall, dass  $f$  keine Nullstellen auf dem Abschluss von  $B_r(0) =: B$  hat, d.h. es ist

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi})| d\phi$$

zu zeigen. Es gibt eine Kreisscheibe  $\overline{B} \subset U \subset B_R(0)$  und ein  $h \in \mathcal{O}(U)$ , so dass  $f|_U = f(0) \exp h$  mit  $h(0) = 0$ . Bemerke: Man hat  $U$  derart zu wählen, dass  $f|_U$  nullstellenfrei ist. Da  $U$  ein Elementargebiet ist, gilt  $f = \exp g$  mit  $g \in \mathcal{O}(U)$ . Hier haben wir den am Anfang dieses Abschnitts bewiesenen Satz über die Existenz einer Logarithmusfunktion verwendet. Nun setzt man noch  $h(z) := g(z) - g(0)$ . Da nun  $h(0) = 0$  gilt  $\frac{h(z)}{z} \in \mathcal{O}(U)$  und es folgt mit dem Cauchy'schen Integralsatz

$$0 = \int_{\partial B} \frac{h(z)}{z} dz = i \int_0^{2\pi} h(re^{i\phi}) d\phi. \quad (1.14)$$

Da  $\operatorname{Re} h(z) = \log \left| \frac{f(z)}{f(0)} \right|$  für  $z \in U$  haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} h(re^{i\phi}) d\phi = \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi})| d\phi - 2\pi \log |f(0)| \\ \log |f(0)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi})| d\phi \end{aligned} \quad (1.15)$$

Bei 1.15 handelt es sich in der Tat um die **Poisson'sche Mittelwertgleichung** für die um  $\overline{B}$  harmonische Funktion  $\log |f(z)|$ .

(b) Allgemeiner Fall: Wir zeigen hier eine noch allgemeinere Situation. Wir setzen hier noch zusätzlich voraus, dass neben den Nullstellen  $d_1, \dots, d_n$  im Innern noch Nullstellen  $c_1, \dots, c_m$  auf dem Rand  $\partial B$  liegen. Bemerke, dass dann auf der rechten Seite der Gleichung ein uneigentliches Integral steht. Nun wollen wir den allgemeinen auf den Spezialfall reduzieren und dazu benötigt man die Identität

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\phi}| d\phi = 0. \quad (1.16)$$

*Beweis.* Wir wollen die Identität mit Mitteln der reellen Analysis zeigen, obwohl dies natürlich mit Mitteln der Funktionentheorie auch ginge. Da für  $\phi \in [0, \pi]$   $|1 - e^{2i\phi}| = 2 \sin \phi$ , so gilt

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\phi}| d\phi = \int_0^\pi \log \sin \phi d\phi + \pi \log 2 = -\pi \log 2.$$

Nun zeigen wir noch die letzte Gleichheit. Also

$$\int_0^1 \log \sin \pi t dt = -\log 2.$$

Wir nehmen zuerst an, dass das Integral existiert. Dann gilt

$$\int_0^{1/2} \log \sin 2\pi t dt = \frac{\log 2}{2} + \int_0^{1/2} \log \sin \pi t dt + \int_0^{1/2} \log \sin \pi \left( t + \frac{1}{2} \right) dt.$$

Substituieren wir im ersten Integral rechts  $\tau := 2t$  und im zweiten  $\tau := t + 1/2$ , so folgt das zu beweisende. Das erste Integral rechts existiert, da  $g(t) := \frac{\sin \pi t}{t}$  stetig, sowie nullstellenfrei im Integrationsintervall ist. Es gilt sogar allgemeiner, dass das Integral  $\int_0^r \log f(t) dt$  mit  $r > 0$  existiert, wenn  $f(t) = \frac{g(t)}{t^n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $g$  stetig sowie nullstellenfrei im Intervall  $[0, r]$ . Und das zweite Integral existiert, da das erste es tut.  $\square$

Seien also  $c_1, \dots, c_m$  Nullstellen von  $f$  auf  $\partial B$ . Dann ist die Funktion

$$g(z) := f(z) \prod_{k=1}^n \frac{\bar{d}_k z - r^2}{r(z - d_k)} \prod_{l=1}^m \frac{c_l}{c_l - z}$$

holomorph in einer Umgebung von  $\bar{B}$  und nullstellenfrei in  $\bar{B}$ . Da  $g(0) = f(0) \frac{r^n}{\prod_{k=1}^n d_k}$  und  $\left| \frac{\bar{d}_k - r^2}{r(z - d_k)} \right| = 1$  für  $z \in \partial B$ , so folgt mit der Formel für den Spezialfall, wenn man  $c_l := r e^{i\phi_l}$  setzt

$$\log |f(0)| + \log \frac{r^n}{\prod_{k=1}^n d_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(r e^{i\phi}) \prod_{l=1}^m (1 - e^{i(\phi - \phi_l)})^{-1} \right| d\phi. \quad (1.17)$$

Wegen der bewiesenen Identität folgt nun aus 1.17 die gewünschte Jensen-Formel.  $\square$

**Lemma 1.3.** (Jensen'sche Ungleichung) Sei  $f$  wie oben und  $B_R(0) = \mathbb{E}$ . Dann gilt

$$|f(0)| \leq \prod_{k=1}^n |d_k| \cdot |f|_{\mathbb{E}}. \quad (1.18)$$

*Beweis.* Mit der Jensen'schen Formel und der Tatsache, dass der natürliche Logarithmus für nicht negative Zahlen monoton wachsend ist, finden wir

$$r^n |f(0)| \leq \prod_{k=1}^n |d_k| \cdot |f|_{\partial B_r(0)}.$$

Im Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  erhalten wir die Jensen'sche Ungleichung.  $\square$

## 1.6 Gleichmässige, lokal-gleichmässige, kompakte und stetige Konvergenz

Im Folgenden wollen wir an die wichtigsten Konvergenzbegriffe aus der Funktionentheorie erinnern, wobei wir dem Kapitel 3 aus dem Buch "Funktionentheorie 1" von R. Remmert ([1]) folgen. In diesem Unterkapitel bezeichnet durchwegs  $(X, d_X)$  einen metrischen Raum und  $\mathcal{C}(X)$  die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf diesem.

**Definition 1.1.** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexwertiger Funktionen auf  $X$  nennen wir:

(1) **punktweise konvergent** in  $A \subset X$  gegen die Grenzfunktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn

$$\forall x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad (1.19)$$

d.h.

$$\begin{aligned} \forall x \in A \forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \end{aligned} \quad (1.20)$$

(2) **gleichmässig konvergent** in  $A \subset X$  gegen die Grenzfunktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall x \in A \forall n \in \mathbb{N} : \\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Eine weitere sehr einfache Charakterisierung der gleichmässigen Konvergenz erhalten wir durch den Begriff der Supremums-Norm:

**Definition 1.2.** Seien komplex-wertige Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben, welche auf der Teilmenge  $A \subset X$  beschränkt sein sollen, d.h.  $\sup_{x \in A} |f(x)| < \infty$ . Dann definieren wir die Supremums-Norm auf dieser Teilmenge  $A$  durch:

$$|f|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|. \quad (1.22)$$

**Satz 1.8.** (Äquivalente Charakterisierung glm. Konvergenz)

Eine Folge komplex-wertiger Funktionen  $(f_n)_n$  **konvergiert gleichmässig** in der Teilmenge  $A$  gegen  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|_A = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n - f|_A < \epsilon. \quad (1.23)$$

**Definition 1.3.** Eine Folge komplex-wertiger Funktionen  $(f_n)_n$  in  $X$  **konvergiert lokal gleichmässig** gegen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn für jedes  $x \in X$  eine offene Umgebung  $\mathcal{U}_x \subset X$  von  $x$  existiert, so dass  $(f_n|_{\mathcal{U}_x})_n$  gleichmässig gegen  $f|_{\mathcal{U}_x}$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathcal{U}_x} |f_n(y) - f(y)| = 0. \quad (1.24)$$

**Satz 1.9.** (Stetigkeitssatz) Sei  $(f_n)$  eine Folge stetiger komplex-wertiger Funktionen, die lokal-gleichmässig in  $X$  gegen die Grenzfunktion  $f = \lim_n f$  konvergiert, dann ist  $f$  ebenfalls stetig in  $X$ .

*Beweis.* Sei  $a \in X$  gegeben. Dann gilt für alle  $x \in X$  und  $n \in \mathbb{N}$  wegen der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

Nun gibt es aufgrund der lokal-gleichmässigen Konvergenz für jedes  $a \in X$  eine offene Umgebung  $\mathcal{U}_a \subset X$ , so dass  $f_n$  eingeschränkt auf diese Menge gleichmässig konvergiert, d.h. es gibt für jedes  $\epsilon > 0$  einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $|f - f_n|_{\mathcal{U}_a} < \epsilon$ . Unter Verwendung der Abschätzung über die Dreiecksungleichung folgt damit für alle  $x \in \mathcal{U}_a$  und  $n \geq n_0$ :  $|f(x) - f(a)| < 2\epsilon + |f_n(x) - f_n(a)|$ . Da nun die  $f_n$  stetig in  $a$  sind, gibt es zum gewählten  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $|f_n(x) - f_n(a)| < \epsilon$  für alle  $x \in B_\delta(a)$ , da  $\mathcal{U}_a$  offen ist gibt es immer ein solches  $\delta$ . Damit haben wir  $|f(x) - f(a)| < 3\epsilon$  für alle  $x \in B_\delta(a)$ , womit  $f$  in  $a$  stetig ist. Also  $f \in \mathcal{C}(X)$ .  $\square$

Aus der Beobachtung, dass eine Folge komplex-wertiger Funktionen, welche in einer endlichen Anzahl von Teilmengen  $A_1, \dots, A_n \subset X$  gleichmässig konvergiert, auch in der Vereinigung gleichmässig konvergiert, erhalten wir folgenden Satz:

**Satz 1.10.** Konvergiert die Folge  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  lokal-gleichmässig in  $X$ , so konvergiert  $f_n$  gleichmässig auf jeder kompakten Menge  $K \subset X$ .

*Beweis.* Wegen der lokal gleichmässigen Konvergenz der Folge in  $X$  gibt es insbesondere für jedes  $x \in K$  eine offene Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $x$ , so dass  $f_n$  in  $\mathcal{U}$  gleichmässig konvergiert. Aus der Kompaktheit von  $K$  folgt, dass bereits endlich viele solche Umgebungen  $\mathcal{U}_i, i \in \mathcal{I}, |\mathcal{I}| < \infty$  die Menge  $K$  überdecken. Dann konvergiert nach der Beobachtung, dass  $f_n$  in  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i$  gleichmässig konvergiert und damit erst recht in  $K \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i$ .  $\square$

Dies führt uns dazu folgende Definition zu machen.

**Definition 1.4.** Eine komplex-wertige Funktionenfolge  $(f_n)$  auf dem metrischen Raum  $X$  heisst **kompakt konvergent**, wenn sie in jeder kompakten Teilmenge von  $X$  gleichmässig konvergiert.

Damit haben wir also gezeigt, dass lokal-gleichmässige Konvergenz kompakte Konvergenz nach sich zieht. In wichtigen Fällen ist diese Aussage umkehrbar und zwar wenn es sich bei  $X$  um einen **lokal-kompakten Raum** (d.h. jede Umgebung jedes Punktes  $x \in X$  enthält eine kompakte Umgebung) handelt, wie Bereiche in  $\mathbb{C}$ .

**Satz 1.11.** Wenn  $(X, d_X)$  ein lokal-kompakter metrischer Raum ist, dann ist jede in  $X$  kompakt konvergente Funktionenfolge lokal-gleichmässig konvergent in  $X$ .

Nun führen wir den wichtigen Begriff der stetigen Konvergenz ([4]) ein.

**Definition 1.5.** Es sei  $A \subset \mathbb{C}$  eine beliebige Teilmenge der komplexen Ebene und  $z_0 \in A$  ein Punkt von  $A$  (darf auch Häufungspunkt von  $A$  sein). Eine Folge von auf der Menge  $A$  definierten, komplex-wertigen Funktionen  $(f_n)$  heisst im Punkt  $z_0$  **stetig konvergent** (relativ zu  $A$ ), wenn für jede gegen  $z_0$  konvergierende Folge  $(z_n) \subset A$  auch die Folge

$$w_n := f_n(z_n), \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.25}$$

konvergent ist.

Es gilt nun der folgende Satz:

**Satz 1.12.** Ist die Funktionenfolge  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $z_0$  stetig konvergent, so ist der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  der Folge 1.25 unabhängig von der Wahl der konvergenten Folge  $(z_n)$ . Er hängt also nur von  $z_0$  ab und kann damit symbolisch durch  $f(z_0)$  dargestellt werden.

*Beweis.* Seien  $(z'_n), (z''_n)$  zwei gegen  $z_0$  konvergente Folgen mit

$$\lim f_n(z'_n) = \alpha, \lim f_n(z''_n) = \beta.$$

Dann würde die Folge

$$z_n := \begin{cases} z''_n, & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ z'_n, & \text{für } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

zwar gegen  $z_0$  konvergieren, jedoch entgegen der Voraussetzung  $\lim f_n(z_n)$  nicht existieren. Denn die Folge  $w_n$  hätte zwei verschiedene Häufungspunkte.  $\square$

Dieser Satz angewandt auf den Spezialfall  $(z'_n), z'_n := z_0$  veranlasst uns folgende Definition zu machen:

**Definition 1.6.** Eine Folge von auf der Menge  $A \subset \mathbb{C}$  definierten, komplex-wertigen Funktionen  $(f_n)$  heisst in  $A$  **stetig konvergent** gegen die Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn die Funktionenfolge bezüglich jedes Punktes in  $A$  stetig konvergent ist.

Der folgende Satz ist ebenso leicht zu beweisen:

**Satz 1.13.** Jede Teilfolge  $(f_{n_k})$  einer im Punkte  $z_0$  stetig konvergenten Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ( $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ ) ist selbst im Punkt  $z_0$  stetig konvergent und besitzt denselben Grenzwert  $f(z_0)$  im Punkt  $z_0$ .

*Beweis.* Sei  $(z_n)$  eine gegen  $z_0$  konvergierende Folge. Nun können wir aus dieser eine Folge  $(z'_n)$  konstruieren mit  $z'_n \rightarrow z_0$  für  $n \rightarrow \infty$ , welche die Bedingung  $z'_{n_k} = z_k$  (mit  $n_k < n_{k+1}$ ) erfüllt. Nach Voraussetzung gilt nun  $\lim_n f_n(z'_n) = \lim_n f_n(z_n) = f(z_0)$ . Damit gilt:

$$\lim_k f_{n_k}(z'_{n_k}) = \lim_k f_{n_k}(z_k) = f(z_0).$$

$\square$

Der Name dieses Konvergenzbegriffes rührt von folgendem Satz her:

**Satz 1.14.** Ist die Folge  $(f_n)$  relativ zu  $A$  stetig konvergent gegen die Grenzfunktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , so gilt  $f \in \mathcal{C}(A)$ . (Dies gilt auch wenn die  $f_n$  unstetig sind.)

*Beweis.* Sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  eine gegen  $z_0$  konvergente Folge und ein  $\epsilon > 0$  gegeben. Aus obigem Satz folgt nun aufgrund der stetigen Konvergenz, dass jede Teilfolge  $f_{n_k}$  ebenfalls stetig konvergent ist. Also gilt für alle  $z_k \in A$

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Da nun  $\lim_k f_{n_k}(z_k) = f(z_0)$  gibt es zum gewählten  $\epsilon/2$  ein Index  $K \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k \geq K$  gilt

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit erhalten wir für  $k \geq K$

$$|f(z_k) - f(z_0)| \leq \underbrace{|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|f_{n_k}(z_k) - f(z_0)|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon.$$

Damit ist aufgrund des Limeskriteriums der Stetigkeit die Funktion  $f$  in ganz  $A$  stetig.  $\square$

Schlussendlich wollen wir noch einen letzten Satz beweisen, welcher eine Äquivalenz zwischen kompakter Konvergenz und stetiger Konvergenz beschreibt.

**Satz 1.15.** Sei  $\{f_n : A \rightarrow \mathbb{C} | n \in \mathbb{N}\}$  eine Folge nicht notwendigerweise stetiger Funktionen. Dann sind äquivalent:

- (1) Die Folge  $f_n$  konvergiert in  $A$  kompakt gegen eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(A)$ .
- (2) Die Folge  $f_n$  ist stetig konvergent in  $A$ .

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Wenn  $z_n \rightarrow z_0$ , dann ist die Menge  $L := \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$  kompakt, da abgeschlossen und beschränkt. Da  $f_n$  kompakt konvergent sind, gilt also  $\lim_n |f - f_n|_L = 0$  und im Speziellen da die Folge der Suprema eine Nullfolge ist, ist auch  $|f(z_n) - f_n(z_n)|$  eine Nullfolge. Andererseits gilt wegen der Stetigkeit von  $f$ :  $\lim_n |f(z_0) - f(z_n)| = 0$  und die Behauptung folgt dann aus der Gleichung

$$|f(z_0) - f_n(z_n)| \leq |f(z_0) - f(z_n)| + |f(z_n) - f_n(z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $f$  die Grenzfunktion der Folge  $f_n$ , wobei bekanntlich  $f \in \mathcal{C}(A)$ . Wir nehmen nun an, dass es ein Kompaktum  $K \subset A$  gäbe, so dass  $|f - f_n|_K$  keine Nullfolge ist. Dann würde ein  $\epsilon > 0$  existieren, eine Teilfolge  $n_k$  der Indexfolge  $1, 2, 3, \dots$  und eine Punktfolge  $z_{n_k} \in K$ , so dass für alle  $n_k$

$$|f(z_{n_k}) - f_{n_k}(z_{n_k})| \geq \epsilon.$$

Da die Menge  $K$  kompakt ist dürfen wir annehmen, dass die Folge  $z_{n_k}$  gegen einen Punkt  $z_0 \in K$  konvergiert, denn ansonsten betrachten wir einfach eine konvergente Teilfolge davon. Da  $f \in \mathcal{C}(A)$  gilt  $\lim_k f(z_{n_k}) = f(z_0)$  und wegen der stetigen Konvergenz  $\lim_k f_{n_k}(z_{n_k}) = f(z_0)$ . Daraus folgt

$$\lim [f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})] = 0,$$

womit wir einen Widerspruch haben.  $\square$

## 1.7 Sätze von Arzela-Ascoli, Montel und Vitali

Im Folgenden wollen wir mit  $\mathcal{C}(D)$  und  $\mathcal{O}(D)$  die Menge der stetigen bzw. holomorphen Funktionen bezeichnen. Solange nichts anderes gesagt wird handelt es sich bei der Menge  $D \subset \mathbb{C}$  um einen Bereich und bei  $X$  wieder um einen beliebigen metrischen Raum. In diesem Unterkapitel wollen wir unter anderem die Frage "Welche Eigenschaften muss eine Familie von komplex-wertigen Funktionen haben, dass

- eine kompakt konvergente Teilfolge existiert oder
- die Grenzfunktion holomorph ist?"

beantworten. Folgende Definitionen über Familien von Funktionen werden sich als nützlich erweisen.

### Definition 1.7.

(1) Eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(D)$  stetiger Funktionen auf einem Bereich  $D \subset \mathbb{C}$  heisst **normal**, wenn jede Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $\mathcal{F}$  eine Teilfolge besitzt, die in  $D$  kompakt konvergiert.

(2) Eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(D)$  heisst **beschränkt** in einer Teilmenge  $A \subset D$ , wenn es eine reelle Zahl  $C > 0$  gibt, so dass für alle  $f \in \mathcal{F}$  gilt:  $|f|_A \leq C$ . Das lässt sich auch so formulieren:  $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in A} |f(z)| < \infty$ .

(3) Eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(D)$  heisst **lokal beschränkt** in  $D$ , wenn es für jeden Punkt  $z \in D$  eine offene Umgebung  $\mathcal{U}_z \subset D$  gibt, so dass  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{U}_z$  beschränkt ist. Dies trifft genau dann zu, wenn die Familie  $\mathcal{F}$  auf jedem Kompaktum in  $D$  beschränkt ist.

(4) Eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$  heisst **(punktweise) gleichgradig stetig** in  $z \in X$ , wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon, z) > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall w \in X : d(z, w) \leq \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| \leq \epsilon \quad (1.26)$$

und **gleichgradig stetig** in  $X$ , wenn dies für alle  $z \in X$  gilt. Desweiteren nennen wir eine Familie **lokal gleichgradig stetig**, wenn es für jeden Punkt  $z \in X$  eine offene Umgebung gibt  $\mathcal{U}_z \subset X$ , so dass die auf  $\mathcal{U}_z$  eingeschränkte Familie  $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_z}$  gleichgradig stetig in  $\mathcal{U}_z$  ist.

(5) Eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$  heisst **gleichmässig gleichgradig stetig** in  $X$ , wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall z, w \in X : d(z, w) \leq \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| \leq \epsilon. \quad (1.27)$$

*Bemerkung 1.3.* Wir bemerken, dass beschränkte Familien lokal beschränkt sind, jedoch die Umkehrung nicht gelten muss. Dies sieht man am Beispiel  $\mathcal{F} = \{f_n := nz^n \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Die nachfolgende Behauptung zeigt, dass die punktweise gleichgradige Stetigkeit in einem Bereich mit der gleichmässigen gleichgradigen Stetigkeit übereinstimmt.

**Behauptung 1.3.** Wenn der metrische Raum  $(X, d)$  lokal-kompakt ist, dann sind äquivalent:

(1)  $\mathcal{F}$  ist (punktweise) gleichgradig stetig

(2)  $\mathcal{F}$  ist gleichmässig gleichgradig stetig.

*Beweis.* Da die Implikation (2)  $\Rightarrow$  (1) trivial ist beweisen wir nur die Implikation (1)  $\Rightarrow$  (2). Sei also  $\mathcal{F}$  punktweise gleichgradig stetig, jedoch nicht gleichmässig gleichgradig stetig in einem lokal kompakten metrischen Raum  $(X, d)$ . Zweiteres meint:

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists f \in \mathcal{F}, x, y \in X : d(x, y) \leq \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \epsilon.$$

Damit gilt insbesondere:

$$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists f_n \in \mathcal{F}, x_n, y_n \in X : d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}, |f_n(x_n) - f_n(y_n)| > \epsilon.$$

Der folgende Schritt funktioniert nur weil  $X$  lokal kompakt ist und damit jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, also für jede Folge eine konvergente Teilfolge existiert. Sei nun  $x_{n_k}$  eine konvergente Teilfolge mit  $\lim_k x_{n_k} = x_0$ , dann gilt auch  $\lim_k y_{n_k} = x_0$ . Nun gibt es wegen der gleichgradigen Stetigkeit in  $x_0$  ein  $\delta > 0$  zu dem gewählten  $\epsilon > 0$ , so dass für alle  $y \in X \forall f \in \mathcal{F}$  gilt

$$d(x_0, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Wähle nun  $k$  hinreichend gross, so dass  $d(x_0, x_{n_k}), d(x_0, y_{n_k}) \leq \delta$ . Dann folgt

$$\Rightarrow |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| + |f_{n_k}(y_{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| \leq \frac{2\epsilon}{3}.$$

Widerspruch und damit muss die Familie gleichmässig gleichgradig stetig sein.  $\square$

**Satz 1.16.** Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(D)$ . Dann gilt

$$\mathcal{F} \text{ normal} \Rightarrow \mathcal{F} \text{ lokal beschränkt}$$

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass:  $\forall K \in \text{Compact}(D) \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} |f|_K < \infty$ . Wir nehmen also an, dass es ein Kompaktum  $L$  gibt, so dass  $\sup\{|f|_L | f \in \mathcal{F}\} = \infty$ . Damit gäbe es eine Folge  $f_n \in \mathcal{F}$  mit  $\lim_n |f_n|_L = \infty$ . Diese Folge  $f_n$  hätte keine in  $D$  kompakt konvergente Teilfolge, denn für deren Grenzfunktion  $f$  wäre

$$|f|_L \geq |f_n|_L - |f - f_n|_L.$$

Damit haben wir einen Widerspruch.  $\square$

Die Umkehrung dieses Satzes in der Klasse der holomorphen Funktionen ist gerade der Satz von Montel, welchen wir mit dem Satz von Arzéla-Ascoli beweisen wollen. (Siehe weiter unten.) Das folgende Lemma besagt, wann für eine Funktionenfolge eine konvergente Teilfolge existiert.

**Lemma 1.4.** Es sei  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge stetiger Funktionen, die in jedem Punkt  $a \in D$  beschränkt ist. Dann gibt es zu jeder abzählbaren Teilmenge  $A \subset D$  eine Teilfolge  $g_n$  der Folge  $f_n$ , die in  $A$  *punktweise* konvergiert.

*Beweis.* Sei  $a_1, a_2, \dots$  eine Abzählung der Menge  $A$ . Nun behaupten wir, dass es aufgrund des ersten Cantor'schen Diagonalarguments zu jedem  $l \in \mathbb{N}$  eine Teilfolge  $(f_{l,n})_n$  der Folge  $(f_n)_n$  gibt, so dass gilt

- Die Folge  $(f_{l,n})_n$  konvergiert in  $a_l$
- Die Folge  $(f_{l,n})_n$  ist eine Teilfolge der Folge  $(f_{l-1,n})_n$  für  $l \geq 2$ .

Nehmen wir also an, wir haben die Folge  $(f_{k,n})$ ,  $k < l$  bereits konstruiert. Nun wählen wir eine Teilfolge  $(f_{l,n})$  der Folge  $(f_{l-1,n})$ , die in  $a_l$  konvergiert. Dann sind die Voraussetzungen für alle Folgen  $(f_{k,n})$ ,  $k \leq l$  erfüllt. Aus den konstruierten Teilfolgen bildet man nun die Diagonalfolge  $g_n := f_{n,n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Diese konvergiert in jedem Punkt  $a_m \in A$ , denn wegen der zweiten Forderung ist sie vom Glied  $g_m$  ab eine Teilfolge der Folge  $f_{m,1}, f_{m,2}, f_{m,3}, \dots$ , die nach der ersten Bedingung in  $a_m$  konvergiert.  $\square$

Für die Gültigkeit dieses Lemmas ist die Abzählbarkeit der Menge  $A$  wesentlich. Man kann nicht erwarten, dass die gewonnene Teilfolge  $g_n$  überall in  $D$  punktweise konvergiert. Unter zusätzlichen Annahmen über die Folge  $f_n$  kann dies aber erreicht werden. Man kann sogar kompakte Konvergenz erreichen, wie der Satz von Montel für Folgen zeigen wird.

Für den Beweis des Satzes von Montel für Folgen, wie auch für normale Familien wollen wir folgendes Lemma verwenden:

**Lemma 1.5.** Es sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$  eine in  $D$  lokal beschränkte Familie. Dann gibt es zu jedem Punkt  $c \in D$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Kreisscheibe  $B \subset D$  um  $c$ , so dass für alle  $f \in \mathcal{F}$  und  $z, w \in B$  gilt

$$w, z \in B \Rightarrow |f(w) - f(z)| \leq \epsilon. \quad (1.28)$$

*Beweis.* Wir wählen  $r > 0$  derart, dass  $B_{2r}(c) \subset D$  und setzen  $\tilde{B} := B_r(c)$ ,  $B' := B_{2r}(c)$ . Dann folgt aus der Cauchy'schen Integralformel

$$f(w) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} f(\zeta) \left[ \frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta = \frac{w - z}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - w)(\zeta - z)}.$$

Da  $|(\zeta - w)(\zeta - z)| \geq r^2$  für alle  $z, w \in \tilde{B}$  und  $\zeta \in \partial B'$  erhalten wir mit der Standardabschätzung für alle  $f \in \mathcal{F}$  und  $z, w \in \tilde{B}$ :

$$|f(w) - f(z)| \leq \frac{|w - z|}{2\pi} \cdot 4\pi r \cdot \frac{1}{r^2} |f|_{B'} \leq |w - z| \cdot M,$$

wobei  $M := \frac{2}{r} \sup_{f \in \mathcal{F}} |f|_{B'} < \infty$ , da  $\mathcal{F}$  lokal beschränkt ist. Wir wollen nun  $|f(w) - f(z)| \leq \epsilon$  erreichen. Setzen wir  $\delta := \min\{\frac{\epsilon}{2M}, r\}$  und  $B := B_\delta(c)$ , dann gilt die gewünschte Abschätzung sicherlich für  $z, w \in B_\delta(c)$ .  $\square$

Also besagt dieses Lemma, dass lokal beschränkte Familien lokal gleichgradig stetig sind. Nun wollen wir den Satz von Arzelà-Ascoli formulieren und Beweisen um schlussendlich den Satz von Montel zu beweisen.

**Satz 1.17.** (Arzelà-Ascoli)

Sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von in  $D$  komplex-wertigen Funktionen. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

- (1)  $\mathcal{F}$  ist eine normale Familie in  $D$ .
- (2)  $\mathcal{F}$  ist lokal gleichgradig stetig in  $D$  und  $\forall w \in D : \{f(w) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{C}$  beschränkt.

*Beweis.* (Arzelà-Ascoli)

(1)  $\Rightarrow$  (2): Mit Satz 1.16 haben wir bewiesen, dass eine normale Familie lokal beschränkt ist und den zweiten Teil wollen wir per Widerspruch zeigen. Sei also  $\mathcal{F}$  nicht lokal gleichgradig stetig. Also:

$$\begin{aligned} \exists K \subset D \text{ (kompakt)} \exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists f_n \in \mathcal{F}, x_n, y_n \in K : \\ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \wedge |f_n(x_n) - f_n(y_n)| > \epsilon. \end{aligned}$$

O.B.d.A sei  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow y_n \rightarrow x_0$ . Damit kann die Folge  $f_n$  keine konvergente Teilfolge  $f_{n_k}$  haben, da

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| > \epsilon$$

(2)  $\Rightarrow$  (1): Wir wählen eine abzählbare Teilmenge  $A \subset D$  dicht in  $D$ , wie beispielweise die komplexen rationalen Zahlen und eine Folge  $(f_n) \subset \mathcal{F}$ . Nach Lemma 1.4 können wir wegen der lokalen Beschränktheit eine konvergente Teilfolge  $g_n$  wählen, die in jedem Punkt  $a \in A$  konvergiert. Wir machen folgende

**Behauptung 1.4.**  $g_n$  konvergiert kompakt in der Menge  $D$ .

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $g_n$  auf Kompakta konvergiert, beweisen wir, dass  $g_n$  stetig konvergiert und mit Satz 1.15 folgt dann das gewünschte. Sei also  $(z_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $z_n \rightarrow z_0 \in D$ . Nun zeigen wir, dass  $w_n := g_n(z_n)$  eine Cauchy-Folge ist und damit wegen der Vollständigkeit konvergent ist. Sei also ein  $\epsilon > 0$  gegeben, dann zeigt die lokale gleichgradige Stetigkeit, dass es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $B := B_r(z_0) \subset D$  (da es eine Umgebung gibt) und

$$\forall z, w \in B \forall n \in \mathbb{N} : |g_n(z) - g_n(w)| < \epsilon.$$

Da  $A$  dicht in  $D$  liegt ist der Schnitt  $A \cap B \neq \emptyset$  und wir können ein  $a \in A \cap B$ , sowie ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  wählen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$n \geq n_0 \Rightarrow z_n \in B.$$

Seien  $m, n \geq n_0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |g_n(z_n) - g_m(z_m)| &\leq |g_n(z_n) - g_n(a)| + |g_n(a) - g_m(a)| + |g_m(z_m) - g_m(a)| \\ &\leq 2\epsilon + \underbrace{|g_m(a) - g_n(a)|}_{\rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } m, n \text{ hinreichend gross}} \end{aligned}$$

Somit handelt es sich in der Tat um eine Cauchy-Folge, womit es sich um eine gleichm\u00e4\u00dfig konvergente Folge in  $A \cap B$  handelt bzw. sogar um eine stetig konvergente Folge gegen  $g(z) := \lim_n g_n(z)$  f\u00fcr alle  $z$  im Schnitt.  $\square$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Mit den zwei bewiesenen Lemmata und dem Satz von Arzel\u00e0-Ascoli k\u00f6nnen wir den Satz von Montel f\u00fcr Funktionenfolgen beweisen, der lautet:

**Satz 1.18.** (Satz von Montel f\u00fcr Folgen)

Jede in  $D$  lokal beschr\u00e4nkte Folge  $(f_n)$  von in  $D$  holomorphen Funktionen besitzt eine Teilfolge, die in  $D$  kompakt konvergiert.

*Beweis.* Wir w\u00e4hlen eine in  $D$  dichte abz\u00e4hlbare Menge  $A \subset D$ , zum Beispiel die Menge aller komplex-rationalen Zahlen aus  $D$ . Nach dem Lemma 1.4 gibt es eine Teilfolge  $g_n$  der Folge  $f_n$ , die in  $A$  punktweise konvergiert. Wir behaupten nun, dass die Folge  $g_n$  in  $D$  kompakt konvergiert. Dazu gen\u00fcgt es zu zeigen, dass  $g_n$  stetig konvergent in  $D$  ist. Sei nun ein  $\epsilon > 0$  und eine konvergente Folge  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  mit  $z_n \rightarrow z_0 \in D$  gegeben. Nach dem Lemma 1.5 gibt es nun eine Kreisscheibe  $B$  um den Punkt  $z_0 \in D$ , so dass f\u00fcr alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$z, w \in B \Rightarrow |g_n(w) - g_n(z)| \leq \epsilon.$$

Da  $A$  dicht in  $D$  liegt, gibt es einen Punkt  $a \in A \cap B$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  gibt es einen Index  $n_1$ , so dass f\u00fcr alle  $n \geq n_1$   $z_n \in B$  gilt. Da stets

$$|g_m(z_m) - g_n(z_n)| \leq |g_m(z_m) - g_m(a)| + |g_m(a) - g_n(a)| + |g_n(z_n) - g_n(a)|$$

gilt, folgt f\u00fcr alle  $m, n \geq 1$  die Absch\u00e4tzung  $|g_m(z_m) - g_n(z_n)| \leq 2\epsilon + |g_m(a) - g_n(a)|$ . Da per Voraussetzung  $\lim_n g_n(a)$  existiert, gibt es einen Index  $n_2$ , so dass  $|g_m(a) - g_n(a)| \leq \epsilon$  f\u00fcr alle  $m, n \geq n_2$ . Damit ist gezeigt:

$$m, n \geq \max(n_1, n_2) \Rightarrow |g_m(z_m) - g_n(z_n)| \leq 3\epsilon.$$

Also handelt es sich bei  $\{g_n(z_n)\}$  um eine Cauchy-Folge und damit ist sie konvergent.  $\square$

Diese Version des Satzes k\u00f6nnen wir eigentlich aus dem allgemeineren Satz von Montel \u00fcber normale Familien herleiten. Nun wollen wir den Konvergenzsatz von Montel diskutieren.

**Satz 1.19.** (Konvergenzkriterium von Montel)

Sei eine in einem Bereich  $D \subset \mathbb{C}$  lokal beschr\u00e4nkte, holomorphe Funktionenfolge  $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(D)$  gegeben.  $(f_n)$  konvergiert kompakt gegen  $f \in \mathcal{O}(D)$ , wenn jede in  $D$  kompakt konvergente Teilfolge von  $(f_n)$  gegen  $f$  konvergiert.

Die Umkehrung gilt natürlich trivialerweise auch.

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $(f_n)$  nicht kompakt gegen  $f$  konvergiert, d.h. es gibt eine Menge  $K \in \text{Compact}(D)$ , so dass  $|f_n - f|_K$  keine Nullfolge ist, aber jede kompakt konvergente Teilfolge von  $f_n$  gegen  $f$  konvergiert. Dann gäbe es ein  $\epsilon > 0$  und eine Teilfolge  $(g_j)$  von  $(f_n)$ , so dass  $|g_j - f|_K \geq \epsilon$ . Da  $f_n$  lokal beschränkt ist, ist sicherlich auch  $g_j$  lokal beschränkt und dann folgt mit dem Satz von Montel für Funktionenfolgen, dass es eine in  $D$  kompakt konvergente Teilfolge  $h_k$  von  $g_j$  gibt. Da  $|h_k - f|_K \geq \epsilon$  für alle  $k$ , so wäre  $f$  nicht der Limes dieser Folge. Widerspruch.  $\square$

Schlussendlich beweisen wir nun den allgemeinen Satz von Montel:

**Satz 1.20.** (Satz von Montel für Familien)

Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$  eine Familie von holomorphen Funktionen in einem Bereich  $D \subset \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\mathcal{F} \text{ lokal beschränkt} \Rightarrow \mathcal{F} \text{ normal.} \quad (1.29)$$

*Beweis.* Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli und der lokalen Beschränktheit der Familie ist nur zu zeigen, dass  $\mathcal{F}$  lokal gleichgradig stetig in  $D$  ist. Jedoch wissen wir aus dem Lemma 1.5, dass es für jedes  $c \in D$  und jedes  $\epsilon > 0$  eine offene Kreisscheibe  $B$  um  $c$  und damit insbesondere eine Umgebung gibt, so dass für alle  $f \in \mathcal{F}$  und  $z, w \in D$  gilt

$$z, w \in B \Rightarrow |f(w) - f(z)| \leq \epsilon.$$

Damit ist  $\mathcal{F}$  lokal gleichgradig stetig und folglich normal.  $\square$

*Damit haben wir die Äquivalenz bewiesen, dass eine Familie holomorpher Funktionen auf einem Bereich lokal beschränkt ist und eine normale Familie darstellt.*

Nun wollen wir noch eine weitere Version des Satzes von Montel erwähnen:

**Satz 1.21.** Sei eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$  holomorpher Funktionen auf einem Bereich  $D$  gegeben. Werden die Werte 0 und 1 nicht angenommen, dann ist  $\mathcal{F}$  normal.

*Beweis.* Siehe dazu: Apostol, Modular Forms, Abschnitt 2.9. Da wir für diesen Beweis modulare Formen benötigen, lassen wir ihn aus.  $\square$

Als Anwendung des Montel'schen Konvergenzkriteriums wollen wir den Satz von Vitali diskutieren, wobei wir ihn in einer ähnlichen Form wie diejenige des Identitätssatzes formulieren.

**Satz 1.22.** (Vitali) Folgende Aussagen über eine im Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  lokal beschränkte, holomorphe Funktionenfolge  $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$  sind äquivalent:

- (1) Die Folge  $(f_n)$  ist in  $G$  kompakt konvergent.
- (2) Es gibt einen Punkt  $c \in G$ , so dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Folge  $(f_n^{(k)}(c))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

- (3) Die Menge  $A = \{w \in G \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) \text{ existiert in } \mathbb{C}\}$  der Konvergenzpunkte der Folge  $(f_n)$  besitzt einen Häufungspunkt in  $G$ .

*Beweis.*

(1) $\Rightarrow$ (2): Wir wissen, dass aus der lokal gleichmässigen Konvergenz aufgrund des Heine-Borel'schen Überdeckungssatzes die kompakte Konvergenz folgt. Wenn nun die Menge auf welcher die Funktionen definiert sind einen Bereich darstellt so gilt auch die Umkehrung, denn dann existiert zu jedem Punkt  $c \in D$  eine abgeschlossene und damit kompakte Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $c$  die in  $D$  enthalten ist. Mit Hilfe der Verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel können wir nun die Ableitungen in Integrale umschreiben. Die Aussage wird offensichtlich wenn wir folgendes Lemma betrachten:

**Lemma 1.6.** Es sei  $(f_n) \subset \mathcal{C}(D)$  eine Funktionenfolge, welche lokal gleichmässig gegen  $f$  konvergiert. Dann gilt für jede stückweise glatte Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta. \quad (1.30)$$

*Beweis.* Da  $\text{Bild}(\gamma)$  kompakt ist, konvergiert  $f_n$  auf dieser Menge gleichmässig. Die Behauptung folgt nun aus der Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right| \leq L(\gamma) \cdot \epsilon,$$

falls  $|f_n - f|_{\text{Bild}(\gamma)} \leq \epsilon$ . □

Damit ist die Aussage gezeigt. In diesem Zusammenhang wollen wir noch den Satz von Weierstrass beweisen, welchen wir zu einem späteren Zeitpunkt benötigen werden.

**Satz 1.23.** (Satz von Weierstrass) Sei  $(f_n) \subset \mathcal{O}(D)$  eine lokal gleichmässig konvergierende Funktionenfolge in einem Bereich  $D$ . Dann gilt:

- (i) Grenzfunktion  $f$  ist ebenfalls holomorph.
- (ii) Die Folge der Ableitungen  $(f_n^{(k)})_n$  mit  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert lokal gleichmässig gegen  $f^{(k)}$ .

*Beweis.* Sei  $R \subset D$  ein abgeschlossenes Rechteck, so konvergiert  $f_n$  auf  $R$  gleichmässig gegen  $f$ . Ist  $l_R$  der Umfang des Rechtecks, so gilt nach obigen Argument

$$\left| \int_{\partial R} f_n(z) dz - \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq l_R \cdot \sup_{z \in \partial R} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0.$$

Mit dem Cauchy'schen Integralsatz für Rechtecke gilt damit:

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial R} f_n(z) dz = 0.$$

Da diese Argumentation für beliebige Rechtecke  $R$  in  $D$  wahr ist, ist  $f$  in  $D$  analytisch. Die Behauptung über die Ableitungen ergibt sich aus der Cauchy'schen Integralformel und dem obigen Lemma. □

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei  $B$  eine Kreisscheibe um  $c \in G$ , so dass  $\overline{B} \subset G$ . Dann ist die Folge  $f_n|_B$  beschränkt, da  $f_n$  lokal beschränkt ist (wenn die Kreisscheibe genügend klein gewählt wird). Die Aussage der Implikation folgt nun aus dem kommenden Lemma:

**Lemma 1.7.** (Konvergenzlemma)

Es sei  $B = B_r(c)$  mit  $r > 0$  gegeben. Dann sind folgende Aussagen über eine in  $B$  beschränkte Folge  $(f_n) \subset \mathcal{O}(B)$  äquivalent:

- (i) Die Folge  $(f_n)$  ist in  $B$  kompakt konvergent.
- (ii) Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist die Zahlenfolge  $(f_n^{(k)}(c))$  konvergent.

*Beweis.* Nach dem Satz von Weierstrass wissen wir, dass auch die Ableitungen auf  $B$  kompakt konvergieren und damit ist nur die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen. O.B.d.A. dürfen wir  $B = \mathbb{E}$  und  $|f_n|_{\mathbb{E}} \leq 1$  annehmen. Nach dem Potenzreihensatz gilt auf  $\mathbb{E}$

$$f_n(z) = \sum_k a_{n,k} z^k \text{ mit } a_{n,k} = \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(0).$$

Nach Voraussetzung existieren alle Grenzwerte  $a_k := \lim_n a_{n,k}$ . Aufgrund der Cauchy'schen Ungleichung gilt stets  $|a_{n,k}| \leq 1$  und damit  $|a_k| \leq 1$ . Daraus folgt  $f(z) = \sum_k a_k z^k \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ . Wir fixieren nun ein  $\rho \in (0, 1)$ . Dann gilt für alle  $z \in B_\rho(0)$  und alle  $l \in \mathbb{N}$

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \sum_{k=0}^{l-1} |a_{n,k} - a_k| \rho^k + \frac{2\rho^l}{1-\rho}.$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  beliebig. Wenn  $\rho < 1$  kann man  $l$  derart wählen, dass  $\frac{2\rho^l}{1-\rho} \leq \epsilon$ . Wegen  $\lim_n \sum_{k=0}^{l-1} |a_{n,k} - a_k| \rho^k = 0$  gibt es nun ein  $n_0$ , so dass für  $n \geq n_0$  gilt  $\left| \sum_{k=0}^{l-1} |a_{n,k} - a_k| \rho^k \right| < \epsilon$ . Damit folgt für alle  $n \geq n_0$  und  $z \in B_\rho(0)$

$$|f_n(z) - f(z)| < 2\epsilon.$$

Also konvergiert  $f_n$  kompakt in  $\mathbb{E}$  gegen  $f$ . □

Also folgt mit dem Konvergenzlemma  $B \subset A$ , womit  $A$  als Obermenge einer offenen Menge einen Häufungspunkt hat.

(3) $\Rightarrow$ (1): Aufgrund des Satzes von Montel für Folgen genügt es zu zeigen, dass alle kompakt konvergenten Teilfolgen der Folge  $f_n$  denselben Limes haben. Das aber ist klar nach dem Identitätssatz, da zwei solche Limiten notwendig auf der Menge  $A$ , die Häufungspunkte in  $G$  hat, übereinstimmen. □

## 1.8 Die Sätze von Phragmen und Lindelöf

Die Sätze von Phragmen und Lindelöf stellen Verallgemeinerungen des Maximumprinzips dar. Wir diskutieren hier drei verschiedene Varianten, wobei wir in allen Fällen unbeschränkte Gebiete betrachten und bestimmte Voraussetzungen an diese, sowie an das Wachstumsverhalten der betrachteten holomorphen Funktion in diesen Bereichen stellen. Danach besprechen wir die Winkelfunktion von Phragmen und Lindelöf, welche es uns ermöglicht das Wachstumsverhalten der regulären Funktion im radialen und winkelabhängigen Teil von einander zu unterscheiden. Anschliessend diskutieren wir als Anwendung den Satz von Carlson und die Lindelöf'sche Vermutung.

### 1.8.1 Drei Verallgemeinerungen des Maximumprinzips

**Satz 1.24.** (Phragmen-Lindelöf-Satz I)

Sei  $\Omega_I := \{z = re^{i\theta} | r > 0, \theta \in (-\frac{\pi}{2}/\alpha, \frac{\pi}{2}/\alpha)\}$  ein offener Kreissektor in der rechten Halbebene und  $\alpha > 1$  eine fixe positive Zahl. Sei  $f : \overline{\Omega}_I \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige Funktion mit

- (1)  $f(z) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_I) \cap \mathcal{O}(\Omega_I)$ ,
- (2)  $f(z) = O\left(e^{|z|^\beta}\right)$  für  $|z| \rightarrow \infty$  und  $1 < \beta < \alpha$ ,
- (3) für alle  $z \in \partial\Omega_I$  gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M > 0$ .

Dann gilt für alle  $z \in \Omega_I$  die Ungleichung  $|f(z)| \leq M$ .

*Beweis.* Sei ein  $\gamma \in (\beta, \alpha)$  und ein  $\epsilon > 0$  gegeben. Die Potenzfunktion  $z^\gamma := e^{\gamma \log z}$  ist in der offenen rechten Halbebene holomorph. Also ist die Funktion  $F(z) := f(z)e^{-\epsilon z^\gamma} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_I) \cap \mathcal{O}(\Omega_I)$ . Damit erhalten wir folgende Abschätzung

$$|F(z)| = |f(z)| e^{-\epsilon |z|^\gamma \cos \gamma \theta}, \quad (1.31)$$

da  $z^\gamma = |z|^\gamma (\cos \gamma \theta + i \sin \gamma \theta)$ . Da  $\gamma < \alpha$  gilt auf den Geraden  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}/\alpha$  die Ungleichung  $0 < \cos \gamma \theta \leq 1$ , weshalb die Exponentialfunktion durch 1 beschränkt ist und damit können wir die Funktion  $F$  auf den Geraden abschätzen durch

$$|F(z)| \leq |f(z)| \leq M.$$

Damit ist die Funktion  $F$  auf den Geraden ebenfalls durch  $M$  beschränkt. Nun betrachten wir einen Kreisbogen mit Radius  $|z| = R$  und  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}/\alpha, \frac{\pi}{2}/\alpha]$ . Dort gilt

$$|F(z)| = |f(z)| e^{-\epsilon R^\gamma \cos \gamma \theta} \leq |f(z)| e^{-\epsilon R^\gamma \cos \frac{\pi}{2} \frac{\gamma}{\alpha}} < A e^{R^\beta - \epsilon R^\gamma \cos \frac{\pi}{2} \frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Da nun  $\beta < \gamma$ ,  $\cos \gamma \theta > 0$  für  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}/\alpha$  strebt die rechte Seite für  $R \rightarrow \infty$  gegen 0. Damit gilt für genügend grosses  $R$  die Abschätzung  $|F(z)| \leq M$ . Verwenden wir nun das Maximumprinzip, dann gilt für alle  $z = re^{i\theta}$  mit  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}/\alpha, \frac{\pi}{2}/\alpha]$  und  $r \leq R$  die Abschätzung

$$|F(z)| \leq M$$

und da  $R$  beliebig gross ist, gilt die Abschätzung in ganz  $\Omega_I$ . Verwenden wir die Gleichung 1.31 so erhalten wir die Abschätzung

$$|f(z)| \leq M e^{\epsilon|z|^\gamma}$$

für  $z \in \Omega_I$ . Lassen wir nun  $\epsilon$  gegen 0 streben so erhalten wir das Resultat.  $\square$

**Satz 1.25.** (Phragmen-Lindelöf-Satz II)

Sei ein  $\eta > 0$  eine fixe positive Zahl und  $\Omega_{II} := \{z = x + iy \mid x \in (0, 1), y > \eta\}$ , sowie  $f : \overline{\Omega}_{II} \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplex-wertige Funktion. Der Definitionsbereich und  $f$  sollen folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i)  $f(z) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_{II}) \cap \mathcal{O}(\Omega_{II})$ ,
- (ii)  $f(z) = O(y^\alpha) \Leftrightarrow |f(z)| < Ay^\alpha$ ,  $A > 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$  und  $\alpha > 0$ ,
- (iii) für alle  $z \in \partial\Omega_{II}$  gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M > 0$ .

Dann gilt für alle  $z \in \Omega_{II}$  die Ungleichung  $|f(z)| \leq M$ .

*Beweis.* Im Folgenden bezeichnet  $\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}$  die Aufrundungsfunktion für  $x \in \mathbb{R}$ . Sei  $\epsilon > 0$  und  $\alpha > 0$  gegeben. Die rationale Funktion

$$F(z) := \frac{f(z)}{(\epsilon z + i)^{\lceil \alpha \rceil}}$$

ist holomorph im vertikalen Streifen und stetig auf dessen Abschluss. Wir schätzen nun die Funktion auf einer horizontalen Gerade mit  $\text{Im}(z) = Y > 1/\epsilon > \eta$  und  $x \in (0, 1)$  ab. Dort gilt

$$|F(z)| = \frac{|f(z)|}{|\epsilon z + i|^{\lceil \alpha \rceil}} = \frac{|f(z)|}{Y^\alpha} \cdot \frac{Y^\alpha}{|\epsilon z + i|^{\lceil \alpha \rceil}} < A \frac{Y^\alpha}{|\epsilon|z| - 1|^{\lceil \alpha \rceil}} \leq A \frac{Y^\alpha}{|\epsilon Y - 1|^{\lceil \alpha \rceil}}.$$

Da  $\lceil \alpha \rceil > \alpha$  für  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N}$  strebt die rechte Seite für  $Y \rightarrow \infty$  gegen 0 (für  $\alpha \in \mathbb{N}$  wähle in  $F$  als Nenner  $(\epsilon z + i)^{\lceil \alpha \rceil + \delta}$  für ein  $\delta > 0$ ). Damit gilt für genügend grosses  $Y$  die Abschätzung  $|F(z)| \leq M$ . Verwenden wir nun wieder das Maximumprinzip, dann gilt für alle  $z = x + iy$  mit  $x \in [0, 1], y \in [\eta, Y]$  die Abschätzung

$$|F(z)| \leq M.$$

Lassen wir nun wieder  $\epsilon$  gegen 0 gehen, so haben wir das gewünschte Resultat.  $\square$

**Satz 1.26.** (Phragmen-Lindelöf-Satz III)

Sei  $\phi : \overline{\Omega}_{III} \rightarrow \mathbb{C}$  eine reguläre Funktion mit  $\Omega_{III} := \{s = \sigma + it \mid \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2), t \in \mathbb{R}\}$  und gilt

- (1)  $\phi(s) = O(e^{\epsilon|t|})$  für  $s \in \Omega_{III}$  und alle  $\epsilon > 0$ ,
- (2)  $\phi(\sigma_1 + it) = O(|t|^{k_1})$  für  $|t| \rightarrow \infty$ ,

(3)  $\phi(\sigma_2 + it) = O(|t|^{k_2})$  für  $|t| \rightarrow \infty$ .

Dann gilt  $\phi(\sigma + it) = O(|t|^{k(\sigma)})$  für  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$  und eine lineare Funktion

$$k : \overline{\Omega}_{III} \rightarrow \mathbb{C}, k(s) = as + b, \text{ mit } \begin{cases} k(\sigma_1) = k_1 \\ k(\sigma_2) = k_2. \end{cases} \quad (1.32)$$

Die Aussage des Satzes bleibt sogar richtig, wenn die Funktion  $\phi$  eine Asymptotik der Form

$$\phi(s) = O(e^{\epsilon \sum_{i=0}^n \alpha_i |t|^i}) \text{ oder } \phi(s) = O(e^{e^{\rho|t|}})$$

erfüllt.

*Beweis.*

Spezialfall: Sei  $k_1 = k_2 = 0$  und ein  $\epsilon > 0$  gegeben. Wir unterteilen den Streifen in zwei Teile bei  $t = 0$  und betrachten zuerst die obere Hälfte. Damit ist per Voraussetzung  $\phi$  auf dem Rand  $O(1)$ . Sei  $M > 0$  eine obere Schranke auf diesen zwei Geraden, wie auch auf der Verbindungslinie zwischen  $\sigma_1, \sigma_2$ , die auf der reellen Achse liegt. Wir betrachten nun die in  $\Omega_{III}$  analytische Funktion

$$\Phi(s) := e^{i\epsilon s} \phi(s).$$

Dann gilt für  $\sigma = \sigma_1$  bzw.  $\sigma = \sigma_2$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Phi(s)| &= e^{-\epsilon t} |\phi(s)| \leq M \\ \Rightarrow \Phi(s) &= O(1) \text{ auf } \sigma = \sigma_i \text{ mit } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Also gilt für  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ :  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi(s)| = 0$ . Sei also  $T$  genügend gross gewählt, dann gilt für alle  $t \geq T$  für  $M > 0$  und  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$  die Abschätzung  $|\Phi(s)| \leq M$ . Damit gilt nach dem Maximumprinzip diese Abschätzung in allen Punkten des Rechtecks  $(\sigma_1, \sigma_2) \times (0, T)$  und damit im ganzen Streifen, da  $T$  beliebig gewählt wurde. Lassen wir nun  $\epsilon$  gegen 0 gehen so folgt

$$|\phi(s)| \leq M$$

für  $t \geq 0$ . Genau gleich folgt das Resultat für den unteren Teil des Streifens und damit im ganzen Streifen.

Allgemeiner Fall:  $k_1, k_2$  können nun beliebige Werte annehmen. Wir definieren die folgende Funktion

$$\psi(s) := (-is)^{k(s)} = e^{k(s) \log(-is)},$$

wobei  $\log$  hier den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.  $\psi$  ist regulär für  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$  und  $t \geq 1$ . Nun gilt für  $|s| \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(k(s) \log(-is)) &= \operatorname{Re}([k(\sigma) + iat] \log(t - i\sigma)) \\ &= k(\sigma) \log t + O(1) \\ \Rightarrow |\psi(s)| &= |t|^{k(\sigma)} e^{O(1)}. \end{aligned}$$

Nun definieren wir  $\Psi(s) := \frac{\phi(s)}{\psi(s)}$ . Diese Funktion erfüllt dieselben Eigenschaften wie die Funktion  $\phi$  im Spezialfall, wie man leicht überprüfen kann. Also ist  $\Psi(s)$  im betrachteten Streifen beschränkt und es gilt

$$\phi(s) = O(\psi(s)) = O(|t|^{k(\sigma)}).$$

□

### 1.8.2 Die Phragmen-Lindelöf Winkelfunktion $h(\theta)$

In unserer Diskussion über die Sätze von Phragmen und Lindelöf haben wir die Art und Weise betrachtet wie eine Funktion sich verhält, wenn  $z$  in verschiedene Richtungen gegen  $\infty$  strebt. Nun wollen wir eine systematischere Betrachtung machen. Zuerst wollen wir folgende Funktion untersuchen

$$\phi(z) := e^{(a+ib)z^\rho}. \quad (1.33)$$

Dann gilt  $|\phi(z)| = e^{|z|^\rho(a \cos \rho\theta - b \sin \rho\theta)}$ . Nun hängt das Wachstumsverhalten von  $\log |\phi(z)|$  einerseits vom Term  $|z|^\rho$ , der unabhängig von der Richtung  $\theta$  ist und einem richtungsabhängigen Teil

$$\frac{\log |\phi(z)|}{r^\rho} = a \cos \rho\theta - b \sin \rho\theta \quad (1.34)$$

ab. Obwohl es sich hierbei um einen Spezialfall handelt, stellt sich heraus, dass der allgemeine Fall sich nicht so stark von diesem unterscheidet, wie man zu Beginn annehmen könnte. Im Folgenden wollen wir voraussetzen, dass die betrachtete Funktion  $f(z)$  auf dem Gebiet  $G := \{re^{i\theta} | r \geq r_0, \theta \in (\alpha, \beta)\}$  regulär ist, wobei  $r_0 \in (0, \infty)$  und  $\alpha < \beta$ . Die eingangs betrachtete Funktion  $\phi$  motiviert die folgende Definition:

**Definition 1.8.** Wir sagen, dass eine reguläre Funktion  $f$ , die auf  $G$  definiert ist, die (Wachstums-) **Ordnung**  $\rho$  besitzt, wenn für alle  $\epsilon > 0$  gleichmässig in  $\theta$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho+\epsilon}} = 0 \quad (1.35)$$

gilt, jedoch nicht für alle negativen  $\epsilon$ . In diesem Fall definieren wir die **Winkelfunktion** von  $f$  durch

$$h(\theta) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{V(r)}, \quad (1.36)$$

wobei die Funktion  $V(r)$  von der betrachteten Funktion abhängt. Wir wählen  $V(r)$  derart, dass  $h(\theta)$  nicht für alle  $\theta$  verschwindet und keine Singularitäten besitzt.

*Bemerkung 1.4.*

- Beispielsweise hat die betrachtete Funktion  $\phi$  die Ordnung  $\rho$ .

- Im Folgenden wollen wir uns einfachheitshalber auf den Fall konzentrieren in dem die Funktion  $V(r)$  als  $r^\rho$  geschrieben werden kann. Unsere Diskussion kann jedoch problemlos auf allgemeinere Funktionen wie

$$V(r) = r^\rho (\log r)^p (\log \log r)^q \dots$$

übertragen werden.

**Satz 1.27.** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  wie oben und habe Ordnung  $\rho$ . Desweiteren seien zwei reelle Zahlen  $\theta_1, \theta_2$  gegeben, so dass gilt

$$\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta \text{ und } \theta_2 - \theta_1 < \frac{\pi}{\rho}$$

und die zu  $f$  gehörige Winkelfunktion  $h(\theta)$  die Abschätzungen

$$h(\theta_1) \leq h_1 \text{ und } h(\theta_2) \leq h_2$$

erfüllt. Sei die Funktion  $H : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  von der Form  $a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta$  und nehme in  $\theta_1, \theta_2$  die Werte  $h_1, h_2$  an. Dann gilt für alle  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  die Ungleichung

$$h(\theta) \leq H(\theta). \quad (1.37)$$

Bemerke, dass die Interpolationsfunktion  $H(\theta)$  aufgrund der Randbedingungen folgende Form annimmt

$$H(\theta) = \frac{h_1 \sin \rho(\theta_2 - \theta) + h_2 \sin \rho(\theta - \theta_1)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (1.38)$$

*Beweis.* Sei  $H_\delta(\theta) = a_\delta \cos \rho\theta + b_\delta \sin \rho\theta$  die  $H$ -Funktion mit  $H_\delta(\theta_1) = h_1 + \delta$ ,  $H_\delta(\theta_2) = h_2 + \delta$  für ein  $\delta > 0$ . Sei

$$F(z) := f(z) e^{-(a_\delta - ib_\delta)z^\rho}.$$

Dann gilt

$$|F(z)| = |f(z)| e^{-r^\rho H_\delta(\theta)} \quad (1.39)$$

und damit, wenn  $r$  gross ist, finden wir

$$F(re^{i\theta_1}) = O\left(e^{(h_1 + \delta)r^\rho - H_\delta(\theta_1)r^\rho}\right) = O(1). \quad (1.40)$$

Eine analoge Gleichung gilt für den Winkel  $\theta_2$ . Damit ist  $F$  auf den Geraden  $\theta = \theta_1$  bzw.  $\theta = \theta_2$  beschränkt und mit dem Satz von Phragmen und Lindelöf I ist  $F$  im Teilsektor von  $G$  mit Öffnungswinkel  $[\theta_1, \theta_2]$  beschränkt. Also folgt wegen 1.39 das asymptotische Verhalten von  $f$

$$f(z) = O\left(e^{H_\delta(\theta)r^\rho}\right), \quad (1.41)$$

gleichmässig im Winkel. Also  $h(\theta) \leq H_\delta(\theta)$  für  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . Da nun  $H_\delta(\theta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} H(\theta)$  folgt das Resultat.  $\square$

### 1.8.3 Der Satz von Carlson

**Satz 1.28.** Sei  $f(z)$  regulär in  $\overline{\mathbb{H}}$  und erfülle die folgenden Eigenschaften

- (1)  $f(z) = O(e^{k|z|})$  für  $z \in \mathbb{H}$  und ein  $k \in \mathbb{R}$ ,
- (2)  $f(z) = O(e^{-a|z|})$  für  $z \in \mathbb{R}$  und ein  $a > 0$ .

Dann gilt für alle  $z \in \overline{\mathbb{H}}$   $f(z) = 0$ .

*Beweis.* Wir haben die Situation  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$  und  $f$  hat dort die Ordnung  $\rho = 1$ . Wir betrachten nun zuerst den ersten Quadranten, also  $\theta_1 = 0$  und  $\theta_2 = \pi/2$ . Aus der im Satz 1.27 angegebenen Formel wissen wir, dass  $H$  die Form

$$H(\theta) = k \sin \theta - a \cos \theta$$

hat und für  $\theta \in [0, \pi/2]$  gilt nach dem Beweis

$$f(z) = O\left(e^{(k \sin \theta - a \cos \theta)r}\right). \quad (1.42)$$

Wir finden das gleiche asymptotische Verhalten für  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ . Sei nun  $F(z) := e^{-i\omega z} f(z)$  für ein grosses positives  $\omega$ , da wir nachher  $\omega \rightarrow \infty$  betrachten. Aus der Gleichung 1.42 wissen wir, dass es ein  $M > 0$  gibt, so dass

$$|F(z)| \leq e^{\omega r \sin \theta} |f(z)| \leq M \cdot e^{((k+\omega) \sin \theta - a \cos \theta)r}.$$

Sei  $\theta_\omega$  derjenige Winkel für welchen gilt

$$(k + \omega) \sin \theta - a \cos \theta = 0,$$

also  $\theta_\omega = \arctan\left(\frac{a}{k+\omega}\right)$ . Nun ist die obere Halbebene in drei Bereiche unterteilt und zwar  $(0, \theta_\omega)$ ,  $(\theta_\omega, \pi - \theta_\omega)$  und  $(\pi - \theta_\omega, \pi)$ . Auf dem Rand dieser Bereiche gilt die Abschätzung

$$|F(z)| \leq M.$$

Wenden wir nun den Satz von Phragmen und Lindelöf I für die drei Bereiche an, so folgt, dass  $|F(z)| \leq M$  auf ganz  $\mathbb{H}$  gilt und damit

$$|f(z)| \leq |e^{i\omega z}| M \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

□

**Lemma 1.8.** Sei  $f : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{C}$  eine reguläre Funktion und gilt

- (1)  $\exists k < \pi \forall z \in \mathbb{H} : f(z) = O(e^{k|z|})$
- (2)  $\forall z \in i\mathbb{N}_0 : f(z) = 0$

Dann  $f \equiv 0$ .

*Beweis.* Wir definieren  $F(z) := \frac{f(z)}{\sin(i\pi z)}$ , welche die zweite Bedingung erfüllt und nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz in  $\mathbb{H}$  holomorph ist. Sei  $C_n$  der Halbkreis um  $z = 0$  mit Radius  $n + 1/2$ . Auf diesen Halbkreisen ist  $1/\sin(i\pi z)$  gleichmässig beschränkt und  $|F(z)| = O(e^{k|z|})$ . Auf der reellen Achse gilt  $|F(z)| = O(e^{(k-\pi)|z|})$ . Aus dem Maximumprinzip folgt damit für alle  $z \in \mathbb{H}$

$$|F(z)| = O(e^{k|z|}).$$

Damit erhalten wir

$$F(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0.$$

□

## 1.9 Ein paar Anwendungen

Im folgenden Abschnitt wollen wir ein paar Anwendungen der bewiesenen Sätze diskutieren.

### 1.9.1 Riemann'sche $\zeta$ -Funktion und Lindelöf'sche Vermutung

Die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion können wir durch die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ mit } s := \sigma + it \in \mathbb{C} \quad (1.43)$$

definieren. Diese ist für  $\text{Re}(s) > 1$  holomorph und kann auf die ganze rechte Halbebene analytisch fortgesetzt werden und zwar durch das folgende Integral:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} (x - [x]) x^{-(s+1)} dx. \quad (1.44)$$

Wir haben bei  $s = 1$  einen einfachen Pol. Das Gebiet zwischen  $\sigma = 0$  und  $\sigma = 1$  ist als *kritischer Streifen* bekannt, da dort die einzigen nicht-trivialen Nullstellen der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion liegen. Beachte, dass bis heute kein rigoroser Beweis vorliegt, wo sich exakt diese Nullstellen befinden. (vgl. Riemann'sche Vermutung)

Die Funktionalgleichung der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion lautet

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (1.45)$$

und gilt für alle  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Diese bestimmt die analytische Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene, bis auf einen einfachen Pol im Punkt  $s = 1$ .

#### Lemma 1.9.

Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert eine Konstante  $C_\epsilon > 0$ , so dass folgende Ungleichung für  $t \rightarrow \infty$  gilt:

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \leq C_\epsilon \cdot |t|^{\epsilon + \frac{1}{4}}. \quad (1.46)$$

*Beweis.* Sei ein  $\epsilon > 0$  gegeben, dann wissen wir aus der Definition der Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion über die Reihe in Gleichung 1.43, dass gilt:

$$|\zeta(1 + \epsilon + it)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{1+\epsilon+it}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = \zeta(1 + \epsilon). \quad (1.47)$$

Die Funktionalgleichung 1.45 liefert

$$\zeta(1 - s) = \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \zeta(s). \quad (1.48)$$

Wir erinnern noch an die Stirling'sche Formel der  $\Gamma$ -Funktion (siehe Kap. Hypergeom. Reihe), wobei wir diese direkt für den Betrag angeben:

$$|\Gamma(\sigma + it)| \stackrel{\sigma \in [a,b], |t| \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi} |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}. \quad (1.49)$$

Setzen wir nun  $s := 1 + \epsilon + it$  in Gl. 1.48 ein, so folgt

$$\begin{aligned} |\zeta(-\epsilon - it)| &\stackrel{1.48}{=} |\pi^{-\frac{1}{2}-\epsilon-it}| \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1+\epsilon+it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\epsilon-it}{2}\right)} \right| \cdot |\zeta(1 + \epsilon + it)| \\ &\stackrel{1.47}{\leq} \pi^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1+\epsilon+it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\epsilon-it}{2}\right)} \right| \cdot \zeta(1 + \epsilon) \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \underbrace{\left| \frac{\Gamma\left(\frac{1+\epsilon+it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\epsilon-it}{2}\right)} \right|}_{\sim \sqrt{2\pi}} \underbrace{\left| \frac{|t|^{-\frac{\epsilon}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{2}}}{|t|^{-\frac{\epsilon}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{2}}} \right|}_{\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \underbrace{|t|^{\frac{1+\epsilon}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{2}}}_{=|t|^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \zeta(1 + \epsilon) \\ &\sim \pi^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \zeta(1 + \epsilon) |t|^{\frac{1}{2}+\epsilon} \end{aligned}$$

Die Funktion  $f(s) := \zeta(s)\zeta(1-s)$  ist sicherlich im Streifen  $S := \{s := \sigma + it | \sigma \in (-\epsilon, 1 + \epsilon), t > 1\}$  mit  $\epsilon > 0$  holomorph. Desweiteren erfüllt diese Funktion folgende zwei Gleichungen

$$|f(-\epsilon + it)| = |\zeta(-\epsilon + it)| |\zeta(1 + \epsilon - it)| \leq C_\epsilon |t|^{\frac{1}{2}+\epsilon} \quad (1.50)$$

$$|f(1 + \epsilon + it)| = |\zeta(1 + \epsilon + it)| |\zeta(-\epsilon - it)| \leq C_\epsilon |t|^{\frac{1}{2}+\epsilon} \quad (1.51)$$

für  $|t| \rightarrow \infty$ . Für alle  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $|t| \geq 1$

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &\leq \left| \frac{\sigma + it}{\sigma + it - 1} \right| + |\sigma + it| \int_1^\infty \underbrace{\frac{x - \lfloor x \rfloor}{x}}_{\leq 1} |x^{-\sigma-it-1}| dx \\ &\leq \frac{|\sigma + it|}{\sqrt{(\sigma - 1)^2 + t^2}} + \frac{|\sigma + it|}{\sigma} \leq |\sigma + it| + 2|\sigma + it| = 3|\sigma + it|. \end{aligned}$$

Für die kommenden Rechnung benötigen wir die folgenden zwei Identitäten:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \text{ wenn } s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (1.52)$$

$$|\Gamma(s/2)| \leq C e^{c|s| \log |s|}, \text{ wenn } \operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2} \text{ und } C, c > 0. \quad (1.53)$$

Damit finden wir für  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $|t| \geq 1$

$$\begin{aligned} |\zeta(1-\sigma-it)| &\stackrel{1.48}{=} \underbrace{|\pi^{\frac{1}{2}-\sigma-it}|}_{=\sqrt{\pi}e^{\sigma \log \pi}} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\sigma-it}{2}\right)} \right| \underbrace{|\zeta(\sigma+it)|}_{\leq 3|\sigma+it|} \\ &\leq 3|\sigma+it| \sqrt{\pi} e^{\sigma \log \pi} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+it}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1+\sigma+it}{2}\right)} \right| \\ &\stackrel{1.52}{\leq} \frac{3}{\pi^{1/2}} |\sigma+it| e^{\sigma \log \pi} \left| \Gamma\left(\frac{\sigma+it}{2}\right) \right| \left| \Gamma\left(\frac{1+\sigma+it}{2}\right) \right| \left| \sin \pi \left(\frac{1+\sigma+it}{2}\right) \right| \\ &\stackrel{1.53}{\leq} \frac{3}{\pi^{1/2}} |\sigma+it| e^{\sigma \log \pi} C_1 C_2 e^{c_1|\sigma+it| \log |\sigma+it|} e^{c_2|1+\sigma+it| \log |1+\sigma+it|} e^{\frac{\pi}{2}|1+\sigma+it|} \end{aligned}$$

Nehmen wir die zwei Abschätzungen zusammen, so erhalten wir für  $f$  im vertikalen Streifen die Ungleichung

$$|f(s)| \leq A e^{\alpha|t|}.$$

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von Phragmen und Lindelöf III erfüllt und wir erhalten im Speziellen für  $\sigma = 1/2$  und  $t \geq 1$  die Abschätzung

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \right|^2 = \left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \right| \left| \zeta\left(\frac{1}{2}-it\right) \right| \leq C_\epsilon |t|^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

□

Nun wollen wir noch eine berühmte Vermutung der analytischen Zahlentheorie erwähnen:

### Die Lindelöf Hypothese:

Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es eine Konstante  $C_\epsilon > 0$ , so dass

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \right| \leq C_\epsilon |t|^\epsilon, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (1.54)$$

### 1.9.2 Lindelöf'sche Vermutung und ihre Konsequenzen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir unter anderem die folgenden Resultate gezeigt:

- Lemma 1.9:  $|\zeta(1/2+it)| = O(|t|^{1/4+\epsilon})$ ,  $\forall \epsilon > 0, |t| \rightarrow \infty$ .
- Aus Beweis von Lemma 1.9:  $\forall \sigma \geq 1/2 \forall |t| \geq 1$ :  $|\zeta(\sigma+it)| \leq 3|\sigma+it|$ .
- Lindelöf'sche Vermutung:  $|\zeta(1/2+it)| = O(|t|^\epsilon)$ ,  $\forall \epsilon > 0$ .

Unter Verwendung dieser Beobachtungen können wir einerseits eine kleinere obere Schranke für die Riemann'sche Zeta-Funktion angeben und andererseits die Anzahl der Nullstellen in einem horizontalen Streifen abschätzen.

**Lemma 1.10.**  $\forall \epsilon > 0 \exists C_\epsilon > 0, T > 1 \forall |t| \geq T \forall \sigma \in [\frac{1}{2}, 4] : |\zeta(\sigma + it)| \leq C_\epsilon |t|^\epsilon.$

*Beweis.* Ist  $\sigma > 1$ , so ist  $|\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$ , also ist auf der Geraden  $s = 4 + it$  die Zeta-Funktion beschränkt. Andererseits gilt für die Zeta-Funktion  $|\zeta(\sigma + it)| \leq 3|\sigma + it|$ , wenn  $\sigma \geq 1/2$ ,  $|t| \geq 1$ . Sei nun ein  $\epsilon > 0$  und ein  $T > 1$  fixiert. Dann wissen wir wegen der Lindelöf'schen Vermutung und den erwähnten Abschätzungen, dass  $f(z) = \zeta(z)/z^\epsilon$  alle Voraussetzungen des zweiten Satzes von Phragmen und Lindelöf erfüllt, also gilt  $\zeta(z)/z^\epsilon = O(1)$ . Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Im Folgenden bezeichne  $N(\sigma, T)$  die Anzahl der Nullstellen der Zeta-Funktion mit einem Real- bzw. Imaginärteil grösser gleich  $\sigma$  bzw.  $T$ .

**Lemma 1.11.** Wenn  $\sigma > 1/2$  und die Lindelöf'sche Vermutung gilt, dann haben wir

$$N(\sigma, T + 1) - N(\sigma, T) = O(\log T) \quad (1.55)$$

*Beweis.* Sei  $\sigma \in (1/2, 4)$ . Wir betrachten nun einen Kreis mit Radius  $r := 3/2 - \delta/4$  um den Punkt  $2 + it$ , wobei  $\delta := \sigma - \frac{1}{2}$ . Hat es in  $B_r(2 + it)$   $n$  Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion und sind die Abstände dieser zum Punkt  $2 + it$  durch  $r_1, \dots, r_n$  mit  $r_i \geq 1$  gegeben, dann erhalten wir mit der Formel von Jensen den folgenden Ausdruck:

$$\underbrace{\log \frac{r^n}{r_1 \cdots r_n}}_{=\sum_{i=1}^n \log \frac{r}{r_i}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\zeta(2 + it + re^{i\theta})| d\theta - \log |\zeta(2 + it)|}_{\rightarrow O(\log |t|)}.$$

Wenn nun  $N$  der  $n$  Nullstellen in der Kreisscheibe mit Radius  $3/2 - \delta/2$  um  $2 + it$  liegen, dann gilt für jede solche Nullstelle die Abschätzung

$$\log \frac{r}{r_i} \geq \log \frac{3/2 - \delta/4}{3/2 - \delta/2} = \log \left( 1 + \frac{\delta/2}{3 - \delta} \right) > 1.$$

Schlussendlich haben wir

$$\underbrace{N \cdot \log \left( 1 + \frac{\delta/2}{3 - \delta} \right)}_{=\text{const.}} \leq \log \frac{r^n}{r_1 \cdots r_n} = O(\log |t|) \Rightarrow N = O(\log |t|).$$

Überdecken wir den Bereich  $\{z \in \mathbb{C} | \text{Re}(z) \geq \sigma, T \leq \text{Im}(z) \leq T + 1\}$  durch endlich viele Kreisscheiben, so erhalten wir die gewünschte Aussage.  $\square$

### 1.9.3 Der Satz von Paley-Wiener

**Satz 1.29.** (Paley-Wiener) Sei  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  mit  $f(x) \leq \frac{A}{1+|x|^{1+\epsilon}}$  für ein  $A, \epsilon > 0$ . Dann gilt:

$$f \text{ ist auf ganz } \mathbb{C} \text{ fortsetzbar mit } |f(z)| \leq Be^{M|z|} \text{ mit } M > 0 \Leftrightarrow \\ \hat{f}(k) = 0 \text{ für alle } k \notin [-M, M].$$

*Beweis.* Per Voraussetzung gilt  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und damit ist  $\hat{f}$  stetig. Wenn  $\hat{f}$  ausserhalb eines Intervalls  $[-M, M]$  verschwindet, dann ist  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  und es gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^M \hat{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich von der reellen Achse zu einer ganzen Funktion fortsetzen. Nun schätzen wir ab

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{k \in [-M, M]} |\hat{f}(k)| \int_{-M}^M e^{-ky} dk \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{k \in [-M, M]} |\hat{f}(k)| \cdot 2Me^{M|y|} \\ &\leq Be^{M|z|}. \end{aligned}$$

□

### 1.9.4 Green'sche Funktionen in der Vielteilchentheorie\*

Alle Abschnitte im Skript, welche mit einem Stern versehen sind, stellen fakultative Inhalte dar. Wir starten mit einem euklidischen reellen Vektorraum  $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit  $\dim \mathcal{F} = N < \infty$  und bezeichnen mit  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  den komplexifizierten Raum. Physikalisch entspricht  $\mathcal{F}$  beispielsweise dem Fockraum, also der direkten Summe über alle  $n$ -Teilchen-Hilbert-Räume. Sei  $\mathcal{H}$  der selbstadjungierte Vielteilchen-Hamilton-Operator auf  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  mit positiven Eigenwerten  $0 < E_1 \leq \dots \leq E_N$  und  $v_1, \dots, v_n$  bezeichne seine Eigenbasis. Sei weiter ein Operator  $A$  auf  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  gegeben. Nun betrachten wir den thermischen Erwartungswert (im kanonischen Ensemble) von  $A$ , d.h.

$$\langle A \rangle := \langle A \rangle_{\beta} = \frac{\text{Tre}^{-\beta H} A}{Z}, \quad Z := \text{Tre}^{-\beta H}, \quad (1.56)$$

wobei  $\beta > 0$  die inverse Temperatur ist und  $Z$  die kanonische Zustandssumme, welche als die Anzahl der zur Verfügung stehenden Zustände im Phasenraum interpretiert werden kann. Die Zeitentwicklung wird im Heisenberg-Bild auf die Operatoren anstatt der Zustände, wie im Schrödinger-Bild, übertragen und deren Zeitentwicklung ist durch den unitären Schrödinger-Propagator bestimmt

$$A_H(t) = U^*(t) A_S(t) U(t) \quad \text{mit} \quad U(t) := \exp\left(-i \int_0^t H(t') dt'\right) \stackrel{*}{=} \exp(-iHt). \quad (1.57)$$

Die Gleichheit  $\star$  gilt natürlich nur, wenn  $[H(t_1), H(t_2)] = 0$  (vgl. Heisenberg'sche Bewegungsgleichung) was wir hier annehmen wollen. Ab jetzt arbeiten wir nur noch im Heisenberg-Bild und lassen deshalb den Index  $H$  weg. Wenn wir  $\tau := it$  setzen, also zu imaginären Zeiten übergehen können wir auch schreiben

$$\tilde{A}(\tau) = e^{\tau H} A e^{-\tau H} \quad (1.58)$$

Nun wollen wir die einfachst denkbaren Korrelationsfunktionen einführen und zwar über den definierten thermischen Erwartungswert. Da Operatoren i.A. nicht kommutieren, unterscheiden wir zwei Fälle:

$$G_{A,B}^>(t) := \frac{1}{i} \langle A(t) B(0) \rangle_\beta \quad (1.59)$$

$$G_{A,B}^<(t) := -\frac{1}{i} \langle B(0) A(t) \rangle_\beta \quad (1.60)$$

Eigentlich würden wir besser der Allgemeinheit wegen  $G_{A,B}^>(t, t') = \frac{1}{i} \langle A(t) B(t') \rangle_\beta$  schreiben, aber die Korrelationsfunktion ist wegen der Zyklizität der Spur translationsinvariant. Desweiteren bemerken wir noch, dass  $G^{</>}(t)$  als Funktionen in  $t$  analytische in ganz  $\mathbb{C}$  sind.

**Lemma 1.12.**

- (i) Imag. Zeittranslation:  $G_{AB}^<(t + i\beta) = -G_{AB}^>(t) \Leftrightarrow G_{AB}^<(t) = -G_{AB}^>(t - i\beta)$
- (ii) Zeitumkehr:  $G_{AB}^<(t) = -G_{BA}^>(-t)$

*Beweis.* Wir beweisen nur die erste Aussage des Lemmas, da die zweite analog zu beweisen ist. Aufgrund der bekannten Eigenschaften der Spur für Matrizen sehen wir leicht:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( e^{-\beta H} B e^{i(t+i\beta)H} A e^{-i(t+i\beta)H} \right) &= \text{Tr} \left( e^{-\beta H} B e^{-\beta H} A(t) e^{\beta H} \right) \\ &= \text{Tr} \left( e^{-\beta H} A(t) B \right). \end{aligned}$$

□

Wir definieren das **Spektralgewicht** durch den Ausdruck

$$\rho(t) := i [G^>(t) - G^<(t)] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \{A(t), B\} \right), \quad (1.61)$$

wobei  $\{A, B\} := AB + BA$  den Antikommutator bezeichnet.

Die **Matsubara Grenn'sche Funktion** ist definiert durch den Ausdruck

$$\mathcal{G}(\tau) := -\frac{1}{Z} \text{Tr} \left( e^{-\beta H} e^{\tau H} A e^{-\tau H} B \right) = -iG^>(-i\tau), \quad (1.62)$$

wobei wir die Grösse  $\tau$  einschränken müssen auf das offene Intervall  $(0, \beta)$ , da für  $\tau - \beta > 0$  und ein unendliches Energiespektrum, wir keinen Spurklasse-Operator mehr hätten. Wir setzen nun die Green'sche Funktion anti-periodisch fort durch den Ausdruck

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{k_0 \in M_F} \gamma(k_0) e^{-ik_0\tau}, \quad (1.63)$$

wobei  $M_F = \frac{\pi}{\beta}(2\mathbb{Z} + 1)$  **Matsubara-Frequenzen** heissen und die Koeffizienten  $\gamma(k_0)$  berechenbare Grössen (Feynman-Diagramme) darstellen.

Frage: Was ist die Beziehung zwischen den Koeffizienten und der Fourier-Transformation von  $\rho(t)$ .

Wir betrachten folgenden Funktion

$$\Gamma(z) := \begin{cases} -i \int_0^\infty \rho(t) e^{itz} dt, & \text{Im}(z) > 0, \\ i \int_{-\infty}^0 \rho(t) e^{itz} dt, & \text{Im}(z) < 0, \end{cases} \quad (1.64)$$

welche im oberen und unteren Fall jeweils in der oberen bzw. unteren Halbebene analytisch sind.

Werden eventuell später mit Paley-Wiener sehen:

$$\Gamma(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\tilde{\rho}(\omega)}{z - \omega}. \quad (1.65)$$

**Satz 1.30.** Für alle Matsubara-Frequenzen gilt

$$\gamma(k_0) = 2\pi\Gamma(ik_0). \quad (1.66)$$

*Beweis.* Für  $k_0 > 0$  und für beliebiges  $z \in \mathbb{H}$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \mathcal{G}(\tau) e^{\tau z} d\tau &= -i \int_0^\beta G^>(-i\tau) e^{\tau z} d\tau \\ &= -i \int_{-\beta}^0 G^>(i\tau) e^{-\tau z} d\tau \\ &\stackrel{s:=i\tau}{=} - \int_{-i\beta}^0 G^>(s) e^{isz} ds \\ &\stackrel{(*)}{=} - \int_0^\infty G^>(t - i\beta) e^{i(t-i\beta)z} dt + \int_0^\infty G^>(t) e^{itz} dt \\ &= \int_0^\infty [G^>(t) + e^{\beta z} G^<(t)] e^{itz} dt \\ &\stackrel{z=ik_0}{=} \int_0^\infty [G^>(t) - G^<(t)] e^{-tk_0} dt \\ &= -i \int_0^\infty \rho(t) e^{-k_0 t} dt = -\Gamma(ik_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma(k_0) = 2\pi \int_0^\beta \mathcal{G}(t) e^{-ik_0 t} dt = 2\pi \Gamma(ik_0).$$

Also wissen wir, dass die Werte der  $\Gamma$ -Funktion in den Matsubara-Frequenzen eindeutig bestimmt sind durch die Koeffizienten  $\gamma$ . Nun wollen wir uns davon überzeugen, dass die Gleichheit (\*) in der Tat gilt (Cauchy-Argument). Wir wählen als Integrationskontur das folgende Rechteck und betrachten nachher den Grenzwert ( $r \rightarrow \infty$ ).

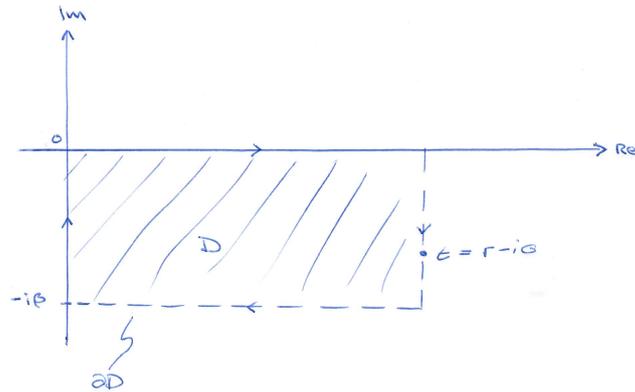


Abbildung 1: Integrationskontur

Da die zu integrierende Funktion analytisch ist, verschwindet das Integral über  $\partial D$ . Nun wollen wir das Integral auf der rechten Seite abschätzen. Sei deshalb  $t := r - i\sigma$  und  $A_{mn}, B_{mn}$  bezeichne die Einträge der Darstellungsmatrizen der Operatoren  $A, B$  bezüglich der Eigenbasis von  $H$ . Damit erhalten wir durch mehrfaches Benutzen der Vollständigkeitsrelation  $\sum_m |m\rangle\langle m| = \text{id}$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr} e^{-\beta H} e^{itH} A e^{-itH} B &= \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} e^{itE_m} A_{mn} e^{-itE_n} B_{nm} \\ &= \sum_{m,n} e^{-(\beta-it)E_m} e^{-itE_n} A_{mn} B_{nm} \\ &\Rightarrow |G^>(t)| \leq \frac{1}{Z} \sum_{m,n} |e^{-(\beta-it)E_m} e^{-itE_n} A_{mn} B_{nm}| \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{mn} e^{(\beta-\sigma)E_m} e^{-\sigma E_n} |A_{mn}| |B_{nm}| \\ &\leq \frac{1}{Z} \sum_{m,n} |A_{mn}| |B_{nm}| \Rightarrow G^>(t) = O(1). \end{aligned}$$

Wenn nun  $z = x + iy$  mit  $y > 0$ ,  $t = r - i\sigma$ , dann  $|e^{itz}| = e^{-ry} e^{\sigma x}$  und damit

$$|G^>(t) e^{itz}| \leq (\text{const} \cdot e^{\beta x}) \cdot e^{-ry} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Also verschwindet nach der Standardabschätzung das Integral auf der rechten Seite. Damit haben wir die verwendete Gleichung.  $\square$

*Bemerkung 1.5.* Beobachte, dass wir für  $z = x + iy$  mit  $y > 0$  folgende Abschätzung haben:

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^\infty |e^{itz}| |G^>(t)| dt \stackrel{\sigma=0}{\leq} \text{const} \int_0^\infty e^{-ry} dt \leq \frac{\text{const}}{y}$$

**Folgerung** (Baym Mermin):

- $\Gamma(z)$  ist die einzige analytische Funktion mit

$$\Gamma(ik_0) = 2\pi\gamma(k_0) \quad \text{für } k_0 \in M_F. \quad (1.67)$$

- $\exists C > 0 \exists k < \pi \forall z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 1 : |\Gamma(z)| \leq C e^{k|z|}$ .

*Beweis.* Verwende den Satz von Carlson.  $\square$

## 2 Hypergeometrische Funktionen

Wir folgen zu einem grossen Teil dem Buch Gogolin (im Speziellen Kap. 2.1) und dem Buch Funktionentheorie 2 von Remmert.

### 2.1 Die Gamma-Funktion

Eine ähnliche Diskussion über die Gamma-Funktion findet man im Kapitel 2 im Buch von R. Remmert ([2]).

#### 2.1.1 Definition der Gamma-Funktion und die Partialbruchdarstellung

Bevor wir die Gamma-Funktion definieren, wollen wir ein paar wichtige Resultate beweisen, welche wir später für den Beweis der Konvergenz benötigen.

**Lemma 2.1.** (Leibnizregel I)

Sei  $\Omega \in \text{Open}(\mathbb{C})$  und  $\phi : \Omega \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, so dass für jedes  $t \in [\alpha, \beta]$  die Abbildung  $\phi(\cdot, t) \in \mathcal{O}(\Omega)$  holomorph ist. Definiere  $\Phi, \Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\Phi(z) := \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z, t) dt, \quad \Psi(z) := \int_{\alpha}^{\beta} \phi'(z, t) dt. \quad (2.1)$$

Dann ist  $\Phi \in \mathcal{O}(\Omega)$  und  $\Phi' = \Psi$ .

Wir bemerken noch, dass dieses Lemma im allgemeineren Rahmen der abstrakten Integrationstheorie auch unter dem Namen "Leibniz-Regel" bekannt ist.

*Beweis.* O.B.d.A. setzen wir  $\alpha = 0, \beta = 1$ . Sei  $z_0 \in \Omega$  und ein  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle  $r > 0$ , so dass  $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$ . Dann ist die Funktion  $\overline{B}_r(z_0) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, (z, t) \mapsto \phi'(z, t)$  gleichmässig stetig, also gibt es ein  $\delta \in (0, r)$ , so dass für alle  $t \in [0, 1]$  und  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |\phi'(z, t) - \phi'(z_0, t)| < \epsilon.$$

Also erhalten wir mit der Standardabschätzung

$$|\Psi(z) - \Psi(z_0)| \leq \int_0^1 |\phi'(z, t) - \phi'(z_0, t)| dt < \epsilon.$$

Zusätzlich finden wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(z, t) - \phi(z_0, t)}{z - z_0} - \phi'(z_0, t) \right| &= \left| \int_0^1 \phi'(z_0 + s(z - z_0), t) - \phi'(z_0, t) ds \right| \\ &= \int_0^1 |\phi'(z_0 + s(z - z_0), t) - \phi'(z_0, t)| ds \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

und daher durch Integration über  $t$

$$\left| \frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{z - z_0} - \Psi(z_0) \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{\phi(z, t) - \phi(z_0, t)}{z - z_0} - \phi'(z_0, t) \right| dt < \epsilon.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

**Satz 2.1.** (Majorantenkriterium)

Sei  $\Omega \in \text{Open}(\mathbb{C})$  und  $f : \Omega \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $a \in \mathbb{R}$ . Gibt es eine uneigentlich R-integrable Funktion  $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (Majorante), so dass

$$\forall z \in \Omega, t \in [a, \infty) : |f(z, t)| \leq g(t), \quad (2.2)$$

dann konvergiert  $\int_a^\infty f(z, t) dt$  gleichmässig und absolut in  $\Omega$ . Falls  $f(\cdot, t) \in \mathcal{O}(\Omega)$  für jedes  $t \in [a, \infty)$ , dann ist  $\int_a^\infty f(z, t) dt$  holomorph in  $\Omega$ .

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$ . Wir wählen ein  $b \geq a$ , so dass  $\int_b^\infty g(t) dt < \epsilon$ . Dann folgt für alle  $z \in \Omega$  und ein  $c \in (b, \infty)$  mit der Standardabschätzung

$$\left| \int_b^c f(z, t) dt \right| \leq \int_b^c |f(z, t)| dt \leq \int_b^c g(t) dt < \epsilon.$$

Also ist nach dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium das uneigentliche Integral über  $f$  in  $\Omega$  absolut und gleichmässig konvergent. Ist  $f(\cdot, t) \in \mathcal{O}(\Omega)$ , dann gilt für  $\alpha, \beta \in [a, \infty)$  immer  $\int_\alpha^\beta f(z, t) dt \in \mathcal{O}(\Omega)$  nach dem bewiesenen Lemma. Dann gilt auch  $\int_a^\infty f(z, t) dt \in \mathcal{O}(\Omega)$ .  $\square$

*Bemerkung 2.1.* Die Holomorphie liesse sich auch mit dem Satz von Vitali nachweisen.

Im folgenden Satz verwenden wir die Abkürzungen:

$$S_x^+ := \{z \in \mathbb{C} | \text{Re}(z) \geq x\} \text{ und } S_x^- := \{z \in \mathbb{C} | \text{Re}(z) \leq x\}$$

$$u(z) := \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt \text{ und } v(z) := \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

**Satz 2.2.** Seien die Funktionen  $u, v$  wie oben und für alle  $x \in \mathbb{R}$  bezeichne  $S_x^\pm$  die abgeschlossene rechte bzw. linke Halbebene. Dann gilt

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $v(z)$  gleichmässig und absolut in  $S_x^-$ . Weiter gilt  $v \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ .
- (2)  $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$  konvergiert  $u(z)$  gleichmässig und absolut in  $S_x^+$ . Es gilt  $u(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{T})$  und für jedes  $z \in \mathbb{T}$  haben wir

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}. \quad (2.3)$$

*Beweis.*

- (1) Sei  $z := \sigma + is$  und  $z \in S_x^-$ , sowie  $t \in [1, \infty)$ . Dann gilt die Abschätzung  $|t^{z-1}| = e^{(\sigma-1) \log t} \leq t^{x-1}$ . Da nun die Abbildung  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t/2}$  stetig ist und  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{x-1} e^{-t/2} = 0$  gilt, gibt es eine Konstante  $M > 0$ , so dass  $|t^{z-1} e^{-t}| \leq M e^{-t/2}$ . Da  $\int_1^\infty e^{-t/2} dt = 2e^{-1/2}$  existiert und  $t^{z-1} e^{-t}$  eine ganze Funktion ist, folgen die Behauptungen anhand des bewiesenen Majorantenkriteriums mit  $g(t) := M e^{-t/2}$ .

(2) Setzen wir  $\tau := 1/t$ , so haben wir  $u(z) = \int_1^\infty \tau^{-z-1} e^{-1/\tau} d\tau$ . Falls  $x > 0$ , so gilt für alle  $z \in S_x^+$

$$|e^{-1/\tau} \tau^{-z-1}| \leq \tau^{-x-1} \text{ und } \int_1^\infty \tau^{-x-1} d\tau = 1/x < \infty.$$

Das Majorantenkriterium gibt nun die Behauptungen über  $u$  bis auf die Reihendarstellung. Jedoch für  $\delta \in (0, 1)$  haben wir

$$\begin{aligned} \int_\delta^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \int_\delta^1 t^{z+k-1} dt \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} - \delta^z \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\delta^k}{z+k} \\ &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}. \end{aligned}$$

Das zweite Term strebt für  $\delta \rightarrow 0$  gegen Null, da  $\operatorname{Re}(z) = \sigma > 0$ . Wir bemerken noch, dass die Integrale  $u(x)$  für  $x < 0$  divergieren würden. Da für  $t \in (0, 1]$  gilt

$$\int_\delta^1 t^{x-1} e^{-t} dt \geq e^{-1} \int_\delta^1 t^{x-1} dt = \frac{1 - \delta^x}{e \cdot x} \xrightarrow{\delta \downarrow 0} \infty.$$

Also divergiert das Integral nach dem Minorantenkriterium. □

**Definition 2.1.** Wir definieren die **Gamma-Funktion** durch das folgende uneigentliche R-Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (2.4)$$

welches für  $z \in \mathbb{T}$  konvergiert. Das Integral konvergiert nach dem Gesagten sogar gleichmässig und absolut in jedem Streifen  $\{z \in \mathbb{C} | a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$  mit  $0 < a < b < \infty$ . Dieses Integral wurde 1811 von Legendre das **Euler'sche Integral 2. Art** genannt.

*Beweis.* Mit den geleisteten Vorarbeiten ist nun der Beweis sehr einfach. Die Konvergenz folgt aus dem eben bewiesenen Satz, denn unsere Definition der Gamma-Funktion stimmt in  $\mathbb{T}$  gerade mit der Funktion  $F = u + v$  überein. Wir sehen damit auch, dass  $\Gamma$  analytisch in  $\mathbb{T}$  ist. □

Als nächstes wollen wir eine weitere Darstellung der Gamma-Funktion angeben, welche direkt aus unserem Beweis folgt:

**Satz 2.3.** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  gilt

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.5)$$

Man spricht auch von der **Partialbruchdarstellung** der Gamma-Funktion.

*Beweis.*

Aus dem obigem Beweis wissen wir, dass die Darstellung für  $z \in \mathbb{T}$  gilt. Da die auftretenden Funktionen holomorph in  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  sind, folgt die Aussage mit dem Identitätssatz. Dass die Gamma-Funktion in diesem Bereich holomorph ist, sehen wir später über die Funktionalgleichung.  $\square$

### 2.1.2 Zwei Anwendungen des Satzes von Vitali und ein zweiter Beweis für die Konvergenz des $\Gamma$ -Integrals\*

Der im ersten Kapitel bewiesene Satz von Vitali wird oftmals als ein Anhängsel zum Satz von Montel betrachtet, jedoch erweist sich dieser in vielen Situationen als äusserst nützlich um die Holomorphie von verschachtelten Ausdrücken zu beweisen. Wir wollen dies an zwei klassischen Beispielen illustrieren.

Am Anfang dieses Kapitels haben wir die Leibnizregel für reelle Integrale gezeigt. Diese lässt sich auf komplexe Integrale verallgemeinern, also dass auch bei diesen Differentiation und Integration vertauscht werden darf und dies ist gerade der Inhalt des nächsten Satzes. Im Folgenden sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  stets ein  $C^1_{\text{p.w.}}$ -Weg.

**Satz 2.4.** (Leibnizregel II)

Sei eine stetige Abbildung  $f : \Omega \times \text{Bild}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(z, \lambda) \mapsto f(z, \lambda)$  gegeben, welche für jeden Punkt  $\lambda \in \text{Bild}(\gamma)$  holomorph im Bereich  $\Omega$  sein soll. Weiter nehmen wir an, dass jedes Riemann'sche Integral  $\int_{\gamma} f(z, \lambda) d\lambda$  existiert. Dann ist die Funktion

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z, \lambda) d\lambda \quad (2.6)$$

holomorph in  $\Omega$ . Aufgrund der Holomorphie existieren auch die Wegintegrale der Ableitungen und dann gilt

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \lambda) d\lambda \quad (\text{Vertauschungsregel}). \quad (2.7)$$

*Beweis.* Eine erste Möglichkeit wäre die Aussage über den Satz von Morera zu beweisen, was wir hier aber nicht tun wollen. Wir nehmen an  $f$  sei durch eine Konstante  $M > 0$  beschränkt und setzen  $g(z, t) := f(z, \gamma(t)) \gamma'(t)$ . Aus den Voraussetzungen wissen wir, dass für jeden Punkt  $z \in \Omega$  jede beliebige Riemann'sche Partialsumme

$$S_n(z) := \sum_{k=1}^n g\left(z, \lambda_k^{(n)}\right) \left(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}\right)$$

gegen die Funktion  $F$  konvergiert. Also hat die Menge der Konvergenzpunkte insbesondere einen Häufungspunkt. Die Funktionen  $S_n$  sind holomorph in  $\Omega$  und es gilt  $|S_n|_{\Omega} \leq M \cdot |\gamma'|_{[0,1]}$ . Somit konvergiert die Folge  $S_n$  nach dem Satz von Vitali kompakt in  $\Omega$  gegen die Grenzfunktion  $F$  und diese ist wegen dem Satz von Weierstrass holomorph in  $\Omega$ . Wegen dem Satz von Weierstrass gilt auch  $S'_n \rightarrow F'$ . Da die  $S'_n$  beliebige Riemann'sche Partialsummen zu  $\frac{\partial g}{\partial z}$  bilden, ist alles gezeigt.  $\square$

*Bemerkung 2.2.* Die Aussage des Satzes behält seine Gültigkeit, wenn  $f$  nur lokal beschränkt ist.

Als eine zweite Anwendung des Satzes von Vitali wollen wir die kompakte Konvergenz des  $\Gamma$ -Integrals zeigen.

**Satz 2.5.** Das  $\Gamma$ -Integral konvergiert kompakt, d.h. es konvergiert auf jedem Kompaktum gleichmässig.

*Beweis.* Seien  $a, b \in (0, \infty)$  gegebene positive Zahlen mit  $a < b$ . Da der Integrand in  $\mathbb{C} \times [a, b]$  stetig ist und für feste  $t$  holomorph ist, gilt

$$f(z; a, b) := \int_a^b t^{z-1} e^{-t} dt \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

nach der Leibnizregel. Aus der Analysis-Vorlesung des Basisjahres wissen wir, dass das reelle  $\Gamma$ -Integral konvergent ist für  $x > 0$  (Übung: Spalte das Integral auf und verwende das Majorantenkriterium). Daraus folgt:

*Die Familie  $\{f(z; a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < a < b\}$  ist lokal beschränkt in  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , denn für alle  $z = x + iy$  mit  $0 < c \leq x \leq d < \infty$  gilt*

$$|f(z; a, b)| \leq \int_0^1 t^{c-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{d-1} e^{-t} dt < \infty.$$

Nun erhalten wir mit dem Satz von Vitali direkt:

*Für jede Wahl von reellen Folgen  $a_n, b_n$  mit  $0 < a_n < b_n$  mit  $\lim_n a_n = 0$  und  $\lim_n b_n = \infty$  konvergiert die Folge der Funktionswerte  $\{f(z; a_n, b_n)\}$  in  $\mathbb{T}$  kompakt gegen eine in  $\mathbb{T}$  holomorphe Funktion.*

Da die Grenzfunktion unabhängig von der Wahl der Folgen ist, denn auf  $(0, \infty)$  stimmt sie ja mit der reellen Gamma-Funktion überein, so sieht man, dass das komplexe  $\Gamma$ -Integral auf  $\mathbb{T}$  existiert und dieses dort holomorph ist.  $\square$

**Aufgabe 1.** Beweise die kompakte Konvergenz der komplexen Beta-Funktion in  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$  unter Benutzung der punktweisen Konvergenz des Integrals

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \text{ für } x, y > 0.$$

Für die Definition der Beta Funktion vergleiche Abschnitt 2.1.5.

*Bemerkung 2.3.* Wir wollen hier die Konvergenz der reellen Beta-Funktion zeigen. Für  $x, y > 0$  spalten wir das Integral auf:

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Für  $x, y \geq 1$  handelt es sich beim Integranden um eine beschränkte Funktion auf  $[0, 1]$  und damit existiert das Integral. Für  $0 < x, y < 1$  benutzen wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1/2] : \quad t^{x-1} (1-t)^{y-1} &\leq t^{x-1} 2^{y-1} \\ \forall t \in [1/2, 1] : \quad t^{x-1} (1-t)^{y-1} &\leq 2^{x-1} t^{y-1}. \end{aligned}$$

Da nun die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^{1/2} t^{x-1} dt \quad \text{und} \quad \int_{1/2}^1 (1-t)^{y-1} dt$$

für  $0 < x, y < 1$  konvergieren, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Beta-Funktion für  $x, y > 0$ .

### 2.1.3 Elementare Eigenschaften der Gamma-Funktion

Nun machen wir ein paar elementare Betrachtungen:

- Durch eine elementare Integration finden wir:  $\Gamma(1) = 1$ .
- Mit Hilfe einer partiellen Integration sehen wir für  $z \in \mathbb{T}$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} \frac{d}{dt} t^z dt = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Dies führt auf die **Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion** (manchmal auch Rekursionsrelation genannt):

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.8)$$

- Wenn wir nun die partielle Integration, wie oben,  $(n+1)$ -mal durchführen so folgt schlussendlich die Gleichungskette

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{\prod_{k=0}^n (z+k)} \quad (2.9)$$

und mit dieser Darstellung können wir die Gamma-Funktion meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen.

- Zusätzlich erhalten wir aus der obigen Gleichungskette die Identität

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{wenn } n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.10)$$

Aus diesem Grund kann die Gamma-Funktion als eine Verallgemeinerung der Fakultät auf beliebige Argumente aufgefasst werden.

- *Meromorphe Fortsetzung:* Die Funktionalgleichung definiert  $\Gamma(z)$  im Gebiet  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$  und für die rechte Seite dieser Gleichung darf das Euler'sche Integral 2. Gattung verwendet werden. Die Gleichung  $\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1) / \prod_{k=0}^n (z+k)$

definiert analog  $\Gamma(z)$  für  $-(n+1) < \operatorname{Re}(z) < -n$ . Auf diese Weise erhalten wir die Gamma-Funktion überall in  $\operatorname{Re}(z) < 0$ . Als Nebenprodukt stellen wir fest, dass die Funktion dort überall analytisch ist, ausser an den Punkten  $z = -n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Um den Typ der Singularitäten zu bestimmen setzen wir  $z = -n + \epsilon$  mit  $\epsilon < 1$  in  $\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1) / \prod_{k=0}^n (z+k)$  ein und entwickeln diese

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \Gamma(\epsilon + 1) / \prod_{k=0}^n (-n + \epsilon + k) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\epsilon} + O(1).$$

Wir stellen also fest, dass diese Singularitäten einfache Pole sind und ihre Residuen sind gegeben durch

$$\operatorname{Res}[\Gamma, z = -n] = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Bei endlichem  $z$  hat die Gamma-Funktion keine weiteren Singularitäten. Die Residuen sieht man auch direkt an der Darstellung in Satz 2.2, denn  $v$  ist ja eine ganze Funktion.

**Satz 2.6.** (1. Version Ergänzungssatz/Reflektions-Formel)

Später werden wir noch eine andere sehr nützliche Formel benötigen und zwar

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (2.11)$$

*Bemerkung 2.4.* Aus dieser Darstellung folgt insbesondere, dass die Gamma-Funktion keine Nullstellen hat.

*Beweis.* Aus den Eigenschaften der Gamma-Funktion ist ersichtlich, dass die Funktion  $\sin \pi z \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)$  keine Pole auf der reellen Achse besitzt. Diese Funktion ist ausserdem als Produkt analytischer Funktionen wieder analytisch für alle endlichen  $z$ , denn im unendlichen haben periodische Funktionen bekanntlich wesentliche Singularitäten und sie strebt gegen  $\pi$  für  $z \rightarrow 0$ . Der Satz von Liouville ist jedoch hier nicht anwendbar, da wir nicht wissen ob diese Funktion auf  $\mathbb{C}$  beschränkt ist. Für den Beweis der Identität gehen wir von unserer Definition der Gamma-Funktion aus. Mit Hilfe der Variablentransformation  $t := x^2$  erhalten wir

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2z-1} dx \quad \star.$$

Zuerst konzentrieren wir uns auf  $z = \lambda$ , wobei  $\lambda \in (0, 1)$ , da dann  $\lambda, 1 - \lambda > 0$  und wir schreiben können

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda) \Gamma(1-\lambda) &\stackrel{\star}{=} 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^{2\lambda-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &\stackrel{\text{Pol.-koord.}}{=} 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty (\cot \theta)^{2\lambda-1} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} (\cot \theta)^{2\lambda-1} d\theta \\ &\stackrel{x=\cot \theta}{=} 2 \int_0^\infty \frac{x^{2\lambda-1}}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

Das erhaltene Integral können wir über die Schlüssel-Loch-Kontur (nach rechts offen) berechnen, wobei wir die Kontur mit  $\gamma := \gamma_r + \gamma_R + \gamma_\epsilon^+ + \gamma_\epsilon^-$  bezeichnen und  $r$  der Radius des Loches, sowie  $R$  der grosse Radius bezeichnet. Wir betrachten nun die komplexifizierte Funktion  $f(z) = \frac{(-z)^{2\lambda-1}}{1+z^2}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit

$$(-z)^{2\lambda-1} = e^{(2\lambda-1)\log -z}, \text{ wobei } \log \text{ der Hauptzweig ist.}$$

Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= 0. \end{aligned}$$

Der Integrand hat 2 einfache Pole und zwar in  $\pm i$ . Nun wenden wir das Residuen-Theorem an und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)] \\ &= 2\pi i \left[ \frac{(-i)^{2\lambda-1}}{2i} + \frac{(i)^{2\lambda-1}}{-2i} \right] \\ &= \pi i [(-i)^{2\lambda} + (i)^{2\lambda}] \\ &= \pi [e^{-\lambda\pi i} + e^{\lambda\pi i}] \\ &= 2\pi i \cos \pi\lambda. \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^\infty f(x+i\epsilon) dx - \int_0^\infty f(x-i\epsilon) dx \right) \\ &= \int_0^\infty \left( e^{-i\pi(2\lambda-1)} - e^{i\pi(2\lambda-1)} \right) \frac{x^{2\lambda-1}}{x^2+1} dx \\ &= 2i \sin 2\pi\lambda \int_0^\infty \frac{x^{2\lambda-1}}{x^2+1} dx. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\lambda-1}}{x^2+1} dx = \pi \frac{\cos \pi\lambda}{\sin 2\pi\lambda} = \frac{\pi \cos \pi\lambda}{2 \sin \pi\lambda \cos \pi\lambda} = \frac{\pi}{2 \sin \pi\lambda}.$$

Also gilt die Gleichung für  $\lambda \in (0, 1)$ . Aus dem Identitätssatz folgt nun, dass diese Gleichung in ganz  $\mathbb{C}$  gilt.  $\square$

Als erste Anwendung lässt sich der Wert der Gamma-Funktion bei  $z = 1/2$  ausrechnen,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{2.12}$$

**Satz 2.7.** (2. Version Ergänzungssatz)

Einen weiteren Ergänzungssatz erhalten wir mit der Substitution  $z \mapsto z + \frac{1}{2}$ :

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}. \quad (2.13)$$

### 2.1.4 Asymptotik der Gamma-Funktion

In den folgenden Abschnitten werden wir immer wieder Abschätzungen durchführen müssen, welche die Gamma-Funktion beinhalten und deshalb ist es zentral zu wissen welches asymptotische Verhalten diese erfüllt. Im Gebiet  $G_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \pi - \epsilon\}$ , wobei  $\epsilon > 0$ , erfüllt die Gamma-Funktion die folgende Asymptotik für  $z \rightarrow \infty$

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right]. \quad (2.14)$$

Dieser Ausdruck wird **Stirling'sche Formel der Gamma-Funktion** und verallgemeinert diejenige der Fakultät. Da der Beweis ziemlich lange und eher technisch ist, werden wir ihn hier nicht präsentieren, jedoch findet man ihn im Buch "A Course of Modern Analysis" von Whittaker und Watson. Wir bemerken noch, dass die Koeffizienten in der eckigen Klammer gerade die Bernoulli-Zahlen  $B_n$  sind und man diese in der Funktionentheorie bspw. durch die Potenzreihe

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (2.15)$$

definiert. Also sind die Bernoulli-Zahlen gerade die Ableitungen der Funktion  $f(z) := \frac{z}{e^z - 1}$  im Ursprung und es gilt

$$B_n = f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(e^z - 1) z^{n+1}}.$$

Die ersten paar Bernoulli-Zahlen sind:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & B_1 &= -\frac{1}{2} & B_2 &= \frac{1}{6} & B_4 &= -\frac{1}{30} & B_6 &= \frac{1}{42} & B_8 &= -\frac{1}{30} \\ B_{10} &= \frac{5}{66} & B_{12} &= -\frac{691}{2730} & B_{14} &= \frac{7}{6} & B_{16} &= -\frac{3617}{510} & B_{18} &= \frac{43867}{798} & B_{20} &= \dots \end{aligned}$$

Es gilt des Weiteren

- $B_{2k+1} = 0$  für  $k \geq 1$ ,
- der Konvergenzradius der Reihe ist  $2\pi$ ,
- $B_n \in \mathbb{Q}$ ,
- Für  $k \geq 0$  gilt:  $B_{2k} \begin{cases} < 0, & k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ > 0, & k \in (2\mathbb{Z}_{\geq 1} + 1). \end{cases}$

### 2.1.5 Die Beta-Funktion (Euler-Integral der ersten Art)

Die **Beta-Funktion**, auch Euler'sches Integral erster Gattung genannt, ist für  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(w) > 0$  definiert durch das uneigentliche Integral

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (2.16)$$

Dieses Integral konvergiert kompakt und absolut im Viertelraum  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$  und ist daher bei festem  $w \in \mathbb{T}$  (bzw. festem  $z \in \mathbb{T}$ ) holomorph in  $z \in \mathbb{T}$  (bzw.  $w \in \mathbb{T}$ ). Das zeigt man analog wie beim  $\Gamma$ -Integral mittels eines Majorantentests. Wir erwähnen wieder zuerst ein paar elementare Eigenschaften:

- Eine erste Eigenschaft ist die Symmetrie

$$B(z, w) = B(w, z), \quad (2.17)$$

welche aus der Symmetrie bezüglich der Transformation  $t \leftrightarrow 1-t$  folgt.

- Durch Einsetzen sieht man:  $B(z, 1) = 1/z$  ( $\star$ )
- Es gilt:  $B(z, w+1) = \frac{w}{z+w} B(z, w)$  ( $\star\star$ ). Diese Gleichung sieht man am einfachsten mit der Euler'schen Identität.

**Lemma 2.2.** Die Gamma- und die Beta-Funktion stehen über die sogenannte **Euler'sche Identität** miteinander im Zusammenhang:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (2.18)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2z-1} dx \\ \Rightarrow \Gamma(z) \Gamma(w) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy x^{2z-1} y^{2w-1} e^{-(x^2+y^2)} \\ &= 4 \int_0^\infty dr r^{2(z+w)-1} e^{-r^2} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2z-1} (\sin \theta)^{2w-1} d\theta \\ &= \Gamma(z+w) \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{w-1} t^{z-1} dt}_{B(z,w)}. \end{aligned}$$

Wobei wir einerseits in Polarkoordinaten über gegangen sind und andererseits die Substitution  $t = \cos^2 \theta$  machten. Beachte, dass das  $r$ -Integral gleich  $\Gamma(z+w)/2$  ist.  $\square$

Durch die Euler'sche Identität verliert die Beta-Funktion ihr Eigeninteresse.

### 2.1.6 Die Legendre'sche Verdoppelungsformel

In diesem Unterkapitel wollen wir eine sehr einfache Anwendung des Euler'schen Integrals besprechen und zwar die sogenannte Legendre'sche Verdoppelungsformel.

**Lemma 2.3.** Die **Legendre'sche Verdoppelungsformel**, welche sich direkt aus der Definition der Beta-Funktion ergibt und unter anderem einen Zusammenhang zwischen den Funktionswerten ganzzahliger und halbganzzahliger natürlicher Zahlen liefert, lautet

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (2.19)$$

*Bemerkung 2.5.* Wir bemerken noch, dass es sich bei der Verdoppelungsformel um den Spezialfall  $n = 2$  der **Gauss'schen Multiplikationsformel** handelt, welche lautet

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \sqrt{2\pi}^{n-1} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz).$$

Wir beweisen nur die Identität von Euler.

*Beweis.* Wir setzen  $z = w$ , wobei  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , in die Beta-Funktion ein und erhalten

$$\begin{aligned} B(z, z) &= \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1} dt \\ &\stackrel{(\star)}{=} 2 \int_0^1 \frac{1}{4^z} \frac{1}{\sqrt{\tau}} (1-\tau)^{z-1} d\tau \\ &= 2^{1-2z} \int_0^1 \tau^{1/2-1} (1-\tau)^{z-1} d\tau \\ &= 2^{1-2z} B\left(\frac{1}{2}, z\right) \\ &\Rightarrow B(z, z) = 2^{1-2z} B\left(\frac{1}{2}, z\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\Gamma(z) \Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)} \\ &\Leftrightarrow \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Von der ersten zu der zweiten Zeile kommen wir, wenn wir berücksichtigen, dass der Integrand symmetrisch um den Punkt  $t = 1/2$  ist (d.h. bezüglich der Substitution  $t \leftrightarrow 1-t$ ). In  $(\star)$  verwendeten wir die Substitution  $t = \frac{1-\sqrt{\tau}}{2}$ , wobei  $dt = -d\tau/(4\sqrt{\tau})$ ,  $t(1-t) = (1-\sqrt{\tau})(1+\sqrt{\tau})/4$ . Am Schluss verwendeten wir die Euler-Identität und setzten  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  ein. Während das Euler'sche Integral nur für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  konvergiert, gilt die hergeleitete Identität für alle komplexen  $z$  im Sinne der analytischen Fortsetzung.  $\square$

## 2.2 Die Produktdarstellung der Gamma-Funktion

Nun suchen wir eine Produktdarstellung für die Gamma-Funktion. Für beliebige  $b, c$  gilt die folgende bemerkenswerte Relation

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^b \Gamma(u+c)}{u^c \Gamma(u+b)} = 1.$$

Sie kann beispielsweise mit der Stirling-Formel verifiziert werden. Setzen wir nun  $b = z + 1, c = 1$  und schränken  $u$  auf die natürlichen Zahlen ein, dann gilt nach dem obigen asymptotischen Verhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)} = 1.$$

Benutzt man noch  $\Gamma(n+1) = n!$  und die Funktionalgleichung, sowie  $\Gamma(1) = 1$ , so erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n) \Gamma(z)} = 1 \quad (2.20)$$

Damit haben wir bereits die gesuchte Produktdarstellung, welche offensichtlich für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  gilt. Nun wollen wir jedoch eine Möglichkeit aufzeigen dieses Produkt zu erhalten ohne auf den eingangs behaupteten Grenzwert zurückzugreifen.

### Lemma 2.4.

Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  haben wir eine Produktdarstellung für die Gamma-Funktion und zwar

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (2.21)$$

*Beweis.*

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Zuerst betrachten wir nur  $z \in G_\epsilon$  und vollziehen danach den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$ . Wir wissen  $n! = \Gamma(n+1)$  und der Nenner ist bekanntlich  $\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1) / \prod_{k=0}^n (z+k)$ . Nun betrachten wir folgenden Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n) \Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)} \\ &\stackrel{\text{Stirling}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z (n+1)^{n+1/2} e^{-(n+1)}}{(z+n+1)^{z+n+1/2} e^{-z} e^{-(n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \frac{n}{z+n+1} \right)^z}_{\rightarrow 1} \left( \frac{n+1}{z+n+1} \right)^{n+1/2} e^z \\ &= e^z \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \frac{1}{1 + \frac{z}{n+1}} \right)^{n+1/2}}_{\rightarrow e^{-z}} = 1 \end{aligned}$$

In der Stirling-Formel haben wir den Term in der eckigen Klammer durch 1 approximiert und verwendeten die Grenzwertdarstellung  $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  für die Exponentialfunktion. Vollziehen wir den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$ , so haben wir das Lemma bewiesen.  $\square$

**Lemma 2.5.**

Eine alternative Darstellung der Gamma-Funktion ist

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1 + \frac{z}{n}}, \quad (2.22)$$

und man nennt diesen Ausdruck für die Gamma-Funktion auch **Weierstrass'sche Produktformel**. Die universelle Konstante  $\gamma$  ist als **Euler-Mascheroni-Konstante** bekannt und diese ist definiert über den folgenden Grenzwert

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log k \right) = 0.5772157 \dots \quad (2.23)$$

*Beweis.* (Weierstrass'sche Produktformel)

Durch elementare Umformungen finden wir:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^z k!}{z(z+1) \cdots (z+k)} \\ &= \frac{1}{z} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{z \log k} \frac{1}{(1+z) \cdots \left(1 + \frac{z}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{z} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{z(\log k - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n})} \prod_{n=1}^k \frac{e^{z/n}}{1 + \frac{z}{n}} \\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1 + \frac{z}{n}}. \end{aligned}$$

Wir sehen aus dieser Darstellung auch, dass die Pole der Gamma-Funktion bei negativen ganzen Zahlen liegen.  $\square$

**Behauptung 2.1.** Das Weierstrass'sche Produkt konvergiert gleichmässig auf Kompakta.

*Beweis.*

Die Behauptung folgt direkt aus der Beobachtung:

$$\frac{e^{z/n}}{1 + \frac{z}{n}} = \frac{1 + z/n + 1/2 \frac{z^2}{n^2} + \dots}{1 + \frac{z}{n}} = 1 + O\left(\left(\frac{z}{n}\right)^2\right)$$

$\square$

### 2.3 Die Reihenentwicklung der Gamma-Funktion

Für die explizite Auswertung der Gamma-Funktion in einer Umgebung eines gegebenen Punktes  $z \in \mathbb{C}$  ist es oft hilfreich eine Reihenentwicklung dieser zu haben. Für die Herleitung einer Reihendarstellung ist es üblich folgende Definition zu machen:

**Definition 2.2.**

Die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion nennen wir **Psi-Funktion** oder **Digamma-Funktion** und schreiben deshalb

$$\Psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z). \quad (2.24)$$

Die Eigenschaften der Psi-Funktion folgen direkt aus denjenigen der Gamma-Funktion. Einige davon werden wir in diesem Abschnitt studieren.

**Behauptung 2.2.**

Die Digamma-Funktion besitzt die Reihendarstellung

$$\Psi(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z + (n-1)} \right) \quad (2.25)$$

für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_{\leq 0}$ .

*Beweis.* Mit der Weierstrass'schen Produktformel erhalten wir

$$\log \Gamma(z) = -\log z - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{n} - \log \left( 1 + \frac{z}{n} \right) \right). \quad (2.26)$$

Durch Ableiten folgt

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) \\ &= -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} \right) \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) \\ &= -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+(n-1)} \right). \end{aligned}$$

□

Wir bemerken noch, dass diese Reihe für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  absolut konvergent ist. Desweiteren ist sie im selben Gebiet wie die Gamma-Funktion (Integraldarstellung) analytisch. Wenn wir nämlich die obige Reihe mehrmals differenzieren, erhalten wir

$$\Psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+z-1)^{n+1}}. \quad (2.27)$$

Die erste Ableitung  $\Psi'(z)$  ist genauso wie alle höheren Ableitungen offensichtlich konvergent für  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

Mit der Reihendarstellung der Psi-Funktion finden wir:

**Behauptung 2.3.** Die Digamma-Funktion erfüllt folgende **Rekursionsformel**

$$\Psi(z) = \Psi(z+1) - \frac{1}{z}. \quad (2.28)$$

*Beweis.* Diese Gleichung ist sofort ersichtlich:

$$\Psi(z) = \Psi(z+1) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+k-1} - \frac{1}{z+k} \right) = \Psi(z+1) - \frac{1}{z}.$$

□

*Bemerkung 2.6.* Wir wollen nun ein paar Bemerkungen zur logarithmischen Ableitung der Gamma-Funktion machen:

- Die Rekursionsformel dient wie die Funktionalgleichung für die  $\Gamma$ -Funktion als "Vorschrift" für die analytische Fortsetzung ins Gebiet  $\operatorname{Re}(z) < 0$ . Wenden wir die Rekursionsformel immer wieder an, dann erhalten wir folgende Gleichungskette:

$$\Psi(z) = \Psi(z+1) - \frac{1}{z} = \Psi(z+2) - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \dots = \Psi(z+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k}. \quad (2.29)$$

Diese Formel bestimmt die Digamma-Funktion im Streifen  $-n < \operatorname{Re}(z) < -n+1$ . Jedoch sind nicht wie für die Gamma-Funktion die Funktionswerte bei  $z = -n$  erreichbar. Die einzigen Singularitäten der Psi-Funktion sind die Pole bei  $z = -n$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ , was direkt aus der Reihendarstellung folgt.

- Die Nullstellen der Psi-Funktion sind offensichtlich die Extrema der  $\Gamma$ -Funktion. Aus der Reihendarstellung 2.25 bzw. der Rekursionsformel erhalten wir direkt  $\Psi(1) = -\gamma$  und  $\Psi(2) = 1 - \gamma > 0$ . Daraus folgt, dass die Psi-Funktion als analytische Funktion in einem Punkt  $x_0 \in (1, 2)$  eine Nullstelle besitzt. Auf der negativen Halbachse hat die Psi-Funktion je eine Nullstelle zwischen jeweils zwei negativen ganzen Zahlen (die Pole der Gamma-Funktion sind).

**Behauptung 2.4.** Wie die Gamma-Funktion besitzt die Psi-Funktion für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  eine Integraldarstellung und zwar

$$\Psi(z) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-\xi}}{\xi} - \frac{(1+\xi)^{-z}}{\xi} \right] d\xi. \quad (2.30)$$

*Beweis.*

Wir starten mit dem folgenden Integral

$$I(t) = \int_0^\infty \int_1^t e^{-sz} ds dz.$$

Nach dem Satz von Fubini dürfen wir die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhalten

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi} - e^{-t\xi}}{\xi} d\xi.$$

$$I(t) = \int_1^t \frac{dt'}{t'} = \log t.$$

Damit folgt die Identität

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\xi} - e^{-t\xi}}{\xi} d\xi = \log t.$$

Als nächstes stellen wir fest, dass für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  die Ableitung der Gamma-Funktion lautet

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \log t dt.$$

Setzen wir die Identität für  $\log t$  in dieses Integral ein, so haben wir

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi} - e^{-t\xi}}{\xi} d\xi dt \\ &= \Gamma(z) \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-\xi}}{\xi} - \frac{(1+\xi)^{-z}}{\xi} \right] d\xi. \end{aligned}$$

□

**Behauptung 2.5.** Die Psi-Funktion erfüllt wie die Gamma-Funktion einen Ergänzungssatz und eine Verdoppelungsformel. Diese lauten

$$\Psi(1-z) = \Psi(z) + \pi \cot \pi z \tag{2.31}$$

$$2\Psi(2z) = \Psi(z) + \Psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2 \log 2. \tag{2.32}$$

*Beweis.* Diese Formeln folgen direkt aus dem Ergänzungssatz, sowie der Verdoppelungsformel für die Gamma-Funktion und zwar durch bilden der logarithmischen Ableitung. □

Aus der Verdopplungsformel erhalten wir den Funktionswert der Psi-Funktion für das Argument  $z = 1/2$ :

$$\Psi(1/2) = -\gamma - 2 \log 2 < 0. \tag{2.33}$$

### Behauptung 2.6.

Anhand der eben hergeleiteten Formeln können wir die Entwicklung der  $\Psi$ -Funktion und  $\Gamma$ -Funktion um die Punkte  $z = 1$  und  $z = 0$  bestimmen. Diese lauten

$$\Psi(1+z) = -\gamma + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \zeta(k) z^{k-1} \quad (2.34)$$

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} \left[ \frac{1}{z} + \frac{\zeta(2)}{2} z + O(z^2) \right]. \quad (2.35)$$

Die Reihe für die Psi-Funktion um  $z = 1$  konvergiert im Kreis  $|z| < 1$  und die Darstellung der Gamma-Funktion gilt für  $|z| \ll 1$ .

*Beweis.*

Mit dem Ausdruck für die  $n$ -te Ableitung der Psi-Funktion erhalten wir sofort

$$\Psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1),$$

wobei  $\zeta(k)$  die bei  $k > 1$  konvergente Zeta-Funktion bezeichnet. Dieses Resultat führt direkt zur Taylorreihe der Psi-Funktion

$$\Psi(1+z) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) z^k.$$

Diese konvergiert im Kreis  $|z| < 1$ , da die Psi-Funktion Pole in  $-\mathbb{N}_0$  hat. Integrieren wir nun  $\Psi(1+z)$ , so erhalten wir:

$$\log \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k} z^k.$$

Diese ist ebenfalls im Einheitskreis konvergent. Nun finden wir unter Benutzung der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z) &= \log \Gamma(1+z) - \log z \Leftrightarrow \\ \Gamma(z) &= e^{-\gamma z} \left[ \frac{1}{z} + \frac{\zeta(2)}{2} z + O(z^2) \right]. \end{aligned}$$

Also haben wir eine Entwicklung von der  $\Gamma$ -Funktion. Diese Entwicklung gilt für  $|z| \ll 1$ . An dieser Entwicklung sehen wir direkt, dass die Gamma-Funktion einen einfachen Pol in  $z = 0$  hat.  $\square$

## 2.4 Konturintegraldarstellung von Hankel

In unserer ursprünglichen Definition der Gamma-Funktion schränkten wir den Definitionsbereich von  $z \in \mathbb{C}$  auf die rechte Halbebene ein, da für nicht-positive  $z$  wir einen Pol bei  $t = 0$  haben und damit das Integral nicht mehr konvergiert. In diesem Abschnitt suchen wir eine Integraldarstellung der Gamma-Funktion, welche in der ganzen komplexen Ebene bis auf eine abzählbare Menge von Punkten gültig ist. Wie wir gleich sehen werden gilt:

**Satz 2.8.** Für die Gamma-Funktion gibt es eine Darstellung als komplexes Kurvenintegral und zwar

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \int_{\gamma} (-\xi)^{z-1} e^{-\xi} d\xi. \quad (2.36)$$

Diese Darstellung wird auch **Hankel'sche Konturintegraldarstellung** der Gamma-Funktion genannt und diese gilt für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

*Beweis.*

Wir betrachten das folgende Konturintegral

$$I_{\gamma}(z) := \int_{\gamma} (-\xi)^{z-1} e^{-\xi} d\xi$$

entlang des Weges  $\gamma$ , welcher am Punkt  $z_+ := x + i\epsilon$  ( $x, \epsilon > 0$ ) oberhalb der reellen positiven Achse beginnen soll, dann den Koordinatenursprung im Gegenuhrzeigersinn umläuft und schliesslich bei  $z_- := x - i\epsilon$  unterhalb der reellen Achse endet.

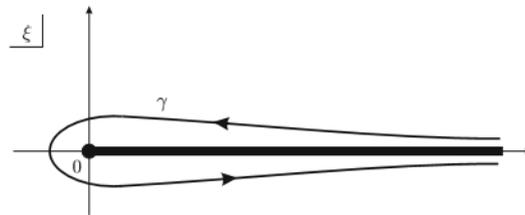


Abbildung 2: Weg für das Konturintegral

Für die Definition der Potenzfunktion schneiden wir die komplexe Ebene entlang der positiven reellen Achse auf und wählen also den analytischen Zweig derart, dass  $\log -\xi$  auf der negativen reellen Halbachse rein reell wird, d.h.  $-\pi < \arg(-\xi) \leq \pi$ . Da das Wegintegral homotopie-invariant ist, können wir auch folgende Kontur betrachten:

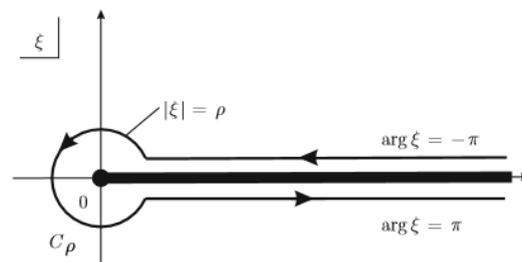


Abbildung 3: Modifizierter Weg für das Konturintegral

Die zwei geraden Stücke bezeichnen wir mit  $C_{\pm}$  und das kreisförmige Segment mit  $C_{\rho}$ . Für Punkte  $\xi \in C_{\pm}$  gilt  $\arg -\xi = \mp\pi$ , so dass  $(-\xi)^{z-1} = \xi^{z-1} e^{\mp i(z-1)\pi}$  auf den entsprechenden Teilkonturen. Auf  $C_{\rho}$  wählen wir wie üblich die Parametrisierung  $-\xi = \rho e^{i\theta}$ . Das Integral lautet dann

$$\begin{aligned} I_{\gamma}(z) &= \sum_{\alpha=+,-} \int_{C_{\alpha}} + \int_{C_{\rho}} (-\xi)^{z-1} e^{-\xi} d\xi \\ &= \int_x^{\rho} e^{-i\pi(z-1)} \xi^{z-1} e^{-\xi} d\xi + \int_{\rho}^x e^{i\pi(z-1)} \xi^{z-1} e^{-\xi} d\xi + i \int_{-\pi}^{\pi} \rho^z e^{iz\theta} e^{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)} d\theta \\ &= -2i \sin \pi z \int_{\rho}^x \xi^{z-1} e^{-\xi} d\xi + i\rho^z \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta+\rho(\cos\theta+i\sin\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Wenn wir den Abstand  $\epsilon$  der geraden Stücke gegen Null gehen lassen. Für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  stellt man fest, dass das letztere Integral im Grenzübergang  $\rho \rightarrow 0$  aufgrund des Faktors  $\rho^z$  verschwindet, womit

$$I_{\gamma}(z) = -2i \sin \pi z \int_0^{\infty} \xi^{z-1} e^{-\xi} d\xi$$

folgt. Zum Schluss betrachten wir den Grenzprozess  $x \rightarrow \infty$  und erhalten die gewünschte Formel durch umstellen.  $\square$

*Bemerkung 2.7.* Wir machen ein paar Bemerkungen:

- Es ist zentral, dass  $\xi = 0 \notin \operatorname{Bild}(\gamma)$  gilt, denn dadurch stellt das Kurvenintegral eine auf der ganzen komplexen Ebene analytische Funktion dar.
- Aufgrund des Sinus ist die Hankel'sche Konturintegraldarstellung auf der ganzen komplexen Ebene bis auf die ganzen Zahlen gültig.

## 2.5 Mellin-Transformation

**Definition 2.3.** Sei  $f(x)$  stetig auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  und erfülle

- (1)  $f(x) = O(x^{\alpha_0})$  für  $x \rightarrow 0$
- (2)  $f(x) = O(x^{\alpha_{\infty}})$  für  $x \rightarrow \infty$ .

Für  $\operatorname{Re}(s) \in (-\alpha_0, -\alpha_{\infty})$  ist dann die **Mellin-Transformierte** von  $f$  definiert über das folgende uneigentliche R-Integral

$$F_M(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx. \quad (2.37)$$

*Bemerkung 2.8.* Wir wollen einige Punkte zur gemachten Definition anmerken:

- Für die Mellin-Transformierte schreiben wir im Folgenden lieber  $\mathcal{M}[f(x)](s)$  anstatt  $F_M(s)$ .

- Die Grössen  $\alpha_0, \alpha_\infty$  werden **polynomielle Schrankenparameter** genannt. Erfüllt eine stetige Funktion  $f$  das geforderte Verhalten für  $x \rightarrow 0, \infty$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx \right| &\leq \int_0^1 |f(x)| x^{\operatorname{Re}(s)-1} dx + \int_1^\infty |f(x)| x^{\operatorname{Re}(s)-1} dx \\ &\leq C_0 \int_0^1 x^{\operatorname{Re}(s)+\alpha_0-1} dx + C_\infty \int_1^\infty x^{\operatorname{Re}(s)+\alpha_\infty-1} dx. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale existieren jeweils für  $\operatorname{Re}(s) > -\alpha_0$  und  $\operatorname{Re}(s) < -\alpha_\infty$ . Also existiert das Integral in der Definition der Mellin-Transformierten, wenn die Variable  $s \in \mathbb{C}$  im sogenannten **Fundamentalstreifen**  $(-\alpha_0, -\alpha_\infty)$  liegt. Aus diesem Grund haben wir die Einschränkung in der Definition.

- Für beliebige Polynome gilt  $\alpha_\infty > \alpha_0$ . Also existiert deren Mellin-Transformierte nicht.

*Beispiel 2.1.* Hier wollen wir einige Mellin-Transformierte von bekannten Funktionen betrachten:

- Wir betrachten die Funktion  $e^{-x}$ : Der Fundamentalstreifen ist  $(0, \infty)$ . Wie wir wissen ist die Gamma-Funktion für  $\operatorname{Re}(s) > 0$  definiert durch das Integral  $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ . Vergleichen wir dieses Integral mit der Definition einer Mellin-Transformierten, so sehen wir  $\Gamma(s) = \mathcal{M}[e^{-x}](s)$ .
- Wir betrachten die Funktion  $\frac{1}{x} e^{-1/x}$ : Wir sehen sofort

$$\mathcal{M}\left[e^{-1/x}/x\right](s) = \int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x} x^{s-1} dx \stackrel{1/x=t}{\Rightarrow} \int_0^\infty dt t^{-s} e^{-t} dt = \Gamma(1-s).$$

- Wir betrachten die Abbildung  $\frac{1}{(1+x)^a}$  ( $a > 0$ ), wobei  $\alpha_0 = 0$  und  $\alpha_\infty = -a$  und deshalb existiert die Mellin-Transformierte. Setzen wir  $x = \frac{t}{1-t}$  ein, so erhalten wir  $(1+x)^{-1} = 1-t$ ,  $dx = (1-t)^{-2} dt$  und damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left[(1+x)^{-a}\right](s) &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(1+x)^a} dx \\ &= \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{a-s-1} dt \\ &= B(s, a-s) \\ &= \frac{\Gamma(s) \Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}. \end{aligned}$$

**Behauptung 2.7.** Die Mellin-Rücktransformation berechnet sich gemäss der folgenden Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}[f(x)](s) x^{-s} ds, \quad (2.38)$$

wobei  $c \in (-\alpha_0, -\alpha_\infty)$ . Der Integrationsweg ist also eine zur imaginären Achse parallele Gerade mit  $\operatorname{Re}(s) = c$ .

*Beweis.* Um diese Formel herzuleiten führen wir in der Definition der Mellin-Transformierten die Substitution  $x = e^{-\xi}$  und  $s = c + 2\pi i\beta$  durch. Die Mellin-Transformierte lautet dann

$$\mathcal{M} \left[ f \left( e^{-\xi} \right) \right] (c + 2\pi i\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} f \left( e^{-\xi} \right) e^{-c\xi} e^{-2\pi i\beta\xi} d\xi.$$

Für ein  $c$  aus dem Fundamentalstreifen entspricht die Mellin-Transformation also einer Fourier-Transformation. Wenden wir nun die bekannte Formel für die Fourier-Rücktransformation an, so folgt

$$f \left( e^{-\xi} \right) e^{-c\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M} \left[ f \left( e^{-\xi} \right) \right] (c + 2\pi i\beta) e^{2\pi i\beta\xi} d\beta.$$

Nach Resubstitution ergibt sich

$$f(x) = x^{-c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}[f(x)](c + 2\pi i\beta) e^{2\pi i\beta\xi} d\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}[f(x)](s) x^{-s} ds.$$

□

Die Mellin-Transformation hat einige interessante Eigenschaften, wie das folgende Skalierungsverhalten:

**Aufgabe 2.** Zeigen:  $f(x) = g(ax) \Rightarrow F_M(s) = a^{-s} G_M(s)$ .

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(x) = g(ax)](s) &= \int_0^{\infty} g(ax) x^{s-1} dx \\ &= a^{-s} \int_0^{\infty} g(x) x^{s-1} dx \\ &= a^{-s} \mathcal{M}[g(x)](s). \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft ist besonders nützlich, wenn man versucht eine Funktionalgleichung der Form  $f(x) = g(x) + f(ax)$  zu lösen, denn die Mellin-Transformierte Version davon ist

$$\mathcal{M}[f(x)](s) = \frac{\mathcal{M}[g(x)](s)}{1 - a^{-s}}.$$

Nun hat man eine elementare algebraische Form zu lösen. Für eine Anwendung bezüglich der Jacobi'schen Thetafunktion siehe Gogolin.

## 2.6 Hypergeometrische Reihe

**Definition 2.4.** Wir definieren die sogenannten **Pochhammer-Symbole** durch den folgenden Ausdruck:

$$\forall a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0 : (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, (a)_0 = 1.$$

Im einfachsten Fall gilt:  $(1)_n = n!$ .

**Definition 2.5.** Wir definieren nun die **hypergeometrische Reihe** durch

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} A_n z^n \quad \text{mit} \quad A_n := \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}. \quad (2.39)$$

*Bemerkung 2.9.* Wir stellen ein paar einfache Beobachtungen an:

- In manchen modernen Abhandlungen wird die Notation  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  benutzt um die Zahl der Parameter anzugeben.
- Desweiteren bemerken wir, dass die hypergeometrische Reihe symmetrisch bezüglich der Vertauschung der ersten zwei Parameter ist, weshalb ein normales Komma geschrieben wurde.
- Mit dem Quotientenkriterium sehen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \lim_n \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \right| = 1.$$

Die Reihe ist also absolut konvergent im Einheitskreis und dort definiert sie eine analytische Funktion, welche wir **hypergeometrische Funktion** nennen. Genau so wie die Gamma-Funktion kann sie jedoch auf ein grösseres Gebiet fortgesetzt werden, was wir im kommenden Abschnitt tun wollen.

### 2.6.1 Spezialfälle der hypergeometrischen Funktion

In diesem Abschnitt wollen wir einige Spezialfälle der hypergeometrischen Funktion diskutieren, denn eigentlich alle elementaren Funktionen und viele spezielle Funktionen ergeben sich aus dieser.

*Beispiel 2.2.* (Spezialfälle der hypergeom. Reihe)

(i) Beh.:  $F(a, b; b; z) = \frac{1}{(1-z)^a}$

Setzen wir in der Definition  $b = c$  so sehen wir

$$F(a, b; b; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{n!} z^n = \frac{1}{(1-z)^a}.$$

Um uns davon zu überzeugen, dass die zweite Gleichheit gilt, können wir die Taylor-Koeffizienten der Funktion  $(1-z)^{-a}$  berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} (1-z)^{-a} \Big|_{z=0} &= a \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1-z)^{-a-1} \\ &= \cdots = a(a+1) \cdots (a+n-1) (1-z)^{-a-n} \Big|_{z=0} = (a)_n. \end{aligned}$$

Dann folgt die Gleichheit aus dem Identitätssatz für Potenzreihen. Wir sehen sofort, dass die Konvergenzkreisscheibe  $|z| < 1$  ist. Jedoch an der rechten Seite der

Gleichung sieht man auch, dass diese Reihe ebenfalls für  $|z| > 1$  auf der ganzen komplexen Ebene mit Ausnahme des singulären Punkts  $z = 1$  und eines Schnitts bei  $z \in [1, \infty)$  bei allen nicht ganzen  $a$  definiert werden kann. Diese Eigenschaft erfüllt sogar auch die allgemeine hypergeometrische Reihe. Für  $a = 1$  erhält man offensichtlich die elementare geometrische Reihe

$$F(1, b; b; z) = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

(ii) Beh.:  $F\left(a, \frac{1}{2} + a; \frac{3}{2}, z^2\right) = \frac{1}{2z(1-2a)} \left[ (1+z)^{1-2a} - (1-z)^{1-2a} \right].$

Denn:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\Gamma(a+n) \Gamma\left(a+n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(a) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right) n!} \stackrel{\star}{=} \frac{\Gamma(2a+2n)}{(2n+1)! \Gamma(2a)} \\ &= \frac{1}{2a-1} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(2a-1+2n+1)}{\Gamma(2a-1)} \\ F &= \frac{1}{z(2a-1)} \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+2n+1)}{\Gamma(2a-1)(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{1}{2z(2a-1)} \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+2n+1)}{\Gamma(2a-1)(2n+1)!} z^{2n+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+2n+1)}{\Gamma(2a-1)(2n+1)!} (-z)^{2n+1} \right] = \frac{1}{2z(2a-1)} \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+2n+1)}{\Gamma(2a-1)(2n+1)!} z^{2n+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+2n+1)}{\Gamma(2a-1)(2n+1)!} (-z)^{2n+1} + \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+2n)}{\Gamma(2a-1)(2n)!} z^{2n} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+2n)}{\Gamma(2a-1)(2n)!} (-z)^{2n} \right] = \frac{1}{2z(2a-1)} \left[ \underbrace{\sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+k)}{\Gamma(2a-1)k!} z^k}_{=F(2a-1, b; b; z)} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(2a-1+k)}{\Gamma(2a-1)k!} (-z)^k}_{=F(2a-1, b; b; -z)} \right] = \frac{1}{2z(2a-1)} \left[ (1-z)^{1-2a} - (1+z)^{1-2a} \right]. \end{aligned}$$

Wir benutzten in  $\star$  mehrfach die Legendre'schen Verdoppelungsformel und  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  für die Auswertung von  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ .

Wir bemerken noch, dass sich die Formel für  $a = 1, b = c$  auf

$$F\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{1-z^2}$$

reduziert. Ebenfalls fällt uns auf, dass für  $a = \frac{1-n}{2}$ ,  $z = \sqrt{5}$  die berühmte **Fibonacci-Folge** entsteht

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{n}{2^{n-1}} F \left( \frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}; 5 \right).$$

Da nun entweder  $a$  oder  $b$  immer eine negative ganze Zahl für  $n \geq 1$  ist, ist die obige Gleichung eine endliche Summe.

(iii) Beh.:  $F(a, -a; \frac{1}{2}; -z^2) = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{1+z^2} + z \right)^{2a} + \left( \sqrt{1+z^2} - z \right)^{2a} \right]$ .

Um dies zu sehen, entwickeln wir die linke und rechte Seite in eine Potenzreihe. Die Taylor-Reihe für die rechte Seite lautet

$$1 + \sum_{k \geq 1} 2^{2k+2} \frac{a^2 (a^2 - 1) (a^2 - 2^2) \cdots (a^2 - k^2)}{(2k+2)!} z^{2k+2}$$

und diejenige für die linke Seite

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n A_n z^{2n},$$

wobei  $A_0 = 1$ . Desweiteren gilt

$$A_n = \frac{(a)_n (-a)_n}{n! \left(\frac{1}{2}\right)_n} = 2^n \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) (-1)^n a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n! 2^{-n} (2n)! / n!}.$$

Setzen wir dies nun für  $A_n$  ein und ändern den Summationsindex von  $n$  zu  $k+1$ , so bekommen wir die Potenzreihe für die rechte Seite und damit stimmen diese überein, womit die Behauptung gezeigt ist.

(iv) Beh.:  $F(a, -a; \frac{1}{2}; \sin^2 z) = \cos(2az)$

Diese Behauptung folgt sofort aus der vorherigen, wenn wir die Ersetzung  $z \rightarrow i \sin z$  machen.

(v) Beh.:  $F(1, 1; 2; z) = -\frac{1}{z} \log(1-z)$ .

Demn:

$$A_n = \frac{n! \cdot n!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -\frac{1}{z} \log(1-z).$$

(vi) Beh.:  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{\arcsin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ .

Wir betrachten wieder zuerst die Koeffizienten der Reihe:

$$A_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} (2n+1) n!}.$$

Nun setzen wir die Legendre'sche Verdoppelungsformel in der Form  $\Gamma(n + 1/2) \Gamma(n) = 2^{1-2n} \sqrt{\pi} \Gamma(2n)$  in den Koeffizienten  $A_n$  ein und erhalten

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{2n + 1}.$$

Damit gilt für  $z \in (0, 1)$

$$F = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(\sqrt{z})^{2n+1}}{2n + 1} = \frac{\arcsin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Interessanterweise ist bei  $z = 1$  die Reihe immer noch konvergent und es ergibt sich  $F = \pi/2$ .

## 2.6.2 Pochhammer-Integral

### Satz 2.9.

Wie für die bereits betrachteten Funktionen gibt es auch für die hypergeometrische Funktion eine Integraldarstellung und zwar

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt}_{=: I}. \quad (2.40)$$

Diese gilt für alle  $|z| < 1$  und  $\operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c-b) > 0$ .

*Beweis.*

Wir wissen aus Beispiel (i)

$$\frac{1}{(1-zt)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} t^n z^n$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt}_{=: B(b+n, c-b)} \\ &\stackrel{*}{=} \Gamma(c-b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{n!} \frac{(b)_n \Gamma(b)}{(c)_n \Gamma(c)} \\ &= \frac{\Gamma(c-b) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \\ &= \frac{\Gamma(c-b) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z). \end{aligned}$$

In  $\star$  verwendeten wir die Euler-Identität für die Beta-Funktion. □

Mithilfe dieser Darstellung lässt sich das Verhalten der hypergeometrischen Funktion in der Nähe des Punktes  $z = 1$  wesentlich besser verstehen. Wir sehen beispielsweise bereits an Beispiel (i), dass  $F$  einen singulären Punkt dort besitzt. (Wenigstens für manche Koeffizienten  $a, b, c$ . Wir werden etwas später beobachten, dass es sich nur dann um einen singulären Punkt handelt, wenn  $c - a - b \in \mathbb{N}$ .) Diese Erkenntnis besagt jedoch nicht, dass für  $z \rightarrow 1$  die hypergeometrische Funktion notwendigerweise unendlich ist. Diese Aussage ist nichts Ungewöhnliches, denn bspw. hat  $z + \sqrt{1 - z}$  einen singulären Punkt in  $z = 1$  (in der Tat handelt es sich um einen Verzweigungspunkt), jedoch strebt die Funktion für  $z \rightarrow 1$  gegen 1. Um welchen Typ einer Singularität es sich genau handelt, besprechen wir zu einem späteren Zeitpunkt. Aber im nun folgenden Abschnitt wollen wir zuerst einmal anhand des Pochhammer-Integrals klären ob und wann der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow 1} F(z)$  existiert.

### 2.6.3 Gauss'sche Summenformel

**Satz 2.10.** Es gilt für  $\operatorname{Re}(c - a - b), \operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b) > 0$ :

$$\lim_{z \rightarrow 1, |z| < 1} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)} \quad (2.41)$$

Dieser Satz ist auch als **Gauss'sches Summationstheorem** bekannt.

*Beweis.* Offensichtlich haben wir wegen der bewiesenen Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1, |z| < 1} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c - b)} \lim_{z \rightarrow 1, |z| < 1} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt \\ &\stackrel{\star}{=} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-a-b-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c - b)} \cdot B(b, c - a - b) \\ &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)}. \end{aligned}$$

Die Beta-Funktion ist jedoch nur für  $\operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c - b - a) > 0$  konvergent, weshalb wir diese Bedingung forderten. In  $\star$  benutzten wir den Satz von der dominierenden Konvergenz.  $\square$

*Bemerkung 2.10.* Wir wollen ein paar Beobachtungen zu diesem Satz anstellen:

- Auf die Forderung  $\operatorname{Re}(b) > 0$  kann verzichtet werden, da die Integraldarstellung durch den gleichen Ausdruck mit vertauschtem  $a$  und  $b$  ersetzt werden kann, jedoch ist die Forderung  $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$  essentiell.
- Für  $z \notin (1, \infty)$  haben wir  $\frac{1}{z} \notin [0, 1]$  und die Integraldarstellung ist definiert. Damit können wir die hypergeometrische Reihe analytisch fortsetzen auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  und  $\operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c - b) > 0$ , wobei jedoch die resultierende Funktion mehrwertig ist.

Wir führen nun die sogenannte "Doppelschleifen-Kontur" (double-loop contour) ein:

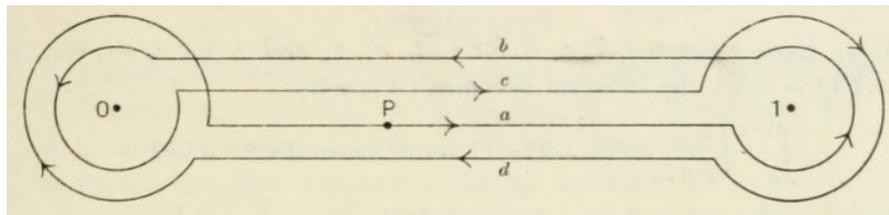


Abbildung 4: Doppelschleifen-Kontur

Der Integrationsweg startet im Punkt  $P$  welcher auf der reellen Achse zwischen 0 und 1 liegt, dann läuft er ein Mal in positiver Richtung um den Punkt 1 und kehrt zum Punkt  $P$  zurück. Anschliessend läuft der Weg ebenfalls im mathematisch positiven Drehsinn um den Punkt 0 und kehrt wieder zu  $P$  zurück. Danach macht er dasselbe noch im negativen Drehsinn. Dieses Vorgehen kennzeichnen wir im kommenden Integral durch den Index  $P$  und das Superskript  $(1+, 0+, 1-, 0-)$ . Für die Funktionen im Zähler gilt: Im Startpunkt  $P$  sind die Argumente von  $t$  und  $1-t$  Null. Wenn wir den Kreis  $(1+)$  zurückgelegt haben, dann springt dasjenige von  $1-t$  auf  $2\pi$ , jedoch dasjenige von  $t$  bleibt gleich. Beim Kreis  $(0+)$  ist die Situation gerade umgekehrt. Also hat  $t$  und  $1-t$  bis jetzt eine Argument von  $2\pi$ . Nach dem Kreis  $(1-)$  sind die Argumente  $2\pi$  und 0 und schlussendlich nach dem Kreis  $(0-)$  sind beide wieder Null, so dass der Endwert der Argumente derselbe wie der Anfangswert ist. Wenn die Realteile von  $b$  und  $c-b$  positiv sind, dann verschwinden die Integral über die Kreise für einen verschwindenden Radius. Deshalb müssen wir uns nur um die Geradenstücke kümmern. Auf den den vier Geraden  $a, b, c, d$  haben wir die zusätzlichen Faktoren

$$1, e^{2\pi i(c-b-1)}, e^{2\pi i(c-b-1)}e^{2\pi i(b-1)}, e^{2\pi i(b-1)},$$

wobei dort die Variablen  $t$  und  $1-t$  reell sind. Benutzen wir die Notation  $\zeta_0 := e^{2\pi i(b-1)}$  und  $\zeta_1 = e^{2\pi i(c-b-1)}$  so lässt sich das Kurvenintegral wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int_P^{(1+,0+,1-,0-)} \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt &= (1 - \zeta_1 + \zeta_1\zeta_0 - \zeta_0) \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt \\ &= (1 - \zeta_0)(1 - \zeta_1) \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt, \end{aligned}$$

Die Vorzeichen resultieren aus der Orientierung des Integrals. Wenn  $b, c-b \notin \mathbb{Z}$  erhalten wir eine Darstellung des Pochhammer-Integrals und zwar

$$\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt = \frac{\int_P^{(1+,0+,1-,0-)} \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt}{(1 - \zeta_0)(1 - \zeta_1)}. \quad (2.42)$$

Nun ist das berechnete Integral ein analytischer Ausdruck bezüglich der Grössen  $a, b, c$  in ganz  $\mathbb{C}$  ausser wenn  $b, c-b$  ganze Zahlen sind und damit gilt diese Darstellung für alle  $a, b, c$  ausser  $b, c-b \in \mathbb{Z}$  und nicht nur für positive.

### 2.6.4 Konfluente hypergeometrische Reihe (Kummer'sche Funktion)

Trotz der sehr allgemeinen Form der hypergeometrischen Funktion, welche viele elementare Funktionen als Spezialfälle enthält, finden wir darunter nicht die Exponentialfunktion.  $e^x$  wird durch eine besondere Klasse hypergeometrischer Reihen dargestellt, welche wir in diesem Abschnitt diskutieren wollen.

**Definition 2.6.** Wir definieren die folgende Reihe:

$$F(a, c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!} = \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b; c; z/b), \quad (2.43)$$

wobei die Koeffizienten die üblichen Pochhammer-Symbole sind.

*Bemerkung 2.11.* Wir wollen ein paar Bemerkungen anfügen:

- Der Konvergenzradius dieser Reihe ist  $r = \infty$  (Quotientenkriterium). Damit definiert diese Reihe eine für alle endlichen  $z$  analytische Funktion, welche auch **konfluente hypergeometrische Reihe** oder **Kummer'sche Funktion** genannt wird. In einigen Lehrbüchern wird die Notation  $M(a, c, z)$  verwendet.
- Integraldarstellung für  $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(a) > 0$ :

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad (2.44)$$

*Beweis.*

Um diese herzuleiten, verwenden wir die Integraldarstellung der Beta-Funktion und benutzen, dass der Quotient der Pochhammer-Symbole geschrieben werden kann als

$$\frac{(a)_n}{(b)_n} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} B(a+n, c-a)$$

Setzt man dies in die Kummer'sche Funktion ein, vertauscht Integration und Summation, so ergibt sich die gewünschte Darstellung.  $\square$

- Aus der Integraldarstellung sehen wir direkt durch die Substitution  $t \mapsto 1-t$  die Relation:

$$F(a, c; z) = e^z F(c-a, c; -z). \quad (2.45)$$

- Ebenfalls über die Integraldarstellung erhalten wir die folgende **Rekursionsrelation**

$$aF(a+1, c+1; z) = (a-c)F(a, c+1; z) + cF(a, c; z). \quad (2.46)$$

*Beweis.*

Man setze dazu in  $aF(a+1, c+1; z) - cF(a, c; z)$  die Integraldarstellung ein und vereinfache.  $\square$

- **Spezialfälle:** Genauso wie man einige elementare und spezielle Funktionen durch die hypergeometrische Funktion ausdrücken kann, ist dies mit der Kummer'schen Funktion möglich.

(i)  $F(a, a; z) = e^z$

- (ii)  $F(-k, 1; z) = \mathcal{L}_k(z)$ , wobei  $\mathcal{L}_k$  die Laguerre-Polynome sind und diese lauten

$$\mathcal{L}_k(z) = \sum_{0 \leq n \leq k} \binom{k}{n} \frac{z^n}{n!} = \frac{e^z}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (t^k e^{-z}).$$

*Beweis.* Übung. □

- (iii) Die Fehlerfunktion ist definiert über

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.47)$$

und sie hängt mit der konfluenten hypergeometrischen Reihe wie folgt zusammen

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right). \quad (2.48)$$

*Beweis.* Übung. Verwende die Substitution  $s^2 = x^2 t$  in der Integraldarstellung. □

- (iv) Die modifizierten Besselfunktionen erster Gattung hängen mit der konfluenten hypergeometrischen Funktion über die Relation

$$I_\nu(z) = \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu F\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu, 2z\right) \quad (2.49)$$

zusammen und sind definiert durch den Ausdruck

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)}. \quad (2.50)$$

In der Tat handelt es sich bei den Besselfunktionen um Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$y''(z) + \frac{y'(z)}{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y(z) = 0.$$

Für einen Beweis siehe bspw. Gogolin S. 99.

## 2.7 Differentialgleichungen

### 2.7.1 Hypergeometrische Gleichung und Lösungen um den Punkt $z=0$

**Definition 2.7.** Die **hypergeometrische Differentialgleichung** ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung und hat die Form

$$z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]y' - aby = 0, \quad (2.51)$$

wobei  $y = y(z)$  mit  $z \in \mathbb{C}$  und die auftretenden Koeffizienten i.A. komplexwertig sind. Im Folgenden sprechen wir auch von der **hypergeometrischen Gleichung**.

**Satz 2.11.** Die hypergeometrische Reihe  $F(a, b; c; z)$  löst die Gleichung 2.51, wenn  $c \notin -\mathbb{N}_0$  und eine zweite linear unabhängige Lösung ist gegeben durch

$$z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z). \quad (2.52)$$

*Beweis.* Wir machen den naiven Ansatz  $y = \sum_{n \geq 0} A_n z^n$ . Durch Einsetzen in die Differentialgleichung finden wir folgende Bedingung an die Koeffizienten

$$A_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} A_n \text{ für } n \geq 0.$$

Einerseits ist die Lösung dieser Relation der generische Koeffizient von  $F(a, b; c; z)$  und andererseits gilt auch die Umkehrung. Also ist  $F(a, b; c; z)$  bis auf einen Skalierungsfaktor die Lösung der hypergeometrischen Gleichung.

Da es sich um eine DGL zweiter Ordnung handelt, muss es eine weitere, linear unabhängige, Lösung der hypergeometrischen Gleichung geben. Um diese zu finden machen wir den Ansatz  $y(z) = z^\alpha f(z)$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $f$  analytisch in einer Umgebung von  $z = 0$ , da  $z = 0$  ein möglicherweise singulärer Punkt ist. Die ersten zwei Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} y' &= z^\alpha f' + \frac{\alpha}{z} z^\alpha f \\ y'' &= z^\alpha f'' + \frac{2\alpha}{z} z^\alpha f' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{z^2} z^\alpha f \end{aligned}$$

Setzen wir diese ein, so folgt:

$$\begin{aligned} z(z-1) \left[ f'' + \frac{2\alpha}{z} f' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{z^2} f \right] + [c - (a+b+1)z] \left( f' + \frac{\alpha}{z} f \right) - abf &= 0 \Leftrightarrow \\ z(1-z)f'' + [(c+2\alpha) - (a+b+1+2\alpha)z] f' + \left[ \frac{\alpha(c+\alpha-1)}{z} - \alpha(a+b+1) - ab \right] f &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir es schaffen, dass der Term  $\sim z^{-1}$  verschwindet, dann haben wir wieder eine DGL der Form 2.51 und  $f$  ist dann die hypergeometrische Funktion, jedoch mit modifizierten Koeffizienten  $(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c})$ . Dieser Term ist offensichtlich Null, wenn  $\alpha = 1 - c$ . Durch

Vergleich sehen wir, dass dann die folgenden Gleichungen erfüllt sein müssen

$$\begin{aligned}\bar{c} &= 2 - c \\ \bar{a} + \bar{b} &= a + b - 2c + 2 \\ \bar{a}\bar{b} &= (1 - c)(a + b - c + 1) + ab \\ &= (a - c + 1)(b - c + 1).\end{aligned}$$

Als Lösung der unteren zwei Gleichungen erhalten wir

$$\bar{a} = a - c + 1, \quad \bar{b} = b - c + 1.$$

Also hat die zweite Lösung die Form

$$z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z). \quad (2.53)$$

Im Vergleich zur ersten Lösung  $F(a, b; c; z)$  hat diese eine Singularität bei  $z = 0$  aufgrund des zu definierenden Zweiges des Logarithmus. Die allgemeine Lösung der hypergeometrischen Gleichung im Einheitskreis  $|z| < 1$  hat also die Form

$$y(z) = A_1 F(a, b; c; z) + A_2 z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z).$$

□

## 2.7.2 Einschub: Reguläre singuläre Punkte

**Definition 2.8.** Wir betrachten eine lineare gewöhnliche homogene Differentialgleichung der Ordnung  $n \geq 1$  mit normiertem Leitkoeffizient, d.h. eine DGL der Form

$$y^{(n)}(z) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(z) y^{(i)}(z) = 0 \text{ mit } z \in \mathbb{C}, \quad (2.54)$$

wobei die Funktionen  $p_i(z)$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) bis auf endlich viele Pole  $z_0$  in einem Bereich  $\Omega \subset \mathbb{C}$  holomorph sein sollen. Wir sagen, dass die DGL 2.54 in  $z_0 \in \mathbb{C}$

- (1) einen **regulären Punkt** hat, wenn die Koeffizientenfunktionen  $p_i(z)$  in  $z_0$  holomorph sind,
- (2) einen **singulären Punkt** hat, wenn mindestens eine Funktion  $p_i(z)$  einen Pol in  $z_0$  besitzt ,
- (3) einen **regulär singulären Punkt** hat, wenn  $z_0$  ein singulärer Punkt der DGL ist und eine der zwei äquivalenten Bedingungen erfüllt wird:
  - (i) Die Funktionen  $p_i(z)$  haben in  $z_0$  einen Pol der Ordnung kleiner gleich  $n - i$ ,
  - (ii) Jede Lösung  $f$  wächst um  $z_0$  höchstens polynomiell, d.h. für jeden Kreissektor  $S$  um  $z_0$  mit einem Öffnungswinkel  $\theta < 2\pi$  gilt:

$$\exists m \in \mathbb{N} : |f(z)| \leq O\left(\frac{1}{|z - z_0|^m}\right).$$

Wenn eine der Bedingungen nicht erfüllt wird, dann spricht man auch von einem **irregulär singulären Punkt**.

Wir bemerken noch, dass die Differentialgleichung auf der Riemann'schen Sphäre  $\bar{\mathbb{C}}$ , also auf dem einpunkt kompaktifizierten Raum von  $\mathbb{C}$ , betrachtet werden sollte um den möglichen singulären Punkt  $\infty$  zu berücksichtigen. Natürlich kann der Punkt  $\infty$  immer durch eine Möbiustransformation in den "endlichen Bereich" von  $\bar{\mathbb{C}}$  gebracht werden. Um die Konzepte zu veranschaulichen, wollen wir kurz zwei Beispiele betrachten:

*Beispiel 2.3.* Die bekannte Bessel'sche Differentialgleichung hat die Form

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f = 0 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.55)$$

und tritt beispielsweise auf, wenn man die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten transformiert. In  $x = 0$  hat  $p_1(x)$  einen Pol 1. Ordnung und  $p_0(x)$  einen Pol 2. Ordnung, also die Bessel'sche Differentialgleichung eine regulär singulären Punkt in  $x = 0$ . Um nun zu sehen wie sich die Differentialgleichung für  $x \rightarrow \infty$  verhält, wendet man am einfachsten eine Möbiustransformation, wie  $y = 1/x$  an. Nach etwas umformen erhält man die modifizierte DGL

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{df}{dy} + \left[\frac{1}{y^4} - \frac{\nu^2}{y^2}\right] f = 0. \quad (2.56)$$

In  $y = 0$  hat  $p_1(y)$  einen Pol 1. Ordnung und  $p_0(y)$  eine Pol 4. Ordnung. Damit hat diese DGL einen irregulär singulären Punkt in  $y = 0$  bzw.  $x = \infty$ .

*Beispiel 2.4.* Ein weiteres Beispiel ist die Legendre'sche DGL, welche auftritt wenn man die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten transformiert, und bekanntlich die Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{df}{dx} \right] + n(n+1) f &= 0 \Leftrightarrow \\ (1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx} + n(n+1) f &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

hat. Man sieht leicht, dass die Legendre'sche DGL die regulär singulären Punkte  $\{\pm 1, \infty\}$  hat. Desweiteren wissen wir aus der MMP-Vorlesung, dass eine partikuläre Lösung dieser DGL gerade das  $n$ -te **Legendre-Polynom** bzw. die Legendre'sche Funktion 1. Art ist. Wir wissen bereits, dass die Lösungen dieser zwei Differentialgleichungen als Spezialfälle der hypergeometrischen Reihe auftreten, also könnte man vermuten, dass die zugrundeliegenden DGL auf die hypergeometrische Gleichung abgebildet werden können. In der Tat gilt der folgende Satz:

**Satz 2.12.** Sei  $y'' + p_1(z) y' + p_0(z) y = 0$  eine gewöhnliche Differentialgleichung mit meromorphen Koeffizientenfunktionen  $p_1, p_0$ , die auf  $\bar{\mathbb{C}}$  nur drei singuläre Punkte hat, welche alle regulär singulär sind. Dann können wir die ursprüngliche DGL durch eine gebrochen lineare Transformation  $\phi(z)$  auf die Form

$$y'' + \left( \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z-1} \right) y' + \left( \frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z-1} + \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_1}{(z-1)^2} \right) y = 0 \quad (2.58)$$

bringen. Ersetzen wir nun  $y$  durch  $z^\mu (1-z)^\nu y$ , wobei  $\mu, \nu$  geeignet gewählt werden müssen, so transformiert sich diese DGL in eine hypergeometrische Gleichung.

### 2.7.3 Die Lösung um $z=1$ und ihre Relation zur Lösung in der Nähe von $z=0$

Um eine Lösung um den Punkt  $z = 1$  zu erhalten, machen wir die Variablentransformation  $z \mapsto 1 - z$ . Es resultiert die etwas abgeänderte Gleichung

$$z(1-z)y'' + [(a+b+1-c) - (a+b+1)z]y' - aby = 0, \bar{a} = a, \bar{b} = b, \bar{c} = (a+b+1) - c.$$

Sie hat also dieselbe Gestalt und die allgemeine Lösung ist damit gegeben durch

$$y = B_1 F(a, b; a+b+1-c; 1-z) + B_2 (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z),$$

wobei  $B_1, B_2$  beliebige Konstanten sind und in der Kreisscheibe  $|z-1| < 1$  konvergiert, also dort eine analytische Funktion darstellt. Die eine Lösung ist wieder regulär und die andere singular. Offensichtlich überlappen sich die beiden Kreisscheiben  $|z| < 1$  und  $|z-1| < 1$ . Im Überschneidungsgebiet stellen also die zwei erhaltenen allgemeinen Lösungen die gleiche Funktion dar und es sollte prinzipiell möglich sein jede der jeweiligen partikulären Lösungen als Linearkombination der anderen Fundamentallösungen auszudrücken. Insbesondere muss der folgende Satz gelten:

**Satz 2.13.** Für alle  $z \in B_1(0) \cap B_1(1)$  gilt:

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b+1-c; 1-z) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z) \end{aligned} \quad (2.59)$$

*Beweis.* Dieser Satz besagt also, dass es Konstanten  $A, B$  gibt, so dass wir die folgende Darstellung für die hypergeometrische Funktion im Schnitt der zwei Kreisscheiben haben

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= AF(a, b; a+b+1-c; 1-z) \\ &+ B(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z). \end{aligned}$$

Die Existenz der Darstellung ist klar, da es sich bei den Funktionen auf der rechten Seite um ein Fundamentalsystem handelt. Also müssen wir nur die explizite Form zeigen. Wir betrachten nun zuerst den einfacheren Fall  $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ . Mit der Gauss'schen Summenformel können wir zumindest für den Grenzfall  $z \rightarrow 1$  eine Aussage machen und zwar:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \\ \lim_{z \rightarrow 1} AF(a, b; a+b+1-c; 1-z) + B(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z) & \\ = A & \\ \Rightarrow \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = A. & \end{aligned}$$

Nun betrachten wir analog den Grenzübergang  $z \rightarrow 0$  und sehen

$$1 = AF(a, b; a + b + 1 - c; 1) + BF(c - a, c - b; c + 1 - a - b; 1).$$

Benutzt man wieder die Gauss'sche Formel und verwendet den Ergänzungssatz für die Gamma-Funktion, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$B = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}.$$

Damit haben wir die gewünschte Relation zwischen der in  $z = 0$  regulären Lösung und den beiden Lösungen in der Nähe von  $z = 1$ . Nun können wir auf die Forderung  $\operatorname{Re}(a + b - c) > 0$  verzichten, da eine analytische Fortsetzung in  $a, b, c$  auf ganz  $\mathbb{C}$  möglich ist.  $\square$

#### 2.7.4 Konfluente hypergeometrische Differentialgleichung

Wie wir angemerkt haben, besteht die folgende Relation zwischen der konfluenten und der normalen hypergeometrischen Reihe

$$F(a, c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right).$$

Wenn wir nun die Substitution  $z \mapsto \frac{z}{b}$  in der hypergeometrischen Gleichung vollziehen und der Grenzübergang  $b \rightarrow \infty$  betrachten, so erhalten wir die sogenannte **konfluente hypergeometrische Differentialgleichung**

$$zy'' + (c - z)y' - ay = 0, \quad (2.60)$$

welche natürlich per Konstruktion von der Kummerschen Funktion  $y(z) = F(a, c; z)$  gelöst wird. Eine andere Möglichkeit sich davon zu überzeugen, dass die Kummersche Funktion diese DGL löst ist über einen Potenzreihenansatz  $y = \sum_{n \geq 0} B_n z^n$  und anschließendem Koeffizientenvergleich.

Wir stellen noch fest, dass im Unterschied zur gewöhnlichen hypergeometrischen Gleichung die konfluente Version nur zwei Singularitäten besitzt und zwar einen einfachen Pol in  $z = 0$  und eine irreguläre Singularität in  $z = \infty$ . Also könnte man sagen, dass bei der konfluenten DGL die Singularität in  $z = 1$  und  $z = \infty$  "verschmolzen" sind und genau auf diese Beobachtung deutet das Wort "konfluent" hin. Wir bemerken noch, dass es sich bei der konfluenten, wie auch der normalen hypergeometrischen Gleichung um Spezialfälle der **Riemann'schen Differentialgleichung** handelt, welche im Allgemeinen drei verschiedene Pole auf der Riemann'schen Zahlenkugel besitzt und für Pole in  $z = 0, z = \infty, z = z_3 \in \mathbb{C}$  die Form

$$y'' + \left( \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z} - \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - z_3} \right) y' + \left[ -\frac{z_2 \alpha \alpha'}{z^2 (z - z_3)} + \frac{\beta \beta'}{z (z - z_3)} + \frac{z_3 \gamma \gamma'}{z (z - z_3)^2} \right] y = 0$$

annimmt.

Da es sich bei der konfluenten Gleichung ebenfalls um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, besteht das Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Funktionen. Man findet ähnlich zur hypergeometrischen Gleichung eine weitere Lösung durch die Substitution  $y \rightarrow z^{1-c}y$ . Eingesetzt in die DGL findet man schlussendlich die Lösung

$$z^{1-c}F(a-c+1, 2-c; z),$$

welche bei  $z = 0$  einen singulären Punkt hat.

### 2.7.5 Die Legendre-Polynome

Wie bereits erwähnt wurde, stellen einerseits die Legendre-Polynome eine Lösung der Differentialgleichung 2.57 dar und andererseits kann nach Satz 2.12 diese Differentialgleichung auf die hypergeometrische Gleichung abgebildet werden. Also muss sich ein Parametersatz  $a, b, c$  finden lassen, so dass das  $n$ -te Legendre-Polynom durch die hypergeometrische Funktion  $F(a, b; c; z)$  darstellbar ist. Wir setzen die neue Variable  $w = \frac{1-z}{2} \Leftrightarrow z(w) = 1 - 2w$  in die Legendre'sche Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{4}{4}w(1-w) \frac{d^2}{dw^2}y(1-2w) + \frac{2(1-2w)}{2} \frac{d}{dw}y(1-2w) + n(n+1)y(1-2w) &= 0 \Leftrightarrow \\ w(1-w) \frac{d^2}{dw^2}y(1-2w) + (1-2w) \frac{d}{dw}y(1-2w) + n(n+1)y(1-2w) &= 0 \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der hypergeometrischen Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} P_n(1-2w) &= F(-n, n+1; 1; w) \Leftrightarrow \\ P_n(z) &= F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Wir wissen des Weiteren, dass es sich bei  $F(-n, n+1; 1; w)$  um die einzige in  $w = 0$  holomorphe Funktion handelt, welche diese Differentialgleichung erfüllt.  $\square$

### 2.7.6 Das Integral von Barnes

Bis jetzt beschränkte sich unsere Diskussion der Lösung der hypergeometrischen Gleichung auf die Einheitskreisscheiben um  $z = 0$  und  $z = 1$ . Unser Ziel ist nun die Lösung ausserhalb dieser Gebiete zu finden und insbesondere für  $z \rightarrow \infty$ . Prinzipiell könnten wir das vorgestellte Vorgehen verwenden und die Substitution  $z \rightarrow 1/z$  verwenden. Wir wollen hier jedoch eine andere Methode diskutieren. Wir betrachten eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$

welche im Einheitskreis  $|z| < 1$  konvergieren soll. Nun suchen wir zuerst eine Konturintegraldarstellung in diesem Gebiet und fragen uns anschliessend ob eine analytische Fortsetzung möglich ist. Wir wollen annehmen, dass es eine in der rechten Halbebene

⊤ analytische Funktion  $A(s)$  gibt, so dass  $A(n) = n!A_n$  und  $A(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  nicht zu stark divergent ist. Also haben wir nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{n!} z^n.$$

Wir betrachten nun das folgende Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} A(s) \Gamma(-s) (-z)^s ds. \quad (2.62)$$

Die Integrationskontur soll entlang der imaginären Achse verlaufen, jedoch bei  $s = 0$  einen Schlenker in die linke Halbebene machen, so dass der Pol der Gammafunktion auf der rechten Seite bleibt und kein weiterer möglicher Pol der Funktion  $A(s)$  eingeschlossen wird. Nun verschieben wir für  $|z| < 1$  den Integrationsweg von der imaginären Achse auf die rechte Seite nach  $\infty$ , wobei die Integration entlang dieses Weges, da  $A(s)$  per Voraussetzung nicht all zu divergent ist, verschwindet und Kreisintegrale (Uhrzeigersinn) um die Pole übrig bleiben. Der Beitrag der übriggebliebenen Kreisintegrale um die Pole der Gamma-Funktion summieren sich dann zu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} A(s) \Gamma(-s) (-z)^s ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{n!} z^n. \quad (2.63)$$

Wenn die Funktion  $A(s)$  so gewählt wird, dass die Werte  $A(n)$  mit den Taylor-Koeffizienten eine Funktion  $f(z)$  im Ursprung übereinstimmen, dann liefert die Gleichung 2.63 die Konturintegraldarstellung von  $f(z)$  innerhalb des Einheitskreises. Nun können wir eine analytische Fortsetzung der Funktion  $f(z)$  ausserhalb dieses Gebiets erhalten, indem wir die Integration wieder entlang der imaginären Achse betrachten, jedoch mit einem Halbkreis in die rechte Halbebene betrachten und anstatt die Integrationskontur nach  $\text{Re}(s) \rightarrow \infty$  nach  $-\infty$  verschieben. Dann entstehen wieder Kurvenintegrale um die Pole, jedoch dieses Mal im Gegenuhrzeigersinn.

Wir wollen nun eine solche Konturintegraldarstellung für die hypergeometrische Funktion erhalten (vgl. [5]). Anhand der Definition der hypergeometrischen Funktion sehen wir

$$A_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}$$

und deshalb setzen wir in Gleichung 2.63 auf der linken Seite

$$A(s) = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+s)}$$

ein und es entsteht dann das folgende Wegintegral

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} \Gamma(-s) (-z)^s ds.$$

Wir behaupten nun, dass das folgende Lemma gilt:

**Lemma 2.6.** (Integral von Barnes)

Die hypergeometrische Funktionen hat die folgende Integraldarstellung

$$F(a, b; c; z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} \Gamma(-s) (-z)^s ds, \quad (2.64)$$

wenn  $|\arg(-z)| < \pi$  (auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ ). Desweiteren soll der Integrationsweg von  $-i\infty$  nach  $i\infty$  derart sein, dass sich die Pole von  $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ , welche in  $s = -a - n$  bzw.  $s = -b - n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  liegen, auf der linken Seite des Weges befinden und sich die Pole von  $\Gamma(-s)$ , welche sich in  $s = 0, 1, 2, \dots$  befinden, auf der rechten Seite des Weges befinden. Diese Konstruktion wird das **Integral von Barnes** genannt.

*Bemerkung 2.12.* Wir bemerken noch, dass eine solche Integrationskontur nur möglich ist, wenn  $a, b \notin \mathbb{Z}_{<0}$  (in diesem Fall wäre die hypergeometrische Reihe lediglich ein Polynom). Wir beobachten noch, dass das Lemma eigentlich nichts anderes besagt, weder dass die hypergeometrische Funktion  $F$  die Mellin-Transformierte von

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+s)} \Gamma(-s)$$

ist.

*Beweis.* Sei  $\delta > 0$  und betrachten  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|\arg(-z)| < \pi - \delta$ .

(1) Konvergenz des Integrals:

Sei  $|\arg(-z)| < \pi - \delta$ . Nun sehen wir aus dem Ergänzungssatz für die Gammafunktion, dass gilt

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} \Gamma(-s) (-z)^s = -\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)} \frac{\pi}{\sin \pi s} e^{s \log(-z)},$$

wobei wir den Hauptzweig des Logarithmus verwenden. Mit der Stirling'schen Formel

können wir nun für  $s \in \{s \in \mathbb{C} \mid |\arg s| < \pi - \epsilon, \epsilon > 0\}$  asymptotisch schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)} &\sim \exp[a \log(a+s) + b \log(b+s) - c \log(c+s) - \log(1+s)] \\
&\quad + \left(s - \frac{1}{2}\right) \log \frac{(a+s)(b+s)}{(c+s)(1+s)} - (a+b-c-1) \Big] \\
&\sim \exp \left[ (a+b-c-1) \log s + a \log \left(1 + \frac{a}{s}\right) + b \log \left(1 + \frac{b}{s}\right) \right. \\
&\quad \left. - c \log \left(1 + \frac{c}{s}\right) - \log \left(1 + \frac{1}{s}\right) - (a+b-c-1) \right. \\
&\quad \left. + \left(s - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{(a+s)(b+s) - (c+s)(1+s)}{(c+s)(1+s)}\right) \right] \\
&\sim s^{a+b-c-1} \exp \left[ \left(s - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{(a+b-c-1)s}{(c+s)(1+s)}\right) \right. \\
&\quad \left. - (a+b-c-1) \right] \\
&\sim s^{a+b-c-1}. \\
\Rightarrow \text{Integrand} &\sim -s^{a+b-c-1} \frac{\pi}{\sin \pi s} (-z)^s
\end{aligned}$$

Auf der Integrationskontur, also  $s = it$ , erhalten wir damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\text{Integrand} &= O \left( |t|^{a+b-c-1} \frac{|e^{it(\log|z| + i\arg(-z))}|}{e^{\pi|t|} - e^{-\pi|t|}} \right) \\
&= O \left( |t|^{a+b-c-1} \frac{e^{|t|\cdot|\arg(-z)|}}{e^{\pi|t|}} \right) \\
&= O \left( |t|^{a+b-c-1} \frac{1}{e^{\delta|t|}} \right).
\end{aligned}$$

Also ist das Integral konvergent. Nun sieht man leicht, dass der Integrand im Gebiet  $|\arg z| < \pi - \delta$  eine analytische Funktion darstellt.

(2) Auswertung des Integrals:

In einem nächsten Schritt wollen wir mit einem Cauchy-Argument das Integral weiter auswerten. Sei nun wieder  $|\arg(-z)| < \pi - \delta$ . Wir betrachten nun das Integral über den Halbkreis  $\mathcal{C}_N := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq 0, |s| = N + \frac{1}{2}\}$ . Dort haben wir für  $N \rightarrow \infty$  das folgende Verhalten

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)} \frac{\pi}{\sin \pi s} e^{s \log(-z)} = O \left( N^{a+b-c-1} \right) \frac{(-z)^s}{\sin \pi s}.$$

Wenn nun  $s = (N + \frac{1}{2}) e^{i\theta}$  und  $|z| < 1$ , dann haben wir

$$\begin{aligned} \frac{(-z)^s}{\sin \pi s} &= O\left(e^{(N+\frac{1}{2})(\cos \theta \log |z| - \sin \theta \arg(-z) - \pi |\sin \theta|)}\right) \\ &= O\left(e^{(N+\frac{1}{2})(\cos \theta \log |z| - \delta |\sin \theta|)}\right) \\ &= \begin{cases} O\left(\exp \frac{(N+\frac{1}{2}) \log |z|}{\sqrt{2}}\right), & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4} \\ O\left(\exp -\frac{(N+\frac{1}{2})\delta}{\sqrt{2}}\right), & \frac{\pi}{4} \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ist also  $\log |z|$  negativ, d.h.  $|z| < 1$ , dann strebt der Integrand gegen Null für genügend grosses  $N$  und alle betrachteten  $\theta$ . Also verschwindet das Integral über den Kreisbogen für  $N \rightarrow \infty$ . Nun ist das folgende Integral

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} - \left( \int_{-i\infty}^{-i(N+\frac{1}{2})} + \int_{C_N} + \int_{i(N+\frac{1}{2})}^{i\infty} \right)$$

gleich minus  $2\pi i$  mal die Summe der Residuen des Integranden in den Punkten  $s = 0, 1, 2, \dots, N$ . Lassen wir  $N$  gegen  $\infty$  streben, wobei  $|\arg(-z)| < \pi - \delta$  und  $|z| < 1$ , dann verschwinden die drei Integral in der Klammer und wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n.$$

Damit haben wir das Lemma vollständig bewiesen. □

Um eine Reihen-Darstellung der hypergeometrischen Funktion  $F(a, b; c; z)$  zu erhalten, welche für  $|z| > 1$  konvergent ist, wollen wir nun das Integral von Barnes verwenden. Wenn  $C_\rho$  einen Halbkreis mit Radius  $\rho$  in der linken Halbebene bezeichnet, dann kann mit ähnlichen Methoden wie im Beweis des Integrals von Barnes gezeigt werden, dass gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0.$$

Dieser Grenzwert gilt natürlich unter den Voraussetzungen  $|\arg(-z)| < \pi$ ,  $|z| > 1$  und dass die untere Schranke für den Abstand der Pole des Integranden zu  $C_\rho$  eine positive Zahl ist. Wir finden dann genau gleich wie im vorherigen Beweis, dass gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-b+a+n)} \frac{\sin \pi(c-a-n)}{\cos n\pi \sin \pi(b-a-n)} (-z)^{-a-n} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(1-c+b+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-a+b+n)} \frac{\sin \pi(c-b-n)}{\cos n\pi \sin \pi(a-b-n)} (-z)^{-b-n}, \end{aligned}$$

wobei es sich bei den Summanden um die Residuen des Integranden in den Punkten  $s = -a - n$  und  $s = -b - n$  handelt. Durch Vereinfachung des Ausdrucks erhalten wir eine analytische Fortsetzung der hypergeometrischen Reihe von  $|z| > 1$  nach  $|z| < 1$ . Wir fassen das Resultat im folgenden Satz zusammen.

**Satz 2.14.** Für  $|z| < 1, |\arg(-z)| < \pi$  gilt

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^a F\left(a, a+1-c; a+1-b; \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^a F\left(b, b+1-c; b+1-a; \frac{1}{z}\right)$$

Damit haben wir eine meromorphe Fortsetzung der hypergeometrischen Reihe auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  und insbesondere erhalten wir eine Entwicklung um den Punkt  $z = \infty$ . Einen weiteren Satz, welcher ähnlich bewiesen wird, ist der Folgende:

**Satz 2.15.** (Mellin-Barnes-Integral) Wenn der Integrationsweg derart deformiert ist, dass die Pole der Funktion  $\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)$  auf der rechten Seite des Weges liegen und die Pole von  $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$  auf der linken Seite liegen unter der Annahme, dass keine der Pole dieser zwei Produktfunktionen übereinstimmen, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s) ds = \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

## 2.8 Die Monodromie-Darstellung

### 2.8.1 Analytische Fortsetzung längs Kreisketten und Wegen ([3])\*

Bevor wir im nächsten Abschnitt uns der sogenannten Monodromie-Darstellung widmen, benötigen wir ein weiteres Konzept und zwar dasjenige der analytischen Fortsetzung längs Kreisketten beziehungsweise Wegen. Wir beginnen mit einer Definition einer Kreiskette:

**Definition 2.9.** Eine endliche Folge  $\{K_i\}_{i=0}^n$  von offenen Kreisscheiben in  $\mathbb{C}$  nenne wir eine (zusammenhängende) **Kreiskette**, wenn für  $i = 1, \dots, n$  die Mittelpunkte von  $K_{i-1}$  und  $K_i$  im Durchschnitt  $K_{i-1} \cap K_i$  enthalten sind.

**Definition 2.10.** Seien nun auf den Kreisscheiben eine Familie von nachbarlich verträglichen holomorphen Funktionen  $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben, d.h. solche mit

$$f_{i-1}|_{K_i \cap K_{i-1}} = f_i|_{K_i \cap K_{i-1}}$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Dann sagt man, dass  $f_n$  durch **analytische Fortsetzung längs der Kreiskette** aus  $f_0$  entstehe. Manchmal nennt man auch die Familie  $\{f_i\}_{i=1}^n$  analytische Fortsetzung von  $f_0$  entlang der Kreiskette  $\{K_i\}_{i=0}^n$ .

*Bemerkung 2.13.* Zu den gemachten Definitionen wollen wir ein paar Bemerkungen anstellen:

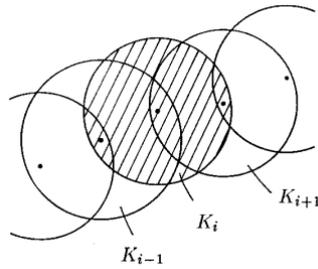


Abbildung 5:  $K_i$  enthält auch die Mittelpunkte seiner Nachbarn

- (i) Wenn die analytische Fortsetzung eines holomorphen  $f_0$  entlang einer gegebenen Kreiskette möglich ist, dann ist sie nach dem Identitätssatz natürlich auch eindeutig bestimmt und prinzipiell können wir sie konstruieren indem wir sukzessive jeweils die Funktion  $f_{i-1}$  um den Mittelpunkt von  $K_i$  in eine Potenzreihe entwickeln, die dann also  $f_i$  darstellt.
- (ii) Wäre uns zum Beispiel die Information über eine auf einem Gebiet  $G$  holomorphe Funktion  $f$  beinahe ganz verloren gegangen und nur noch auf einer kleinen Kreisscheibe bekannt, dann könnten wir  $f$  durch analytische Fortsetzung längs Kreisketten in ganz  $G$  reproduzieren.
- (iii) Die interessantere Situation ist aber die Folgende: Sei ein Gebiet  $G$  gegeben und  $K_0 \subset G$  eine Kreisscheibe, sowie  $f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Desweiteren soll  $f_0$  entlang jeder Kreiskette in  $G$  analytisch fortsetzbar sein. Folgt daraus bereits, dass die Funktion  $f_0$  von einer auf ganz  $G$  holomorphen Funktion  $f$  stammt, die dann natürlich durch analytische Fortsetzung längs Kreisketten in  $G$  aufzufinden wäre? Dies müssen wir in der Tat verneinen. Es gilt viel eher, dass die analytische Fortsetzung von  $f_0$  zur selben Endkreisscheibe vom expliziten Verlauf der Kreiskette abhängen kann, wodurch die Funktion  $f$ , welche wir zu konstruieren versuchen, *mehrdeutig* würde. Der sogenannte *Monodromiesatz* gibt uns aber eine Auskunft darüber wann wir dies tun können.

Als nächstes wollen wir ein Kriterium beweisen, welches es uns ermöglicht zu überprüfen, ob eine Funktion analytisch fortsetzbar entlang einer Kreiskette ist.

**Lemma 2.7.** (Fortsetzbarkeitslemma)

Sei  $(K_0, \dots, K_n)$  eine Kreiskette und  $f_0$  eine holomorphe Funktion auf  $K_0$ . Die Funktion  $f_0$  ist genau dann analytisch fortsetzbar entlang der Kreiskette, wenn es eine analytische Fortsetzung der Ableitung  $f_0'$  entlang der Kette gibt.

*Beweis.* Die erste Richtung ist klar, denn gibt es eine Fortsetzung für  $f_0$  so wählt man  $g_j = f_j'$  und man hat eine Fortsetzung von  $f_0'$  entlang der Kreiskette  $\{K_i\}$ .

Umgekehrt seien  $g_i : K_i \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $i = 0, \dots, n$  und  $f_0' = g_0$  Fortsetzungen von  $f_0'$  entlang der Kette. Sei nun  $0 \leq k < n$ . Wir machen die (für  $k = 0$  trivialerweise zutreffende)

Induktionsannahme, dass  $f_0$  durch Funktionen  $f_0, \dots, f_k$  längs der Kette  $(K_0, \dots, K_k)$  fortsetzen lässt. Dann gilt  $f'_i - g_i \equiv 0$  nicht nur für  $i = 0$ , sondern nach dem Identitätssatz auch für die anderen  $i \leq k$ , also ist auch  $f_k$  Stammfunktion von  $g_k$ . Nun wählen wir eine Stammfunktion  $G_{k+1}$  von  $g_{k+1}$ . Dies ist möglich, da  $g_{k+1}$  durch eine konvergente Potenzreihe gegeben ist. Auf dem Durchschnitt  $K_k \cap K_{k+1}$  verschwindet dann  $G'_{k+1} - f'_k$ , also ist  $G_{k+1} - f_k$  dort gleich einer Konstanten  $\lambda$  und wir brauchen auf  $K_{k+1}$  nur  $f_{k+1} = G_{k+1} - \lambda$  zu setzen und haben die analytische Fortsetzung von  $f_0$  induktiv um eine Kreisscheibe weitergeführt.  $\square$

Dieser Beweis gibt uns sogar ein explizites Konstruktionsverfahren wie wir aus einer analytischen Fortsetzung der Ableitungen einer Funktion entlang einer Kette die analytische Fortsetzung der Funktion selbst konstruieren können.

*Beispiel 2.5.* Sei  $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $K_0 \subset G$  eine offene Kreisscheibe um den Punkt  $z_0 = 1$  mit Radius kleiner 1. Wir setzen nun  $g_0(z) := \frac{1}{z}$  in  $K_0$  und definieren  $f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  als die Stammfunktion von  $g_0$ , also  $g_0 = f'_0$  und verlangen  $f_0(1) = 0$  (Potenzreihen!). Dann ist  $f'_0$  längs jeder Kreiskette in  $G$  analytisch fortsetzbar, nämlich durch die in ganz  $G$  holomorphe Funktion  $g(z) = \frac{1}{z}$ . Damit sind alle Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Wäre aber durch das Verfahren im Beweis eine holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  wohldefiniert (eindeutig!), dann müsste diese eine Stammfunktion von  $g(z)$  sein, aber eine solche gibt es nicht, da bekanntlich gilt  $\int_{|z|=r} g dz = 2\pi i$ . In der Tat handelt es sich beim betrachteten  $f_0$  um den Hauptzweig des Logarithmus und dieser erfüllt  $e^{f_0(z)} = z$ . Diese charakteristische Gleichung überträgt sich wegen der analytischen Fortsetzung von  $f_0$  und des Identitätssatzes auch auf die  $f_k$ 's und damit ist jedes  $f_k$  durch einen geeigneten Logarithmuszweig gegeben. Wir bemerken noch, dass solange wir in der negativ geschlitzten Ebene bleiben der Hauptzweig geeignet ist und wir kommen auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit dem Hauptzweig oder dem Zweig auf der positiv geschlitzten Ebene aus, denn eine Kreisscheibe in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  kann nie den positiven und negativen Teil der reellen Achse gleichzeitig treffen. Führt man beispielsweise die Kreiskette einmal im mathematisch positiven Sinn um  $z = 0$  bis  $K_n = K_0$  gilt, dann ist aus dem Hauptzweig  $f_0$  der sogenannte erste Nebenzweig  $f_n = f_0 + 2\pi i$  geworden.

Nun wollen wir etwas spezielle Typen von Kreisketten betrachten und zwar solche die entlang von Kurven verlaufen.

**Definition 2.11.** Sei nun  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiger Weg. Eine Kreiskette  $\{K_i\}_{i=0}^n$  nennen wir eine **Kette entlang des Weges**  $\gamma$ , wenn es eine Zerlegung  $t_0 = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n = t_1$  des Intervalls  $[t_0, t_1]$  gibt, so dass  $\gamma(\tau_i)$  dem Zentrum der Kreisscheibe  $K_i$  entspricht und  $\gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]} \subset K_{i-1} \cap K_i$ .

Das folgende Lemma sagt uns nun, dass es primär auf den betrachteten Weg ankommt und nicht auf die genaue Gestalt der Kreiskette.

**Lemma 2.8.** Seien  $K, K'$  offene Kreisscheiben um  $\gamma(t_0)$  und  $\gamma(t_1)$ , wobei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiger Weg bezeichnet. Wenn die holomorphen Funktionen  $g_1, g_2 : K' \rightarrow \mathbb{C}$  durch analytische Fortsetzung längs Kreisketten längs  $\gamma$  aus  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  hervorgehen, dann gilt  $g_1 = g_2$ .

*Beweis.* Wir betrachten eine Kreiskette  $(K_0, \dots, K_n)$  mit korrespondierender Zerlegung  $(\tau_0, \dots, \tau_n)$  entlang des Weges  $\gamma$ . Desweiteren bezeichne  $(f_0, \dots, f_n)$  die analytische Fortsetzung von  $f$  mit  $f_n = g_1$ . Da jedes  $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch ist, können wir diese Funktion  $f_i$  um jedes  $\gamma(t)$  mit  $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$  in eine Potenzreihe

$$P_t(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(t) (z - \gamma(t))^k$$

entwickeln und in einem geeigneten Gebiet die Funktion darstellt. Die Abbildung  $P_t$  ist sogar auf dem ganzen Intervall  $[t_0, t_1]$  wohl-definiert, da ja  $f_i$  und  $f_{i-1}$  in den offenen Mengen  $K_i \cap K_{i-1}$  übereinstimmen und so zu einer analytischen Funktion auf  $K_i \cup K_{i-1}$  verschmolzen werden können. Wir können sogar zu jedem  $t$  ein  $\epsilon > 0$  finden, so dass man für  $|t - t'| < \epsilon$  die Potenzreihe  $P_{t'}$  durch Potenzreihenentwicklung von  $P_t$  an der Stelle  $\gamma(t')$  erhält. Diese Eigenschaft nennen wir die *lokale Verträglichkeit* der Potenzreihenfamilie  $\{P_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ . Also stellt die Anfangspotenzreihe  $P_{t_0}$  die Funktion  $f$  und die Endpotenzreihe  $P_{t_n}$  die Funktion  $g_1$  dar. Analog definieren wir die Familie  $\{\bar{P}_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$  für die andere Fortsetzung entlang einer Kreiskette entlang  $\gamma$ . Nun betrachten wir die Koinzidenzmenge

$$M := \{t \in [t_0, t_1] \mid P_t = \bar{P}_t\} \subset [t_0, t_1].$$

Die Menge  $M$  ist nicht leer, denn  $t_0 \in M$  und da  $[t_0, t_1]$  zusammenhängend ist, sind die einzigen gleichzeitig abgeschlossen und offenen Mengen das ganze Intervall und die leere Menge, weshalb es reicht zu zeigen, dass  $M$  diese Eigenschaft erfüllt. Wegen der lokalen Verträglichkeit der Potenzreihen ist die Menge  $M$  offen in der Teilraumtopologie. Aber aus demselben Grund ist  $M$  auch abgeschlossen, denn hat  $M$  in  $t$  einen Häufungspunkt, dann hat jede Umgebung von  $t$  unendlich viele Punkte mit  $M$  gemeinsam, also gibt es wegen der Kompaktheit von  $[t_0, t_1]$  eine konvergente Teilfolge  $t_{n_k} \rightarrow t$  gegen  $t$  und damit gilt wegen der lokalen Verträglichkeit  $P_t = \bar{P}_t$ . Damit gilt  $M = [t_0, t_1]$  und insbesondere  $P_{t_1} = \bar{P}_{t_1}$ .  $\square$

Dieses Lemma berechtigt uns nun von analytischer Fortsetzung **entlang eines Weges** zu sprechen, nämlich im betrachteten Fall zu sagen, dass die holomorphe Funktion  $g_1$  bzw. deren Potenzreihe um  $\gamma(t_1)$  entstehe aus  $f$  durch analytische Fortsetzung längs  $\gamma$ . Das Fortsetzbarkeitskriterium gilt natürlich dann auch entlang für Wege:

**Korollar 2.1.** Sei  $\gamma$  ein stetiger Weg  $f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe um den Punkt  $\gamma(t_0)$ . Lässt sich nun die Ableitung  $f'_0$  entlang  $\gamma$  analytisch fortsetzen, so auch die Funktion  $f_0$  selbst.

Liegt das Bild eines stetigen Weges  $\gamma$  ganz in einem Gebiet  $G$ , welches o.B.d.A. ungleich  $\mathbb{C}$  ist, dann gibt es stets eine Kreiskette längs  $\gamma$ , die ganz in  $G$  liegt. Denn kompakte Mengen unter stetigen Abbildung sind kompakt, also insbesondere  $\gamma([t_0, t_1]) \in \text{Compact}(\mathbb{C})$ , und daher hat diese Menge einen positiven Abstand  $r > 0$  von  $\mathbb{C} \setminus G \in \text{Closed}(\mathbb{C})$ . Desweiteren ist  $\gamma$  wegen der Kompaktheit gleichmässig stetig, d.h. es gibt ein  $\epsilon > 0$ , sodass aus  $|t - t'| < \epsilon$   $|\gamma(t) - \gamma(t')| < r$  folgt und aus diesem Grund gibt es eine Kreiskette längs  $\gamma$  in  $G$  und zwar wenn wir die Unterteilung des Intervalls feiner als dieses  $\epsilon$  wählen,

sowie den Kreisscheiben den Radius  $r$  geben. Damit erhalten wir:

*Eine Funktion die längs aller Kreisketten in  $G$  fortsetzbar ist, ist auch längs aller Wegen in  $G$  fortsetzbar. Es gilt natürlich auch die Umkehrung.*

Im Rest dieses Abschnittes sind wir an der Frage interessiert inwiefern die analytische Fortsetzung vom Verlauf des Weges abhängt. Nun wollen wir einen beinahe trivialen Aspekt dieser Frage durch die folgende Bemerkung vorweg nehmen:

*Bemerkung 2.14.* Sei  $\gamma \in C([t_0, t_1], \mathbb{C})$  ein stetiger Weg und  $f_1$  entstehe aus  $f_0$  durch analytische Fortsetzung längs  $\gamma$ . Ist nun  $\phi : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$  stetig und monoton mit  $\phi(s_0) = t_0, \phi(s_1) = t_1$  (bzw.  $\phi(s_0) = t_1, \phi(s_1) = t_0$ ) so entsteht  $f_1$  auch aus  $f_0$  (bzw.  $f_0$  aus  $f_1$ ) durch analytische Fortsetzung längs  $\gamma \circ \phi$ .

Um dies zu sehen verwendet man einfach dieselbe bzw. die umgekehrte Kreiskette, für die man nur die Teilungspunkt  $s_0 = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = s_1$  geeignet neu festzusetzen hat. Diese Beobachtung erlaubt uns in der folgenden Diskussion o.B.d.A. das Einheitsintervall als Definitionsbereich der Wege zu wählen.

Nun wiederholen wir ein paar bekannte Tatsachen aus der Topologie-Vorlesung und zwar den Begriff der Homotopie, sowie die Fundamentalgruppe.

**Definition 2.12.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, wie z.B. ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ .

- (i) Unter einem **Weg** in  $X$  verstehen wir ab jetzt eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ .
- (ii) Seien  $\gamma_i$  mit  $i = 1, 2$  Wege in  $X$  mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ , definieren wir den **zusammengesetzten Weg**  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  als den Weg

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (2.65)$$

In der Tat ist dieser Weg wieder stetig aufgrund des Klebe-Lemmas (vgl. Topologie-Vorlesung).

- (iii) Unter dem **inversen Weg** verstehen wir den Weg  $\gamma^-(t) := \gamma(1 - t)$ .
- (iv) Einen Weg  $\gamma$  nennen wir **geschlossen** wenn  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Für geschlossene Wege  $\gamma_1, \gamma_2$  mit selbem Anfangspunkt ist natürlich auch  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  geschlossen. Wenn  $\gamma(0) = x_0$ , dann nennen wir einen geschlossenen Weg  $\gamma$  mit Anfangs- und Endpunkt  $x_0$  auch eine **Schleife mit Basispunkt**  $x_0$ .
- (v) Zwei Wege  $\gamma_i$  mit  $i = 1, 2$  mit gemeinsamen Anfangspunkt  $x_0$  und Endpunkt  $x_1$  in  $X$  heißen **homotop** (relativ zu den Endpunkten), in Zeichen  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , wenn es zwischen ihnen eine sogenannte **Homotopie** gibt, d.h. es gibt eine stetige Abbildung  $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $(\tau, t) \mapsto h(\tau, t) =: h_\tau(t)$ , so dass

$$h_0 = \gamma_1, h_1 = \gamma_2, h_\tau(0) = x_0, h_\tau(1) = x_1.$$

Anschaulich soll man sich vorstellen, dass homotope Wege bei festgehaltenen Endpunkten durch eine stetige "Deformation" auseinander hervorgehen.

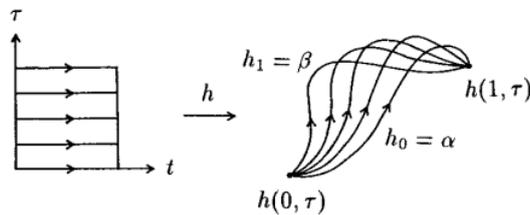


Abbildung 6: Eine Homotopie zwischen den Wegen  $\alpha$  und  $\beta$ .

Nun wollen wir die wichtigsten Eigenschaften der Homotopie auflisten.

**Lemma 2.9.** Mit der Relation  $\sim$  auf der Menge aller Wege in  $X$  mit gleichen Endpunkten haben wir ein Äquivalenzrelation.

*Beweis.*

- (i) *Reflexivität:*  $\gamma \sim \gamma$  ist klar (setze  $h_\tau := \gamma$  für alle  $\tau$ ).
- (ii) *Symmetrie:*  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$  ist auch klar (zu gegebener Homotopie  $\gamma_1 \stackrel{h}{\sim} \gamma_2$  setze  $\tilde{h}_\tau := h_{1-\tau}$ ).
- (iii) *Transitivität:* Sind  $\gamma_1 \stackrel{h}{\sim} \gamma_2 \stackrel{k}{\sim} \gamma_3$  gegebene Homotopien, so definieren wir

$$\tilde{h}_\tau := \begin{cases} h_{2\tau}, & \tau \in [0, \frac{1}{2}] \\ k_{2\tau-1}, & \tau \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Wegen dem Klebe-Lemma ist  $\tilde{h}$  in der Tat wieder stetig.

□

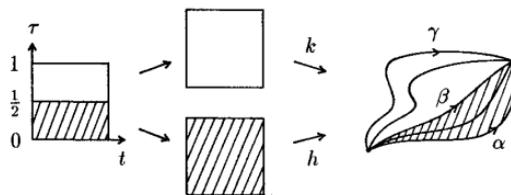


Abbildung 7: Verwendete Homotopie im Beweis.

Mit  $[\gamma]$  bezeichnen wir nun die Äquivalenzklasse des Weges  $\gamma$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $\sim$  und nennen sie die **Homotopieklasse** von  $\gamma$ . Die Homotopieklassenbildung ist mit

dem Zusammensetzen von Wegen verträglich. Endet nämlich  $\gamma_1$  ( $\gamma'_1$ ) am Anfangspunkt von  $\gamma_2$  ( $\gamma'_2$ ) und ist  $\gamma_1 \stackrel{h}{\sim} \gamma'_1$  und  $\gamma_2 \stackrel{k}{\sim} \gamma'_2$ , dann erhalten wir durch  $h_\tau := h_\tau k_\tau$  (Stetigkeit!) eine Homotopie zwischen  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  und  $\gamma'_1 \cdot \gamma'_2$ . Wir können also nicht nur einzelne Wege, sondern auch Homotopieklassen von Wegen zusammensetzen, wofür wir schreiben:

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 \cdot \gamma_2]. \quad (2.66)$$

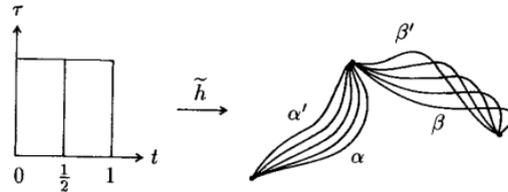


Abbildung 8: Zusammensetzung von Homotopieklassen.

Wir machen noch die folgende sehr einfache Bemerkung:

*Bemerkung 2.15.* Für ein stetiges  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$  gilt stets  $\gamma \sim \gamma \circ \phi$ . Eine Homotopie erhält man ganz einfach durch  $h_\tau(t) := \gamma((1-t)\tau + \tau\phi(t))$ . Es gelten sogar die folgenden zwei Korollare:

**Korollar 2.2.** Sind  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  in dieser Reihenfolge zusammensetzbar, dann gilt  $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \sim \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ . Die Zusammensetzung von Homotopieklassen ist also assoziativ.

**Korollar 2.3.** Bezeichnet  $e_{x_1}$  den konstanten Weg bei  $x_1$ , so gilt  $\gamma \cdot e_{x_1} \sim \gamma \Rightarrow [\gamma] \cdot [e_{x_1}] \sim [\gamma]$ .

**Korollar 2.4.** Es gilt stets  $\gamma \cdot \gamma^- \sim e_{x_0} \Rightarrow [\gamma] \cdot [\gamma^-] \sim [e_{x_0}]$ .

Nach den eben formulierten Lemmas und Korollare sieht es beinahe so aus als ob die Homotopieklassen von Wegen in  $X$  eine Gruppe bilden möchte, aber es lassen sich ja nicht alle Wege zusammensetzen. Jedoch erhalten wir eine wenn wir die zulässigen Homotopieklassen einschränken und zwar:

**Definition 2.13.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$ . Durch die Zusammensetzung von Homotopieklassen als Verknüpfung wird die Menge der Homotopieklassen geschlossener Wege in  $X$  mit dem Anfangspunkt  $x_0$  zu einer Gruppe  $\pi_1(X, x_0)$ , der sogenannten **Fundamentalgruppe** von  $X$  mit dem **Basispunkt**  $x_0$ .

Ein topologischer Raum  $X$  hat also i.A. nicht nur eine, sondern viele Fundamentalgruppen. Ist jedoch  $\gamma$  ein Weg in  $X$  von  $x_0$  nach  $x_1$ , so ist durch die Abbildung

$$\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), \alpha_*([\gamma]) := [\alpha^-] \cdot [\gamma] \cdot [\alpha] \quad (2.67)$$

ein *Gruppenhomomorphismus* gegeben. In einem wegzusammenhängenden Raum, wie beispielsweise einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ , sind also alle Fundamentalgruppen isomorph, also ist es für isomorphie-invariante Eigenschaften egal, welchen Basispunkt wir explizit

betrachten. Nun kehren wir zur Funktionentheorie zurück und wollen den sogenannten Monodromiesatz betrachten.

**Satz 2.16.** (Monodromiesatz) Seien  $\gamma_1 \stackrel{h}{\sim} \gamma_2$  homotope Wege in  $\mathbb{C}$ ,  $K \subset \mathbb{C}$  eine offene Kreisscheibe um den gemeinsamen Anfangspunkt und  $f_0 : K \rightarrow \mathbb{C}$  entlang jedes Weges  $h_\tau : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch fortsetzbar. Dann gilt: Entstehen  $f_1, \bar{f}_1 : K' \rightarrow \mathbb{C}$  aus  $f_0$  durch analytische Fortsetzung längs  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$ , so gilt  $f_1 = \bar{f}_1$ .

*Beweis.* Mit  $f_{1\tau}$  bezeichnen wir die analytische Fortsetzung von  $f_0$  entlang des Weges  $h_\tau$ .

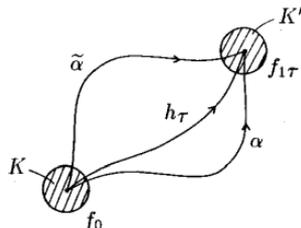


Abbildung 9: Die analytische Fortsetzung längs  $h_\tau$  von  $f_0$  führt zu  $f_{1\tau}$ . Wir zeigen im Beweis  $f_{10} = f_{11}$ .

Um nicht die möglicherweise verschiedenen Definitionsbereiche (i.A. verschiedene Kreisscheiben) der fortgesetzten Funktionen  $f_{1\tau}$  benennen zu müssen, betrachten wir die Taylorreihe  $T(\tau)$  von  $f_{1\tau}$  an der Stelle  $h_\tau(1)$  für  $0 \leq \tau \leq 1$ . Wir müssen also zeigen, dass  $T(1) = T(0)$ . Dazu genügt es aber natürlich zu zeigen, dass  $T(\tau)$  (also die Koeffizienten  $a_k(\tau)$ ) lokal konstant ist (denn für einen zusammenhängenden topologischen Raum folgt aus der lokalen Konstantheit, dass die Funktion auf ihrem ganzen Definitionsbereich konstant ist, also insbesondere für  $\tau \in [0, 1]$ ), d.h. für jede  $\tau_0 \in [0, 1]$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $T(\tau) = T(\tau_0)$ , wenn  $|\tau - \tau_0| < \delta$ . Wir betrachten nun den Weg  $h_{\tau_0}$  für ein fixiertes  $\tau_0 \in [0, 1]$ . Wir betrachten also eine Kreiskette  $(K_0, \dots, K_n)$  mit der Unterteilung  $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = 1$  und die Kreisscheiben sollen die Radien  $r_i > 0$  für  $i = 0, \dots, n$  haben. Entlang dieser Kette habe  $f_0$  die analytische Fortsetzung  $f_0 = g_0, g_1, \dots, g_n = f_{1\tau_0}$ . Unsere Beweisidee ist grob gesagt nun dass für ein genügend kleines  $\delta > 0$  der Weg  $h_\tau$  sehr nahe an  $h_{\tau_0}$  ist und durch Verkleinerung der Radien  $r_i$  können wir für den Weg  $h_\tau$  dieselbe Unterteilung  $\lambda_i$  verwenden und dann gilt natürlich  $K_i(\tau) \subset K_i$ , weshalb dann  $g_i(\tau) := g_i|_{K_i(\tau)}$  eine Fortsetzung entlang  $h_\tau$  ist und zwar mit derselben Endpotenzreihe  $T(\tau) = T(\tau_0)$ .

Wir begnügen uns hier mit diesem intuitivem Beweis und die explizite Konstruktion überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe. Man hat einfach die folgende Behauptung auf  $K := K_i(\tau_0)$  und  $A := h_{\tau_0}([\lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}])$  mit  $i = 0, \dots, n$  ( $\lambda_{-1} = 0, \lambda_{n+1} = 1$ ) anzuwenden und die Kompaktheit von  $[0, 1] \times \tau_0$  auszunutzen.

**Behauptung 2.8.** Sei  $K$  eine offene Kreisscheibe um den Punkt  $p$  und für  $q \in K$  bezeichne  $K(q)$  die grösste offene Kreisscheibe, welche in  $K$  enthalten ist, sowie  $A \subset K$

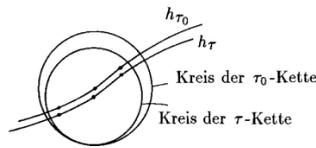


Abbildung 10: Skizze zur Beweisidee, die Funktionen  $g_0, \dots, g_n$  der Fortsetzung entlang des Weges  $h_{\tau_0}$  auch zur Fortsetzung entlang  $h_{\tau}$  zu verwenden.

sei eine kompakte Teilmenge von  $K$ . Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass für alle  $q \in B_{\epsilon}(p)$  gilt

$$U_{\epsilon} := \{z \in K \mid \exists z' \in A \text{ mit } z \in B_{\epsilon}(z')\} \subset K(q).$$

*Beweis.* Da  $A$  eine kompakte Teilmenge der offenen Kreisscheibe ist, hat diese einen Abstand  $a > 0$  zum Rand  $\partial K$ . Sei nun  $z \in U_{\epsilon}$  und  $\epsilon := \frac{a}{3}$ , dann folgt mit der Dreiecksungleichung  $z \in K(q)$ . □

□

Der Monodromiesatz zeigt insbesondere, dass in einfach zusammenhängenden Gebieten die Gefahr der Mehrdeutigkeit der entstehenden analytisch fortgesetzten Funktionen nicht besteht, denn würde analytische Fortsetzung von einem  $f_0$  längs  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  von  $z_0$  nach  $z_1$  zu verschiedenen Ergebnissen  $f_1, \bar{f}_1 : K' \rightarrow \mathbb{C}$  führen, so hätten wir ein Beispiel nichttrivialer analytischer Fortsetzung von  $f_1$  zu  $\bar{f}_1$  längs der nullhomotopen Schleife  $\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2$  an  $z_1$ , jedoch steht dies im Widerspruch zum Monodromiesatz. (Erinnerung: Einfach zusammenhängende Räume sind gerade die wegzusammenhängenden Räume in welchen alle Schleifen homotop zum konstanten Weg sind.)

**Lemma 2.10.** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend,  $K \subset G$  eine offene Kreisscheibe und lässt sich die holomorphe Funktion  $f_0 : K \rightarrow \mathbb{C}$  längs jeden Weges in  $G$  analytisch fortsetzen (z.B. weil sie Stammfunktion einer holomorphen Funktion auf  $G$  ist), dann ist  $f_0$  die Einschränkung genau einer holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Man nennt  $f$  dann den **Zweig** von  $f_0$  auf  $G$ .

*Bemerkung 2.16.* Wir bemerken noch, dass beispielsweise die folgenden Resultate mit dem Monodromiesatz bewiesen werden können:

- Das komplexe Wegintegral ist Homotopie-invariant.
- Das Wegintegral ist ebenfalls unter stetigen Parametertransformationen, die nicht notwendigerweise monoton sind, invariant, wenn  $\phi(s_i) = t_i$ . Denn für eine affine Parametertransformation  $\phi_0 : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$  ist dies richtig und  $h_{\tau} := (1 - \tau)\phi_0 + \tau\phi$  ist eine Homotopie zwischen  $\gamma \circ \phi_0$  und  $\gamma \circ \phi$ .
- Schlussendlich zeigt der Monodromiesatz, dass der Cauchy'sche Integralsatz für Bilder von Rechtecken auch gültig ist, wenn wir die Rechtecke derart deformieren,

dass das Bild "nur" noch stetig ist und nicht mehr notwendigerweise differenzierbar. Der Grund ist, dass der Rand davon natürlich im betrachteten Gebiet nullhomotop, also zusammenziehbar ist.

### 2.8.2 Der Cauchy'sche Fundamentalsatz und die Monodromie-Darstellung ([6])

In diesem Abschnitt wollen wir zuerst eine allgemeine Differentialgleichungen 2. Ordnung studieren, also eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z) u = 0. \quad (2.68)$$

Die komplexwertigen Funktionen  $p, q$  sollen auf der ganzen komplexen Ebene analytisch sein bis auf eine endliche Anzahl an Polstellen. Wir erinnern, dass wir einen Punkt  $z_0$  singular nennen, wenn  $p$  oder  $q$  einen Pol in  $z_0$  hat. Die anderen Punkte nennen wir regulär. Desweiteren nennen wir den Punkt  $z = \infty$  singular, wenn die Gleichung 2.68 nach einer Variablentransformation  $w = \frac{1}{z}$  in  $w = 0$  einen singulären Punkt hat. Die Differentialgleichung hat nach dieser Transformation die Gestalt

$$\frac{d^2u}{dw^2} + \left[ \frac{2}{w} - \frac{p(1/w)}{w^2} \right] \frac{du}{dw} + \frac{q(1/w)}{w^4} u = 0. \quad (2.69)$$

Wir erinnern nun noch an den folgenden Satz:

**Satz 2.17.** (Cauchy's Fundamentalsatz)

Wenn  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  ein regulärer Punkt der gewöhnlichen Differentialgleichung 2.68 ist, dann gibt es zwei linear unabhängige holomorphe Lösungen um den Punkt  $z_0$ . Anders gesagt bildet die Menge der Lösungen um  $z_0$  einen 2-dimensionalen linearen Raum über dem Körper  $\mathbb{C}$ .

Dieser Satz wird als bekannt vorausgesetzt, weshalb wir den Beweis nicht ausführen.

*Bemerkung 2.17.* Beachte, dass die Umkehrung des Satzes nicht notwendigerweise gilt, d.h. die Existenz von zwei linear unabhängigen holomorphen Lösungen der Gleichung 2.68 um einen Punkt  $z_0$  nicht unbedingt impliziert, dass  $z_0$  ein regulärer Punkt der Differentialgleichung ist.

Nun möchten wir an die folgende Definition erinnern, welche aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannt sein sollte:

**Definition 2.14.** Seien  $u_1, u_2$  zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung 2.68, dann definieren wir die **Wronski-Determinante**  $W := W(u_1, u_2)$  durch folgenden Ausdruck

$$W := \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \partial_z u_1 & \partial_z u_2 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

*Bemerkung 2.18.* Wir beobachten die folgenden Eigenschaften:

- (1) Wenn die Funktionen  $u_1, u_2$  linear unabhängig und analytisch sind, dann ist die Wronski-Determinante ungleich null.

(2) Es gilt sogar allgemeiner der folgende Satz von Newman und Slater ([7]):

*Satz 2.18.* Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper der Charakteristik 0. Eine endliche Familie von formalen Potenzreihen in  $\mathbb{K}[[x]]$  hat genau dann eine verschwindende Wronski-Determinante, wenn die Familie linear abhängig über  $\mathbb{K}$  ist.

(3) Schreiben wir die Wronski-Determinante als  $W(z) = u_1 \partial_z u_2 - u_2 \partial_z u_1$ , differenzieren diese bezüglich der Variable  $z$  und benutzen, dass die Funktionen  $u_1$  bzw.  $u_2$  die Gleichung 2.68 erfüllen, so sehen wir dass die Wronski-Determinante die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{dW}{dz} = -p(z)W.$$

Also können wir die Wronski-Determinante schreiben als

$$W(z) = c \exp\left(-\int_{z^*}^z p(z') dz'\right), \quad (2.71)$$

wobei  $c$  eine Konstante ist. Da die Funktionen  $u_1, u_2$  linear unabhängig sind, ist  $W$  nicht identisch die Nullfunktion und deshalb  $c \neq 0$ . Folglich ist die Wronski-Determinante  $W(z)$  für einen regulären Punkt  $z_0$  der Gleichung 2.68 in einer geeigneten Umgebung dessen holomorph und verschwindet dort nicht.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung 2.68 bezeichnen wir nun mit

$$S := \{z_1, \dots, z_m, z_{m+1} = \infty\}.$$

Sei nun  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S =: U$ . Desweiteren bezeichnen wir mit  $u_1, u_2$  die zwei linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung 2.68 um den Punkt  $z_0$ . Wir betrachten eine Schleife  $\gamma$  in  $U$  mit Basispunkt  $z_0$ . Wenn wir die Lösungen  $u_1, u_2$  analytisch entlang der Kurve  $\gamma$  fortsetzen, dann bleiben die Funktionen linear unabhängig und lösen die Differentialgleichung 2.68 (aufgrund dem Argument bezüglich der Wronski-Determinante). Damit gibt es eine reguläre  $2 \times 2$ -Matrix  $M(\gamma)$  so dass

$$\gamma_* \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = M(\gamma) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $\gamma_*$  die analytische Fortsetzung entlang  $\gamma$  bezeichnet. Wenn  $\gamma_1, \gamma_2$  Schleifen in  $U$  mit Basispunkt  $z_0$  sind, dann ist die Komposition der Wege  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  die Kurve, welche zuerst entlang der Schleife  $\gamma_1$  und dann entlang  $\gamma_2$  folgt. Damit haben wir

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \cdot \gamma_2)_* \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= (\gamma_2)_* (\gamma_1)_* \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= (\gamma_2)_* M(\gamma_1) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= M(\gamma_2) M(\gamma_1) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= M(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn  $\gamma_1$  in  $U$  stetig in  $\gamma_2$  deformiert werden kann, so haben wir  $M(\gamma_1) = M(\gamma_2)$  (Monodromiesatz). Bezeichnen wir also mit  $\pi_1(U, z_0)$  die Fundamentalgruppe von  $U$  mit Basispunkt  $z_0$ , d.h. die Gruppe der Homotopieklassen der Schleifen  $\gamma$  mit Basispunkt  $z_0$ , dann induziert die Abbildungsvorschrift  $\gamma \mapsto M(\gamma)$  einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi : \pi_1(U, z_0) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}), [\gamma] \mapsto M(\gamma).$$

Die Abbildung  $\phi$  heisst **Monodromie-Darstellung** der Differentialgleichung 2.68.

*Bemerkung 2.19.* Wir wollen ein paar Bemerkungen machen:

- (1) Wir bezeichnen das Bild der Fundamentalgruppe  $\pi_1(U, z_0)$  unter der Darstellung  $\phi$  als die **Monodromie-Gruppe** der Differentialgleichung 2.68. Die **projektive Monodromie-Gruppe** der Differentialgleichung ist definiert als das Bild der Monodromie-Gruppe unter der kanonischen Abbildung  $\text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ . Die projektive lineare Gruppe  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  entspricht gerade der Möbius-Gruppe (Menge der Möbius-Transformationen auf  $\mathbb{C}$ ).
- (2) Die Abbildung  $\phi$  hängt i.A. sowohl vom Punkt  $z_0$ , wie auch von den Lösungen  $u_1, u_2$  ab.
- (3) Wir bemerken noch, dass durch ändern der Lösungen  $u_1, u_2$  die entstehende Monodromie-Darstellung konjugiert zur ursprünglichen Monodromie-Darstellung ist. Dies gilt ebenso wenn wir den Punkt  $z_0$  ändern. Also bestimmt die Differentialgleichung 2.68 die Konjugationsklassen der Monodromie-Gruppe. Dies folgt direkt aus den Eigenschaften im letzten Abschnitt.

### 2.8.3 Die Monodromie-Darstellung der hypergeometrischen Gleichung und das Schwarz'sche Dreieck

Wir starten als Erinnerung mit der Definition der hypergeometrischen Gleichung

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (2.72)$$

$$\left[ (a+D)(b+D) - (c+D)(1+D) \frac{1}{z} \right] u = 0 \text{ mit } D := z \frac{d}{dz} \quad (2.73)$$

und wollen ein paar Punkte diskutieren. Im folgenden benutzen wir für diese auch die abkürzende Notation  $E(a, b; c)$ . Wir bemerken, dass Potenzfunktionen  $z^n$  die Eigenfunktionen des Operators  $D$  sind und damit eine Potenzreihe eine Entwicklung in Eigenfunktionen bezüglich des Operators  $D$  ist. Die zweite Darstellung der hypergeometrischen Gleichung verifiziert man leicht mit einer kleinen Rechnung, welche wir dem Leser überlassen.  $E(a, b; c)$  hat als singuläre Punkte  $z_0 = 0, 1, \infty$  und damit gibt es nach dem Cauchy'schen Fundamentalsatz für jede Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  zwei linear unabhängige holomorphe Lösungen und jede dieser Lösungen kann längs jedes Weges  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  analytisch fortgesetzt werden. Das Gesagte im letzten Abschnitt ist genauso hier gültig und wir verwenden dieselben Bezeichnungen. Wir betrachten nun ein Beispiel:

*Beispiel 2.6.* Wir wissen, dass die Gleichung  $E(a, b; c)$  in der Nähe von  $z = 0$  die folgenden zwei linear unabhängigen Lösungen

$$u_1(z) = F(a, b; c; z), \quad u_2(z) = z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$$

besitzt. Nun wollen wir die analytische Fortsetzung dieser zwei Lösungen entlang einer Schleife  $\gamma$  mit Basispunkt  $z_0$  in der Nähe vom Ursprung betrachten, wobei jedoch kein weiterer singulärer Punkt ausser dem Nullpunkt in  $\text{int}(\gamma)$  liegen soll. Offensichtlich gilt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} := \gamma_* \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(1-c)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken noch, dass die Lösung  $u_2$  nur dann definiert ist, wenn

$$2 - c \neq 0, -1, -2, \dots \Leftrightarrow c \neq 2, 3, 4, \dots$$

Wenn  $c = 1$  ist, dann ist die Funktion  $u_2$  zwar wohl-definiert, aber sie stimmt mit  $u_1$  überein. Also müssten wir eigentlich für  $c \in \mathbb{N}$  eine weitere Lösung finden, aber wir wollen dies nur für  $c = 1$  tun. Sei also  $c$  in eine Umgebung von 1, dann sind  $u_1$  und  $u_2$  wohl-definierte Lösungen und natürlich auch die folgende Linearkombination

$$\frac{z^{1-c} F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; z) - F(a, b; c; z)}{c - 1}.$$

Lassen wir  $c \rightarrow 1$  streben, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dc} z^{1-c} F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; z) \Big|_{c=1}.$$

Hierbei handelt es sich um eine Lösung mit einer logarithmischen Singularität im Ursprung und diese ist insbesondere unabhängig von der Lösung  $u_1$ .

Nun wollen wir die Lösungen um die Punkt  $z_0 = 1$  und  $z_0 = \infty$  studieren. Dazu machen wir zuerst die Transformation  $z \mapsto 1 - z$ . Damit ist gemeint: (1) Transformiere die Gleichung durch setzen von  $z = 1 - \xi$  und (2) ersetze in der resultierenden Gleichung  $\xi$  mit  $z$ . Offensichtlich ändern sich der erste und dritte Koeffizient der hypergeometrischen Gleichung nicht, jedoch der zweite wird zu

$$- [c - (a + b + 1)(1 - z)] = (a + b + 1 - c) - (a + b + 1)z.$$

Also erhalten wir wieder eine hypergeometrische Gleichung, jedoch diesmal mit Parametern  $a, b; a + b + 1 - c$ . Deshalb ausser wenn  $c - a - b$  ganzzahlig ist wie im letzten Abschnitt erhalten wir zwei Lösungen um  $z = 1$  und zwar:

$$\begin{aligned} & F(a, b; a + b + 1 - c; 1 - z) \\ & (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c + 1 - a - b; 1 - z). \end{aligned}$$

Wenn  $c - a - b = 0$ , sollte die zweite Lösungen wieder durch die folgende ersetzt werden:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(a, b; 1 - \epsilon; 1 - z) - (1 - z)^\epsilon F(\epsilon + b, \epsilon + a; \epsilon + 1; 1 - z)}{\epsilon}.$$

Nun betrachten wir die Transformation  $z \mapsto 1/z$ , wobei wir die hypergeometrische Gleichung ausgedrückt durch den Operator  $D$  verwenden. Beachte nun, dass unter dieser Transformation gilt:  $D \rightarrow -D$ . Damit wird die Gleichung zu

$$[(a - D)(b - D) - (c - D)(1 - D)z]u = 0.$$

Nun wollen wir schauen was die Wirkung dieses Operator auf  $z^a$  ist:

$$\begin{aligned} & [(a - D)(b - D) - (c - D)(1 - D)z]z^a \\ &= (-a + D)(-b + D)z^a - (-c + D)(-1 + D)z^{1+a} \\ &= - \left[ (-c + D)(-1 + D)z^{1+a} - (-a + D)(-b + D)z^{1+a} \frac{1}{z} \right] \\ &= -z^{1+a} \left[ (1 + a - c + D)(a + D) - (1 + D)(a - b + 1 + D) \frac{1}{z} \right]. \end{aligned}$$

Wir haben dabei  $Dz^s = z^s(s + D)$  verwendet. Vernachlässigen wir den Vorfaktor  $-z^{1+a}$ , so steht auf der rechten Seite gerade der hypergeometrische Operator mit den Parametern  $a, 1 + a - c, a - b + 1$  und damit sind die zwei Lösungen um  $z = \infty$

$$\begin{aligned} & \xi^a F(a, 1 + a - c; a - b + 1; \xi) \\ & \xi^b F(b, 1 + b - c; b - a + 1; \xi), \end{aligned}$$

ausser wenn  $a - b$  eine ganze Zahl ist und mit  $\xi = \frac{1}{z}$ . Für den Fall  $a = b$  müssen wir wieder analog zu oben vorgehen.

Bei den bisherigen Lösungen müssen wir etwas vorsichtig sein, denn die Potenzfunktionen sind nicht einwertige Funktionen. In der folgenden Diskussion nehmen wir zwei Fakten an:

- (1)  $a, b, c$  sind reell,
- (2)  $c, c - a - b, a - b$  sind keine ganzen Zahlen.

Nun definieren wir Zweige der sechs Lösungen um Wohl-Definiertheit zu erreichen:

$$f_{0,1} := F(a, b; c; z) \tag{2.74}$$

$$f_{0,2} := z^{1-c} F(a + 1 - c, b + 1 - c; 2 - c; z) \tag{2.75}$$

sind definiert auf der Menge  $\mathbb{C} \setminus [(-\infty, 0] \cup [1, \infty)]$  und wie man sich leicht überzeugt reell-wertig auf dem offenen Einheitsintervall  $(0, 1)$ .

$$f_{1,1} := F(a, b; a + b + 1 - c; 1 - z) \tag{2.76}$$

$$f_{1,2} := (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c + 1 - a - b; 1 - z) \tag{2.77}$$

sind definiert in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$  und reell-wertig auf  $(1, \infty)$ .

$$f_{\infty,1} := (-1/z)^a F(a, 1 + a - c; a - b + 1; 1/z) \quad (2.78)$$

$$f_{\infty,2} := (-1/z)^b F(b, 1 + b - c; b - a + 1; 1/z) \quad (2.79)$$

sind definiert in der Menge  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  und sind reell-wertig auf  $(-\infty, 0)$ .

Beachte, dass wir dabei die analytisch fortgesetzten Funktionen mit  $f_{\alpha,\beta}$  bezeichnen und das Lemma 2.10 verwendeten. Wir wollen nun auch die Werte  $1 - c = 0$ ,  $c - a - b = 0$  und  $a - b = 0$  betrachten, deshalb redefinieren wir die jeweils zweiten Funktionen wie folgt durch Grenzwertprozesse:

$$f_{0,2} := \lim_{c \rightarrow 1} \frac{f_{0,1}(a, b, c) - f_{0,2}(a, b, c)}{1 - c} \quad (2.80)$$

$$f_{1,2} := \lim_{c - a - b \rightarrow 0} \frac{f_{1,1}(a, b, c) - f_{1,2}(a, b, c)}{c - a - b} \quad (2.81)$$

$$f_{\infty,2} := \lim_{a \rightarrow b} \frac{f_{\infty,1}(a, b, c) - f_{\infty,2}(a, b, c)}{a - b}. \quad (2.82)$$

Damit haben wir nun linear unabhängige Lösungen in drei einfach zusammenhängenden Gebieten konstruiert. Da die hypergeometrische Gleichung eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung ist, sind die sechs Lösungen in einem gemeinsamen Definitionsbereich, wie der oberen Halbebene ( $X_+ := \mathbb{H}$ ), durch eine lineare Transformation verknüpft, d.h. es gibt Matrizen  $M_+^{1,0}, M_+^{\infty,0} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  mit

$$(f_{0,1}, f_{0,2}) = M_+^{1,0} (f_{1,1}, f_{1,2}) \quad (2.83)$$

$$(f_{0,1}, f_{0,2}) = M_+^{\infty,0} (f_{\infty,1}, f_{\infty,2}). \quad (2.84)$$

In der Tat sind die Matrizen  $M_+^{\alpha,\beta}$  explizit bekannt, jedoch wollen wir nicht weiter darauf eingehen.

Wir betrachten nun nach H.A. Schwarz die folgende Abbildung

$$f_0 : X_+ \rightarrow \mathbb{P}^1 := \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{f_{0,1}(z)}{f_{0,2}(z)}, \quad (2.85)$$

welche wir **Schwarz'sche Abbildung** nennen wollen. Cauchy's Fundamentalsatz sagt uns nun, dass die linear unabhängigen Lösungen  $f_{0,1}$  und  $f_{0,2}$  für keinen Punkt in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  gleichzeitig verschwinden. Wir fragen uns nun wie das Bild  $f_0(X_+)$  aussieht. Da nun  $f_0$  auf dem Intervall  $(0, 1)$  reell-wertig ist, ist das Intervall  $(f_0(0), f_0(1))$  einen Teil des Randes des Bildes. Analog bildet die Abbildung

$$f_1 : X_+ \rightarrow \mathbb{P}^1, z \mapsto \frac{f_{1,1}(z)}{f_{1,2}(z)} \quad (2.86)$$

das Intervall  $(1, \infty)$  auf das Intervall  $(f_1(1), f_1(\infty))$  ab und eine analoge Aussage stimmt für die Abbildung

$$f_\infty : X_+ \rightarrow \mathbb{P}^1, z \mapsto \frac{f_{\infty,1}(z)}{f_{\infty,2}(z)}. \quad (2.87)$$

Andererseits ist bekannt, dass durch linear gebrochene Transformationen Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden (Geraden sind Kreise, die durch den Punkt  $\infty$  gehen) abgebildet werden. Da  $f_0, f_1$  und  $f_\infty$  durch Möbius-Transformationen verknüpft sind, können wir schliessen, dass das Bild von  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$  unter  $f_0$  der Rand eines Dreiecks ist mit Kreissegmenten als "Randstrecken". Dieses Dreieck wird **Schwarz'sches Dreieck** genannt. Da wir das lokale Verhalten um die drei singulären Punkte bereits kennen, können wir ohne weiteres die Winkel bestimmen

$$\begin{aligned} \pi|1 - c|, & \text{ im Punkt } f(0) \\ \pi|c - a - b|, & \text{ im Punkt } f(1) \\ \pi|a - b|, & \text{ im Punkt } f(\infty), \end{aligned}$$

denn die Schwarz'schen Abbildungen sind regulär jeweils um die Punkte  $\{0, 1, \infty\}$  und es gilt

$$\begin{aligned} f_0(z) &= z^{1-c}(1 + O(z)) \\ f_1(z) &= (1 - z)^{c-a-b}(1 + O(1 - z)) \\ f_\infty(z) &= z^{a-b}(1 + O(1/z)). \end{aligned}$$

Ein verschwindender Winkel bedeutet nun, dass die zwei fraglichen Kreissegmente im betrachteten Punkt tangential sind, weshalb wir die Funktionen derart modifiziert haben. Damit erhalten wir

**Korollar 2.5.** Wenn die Winkel die Bedingung

$$0 < |1 - c|, |c - a - b|, |a - b| < 1$$

erfüllen, dann bildet  $f$  die obere Halbebene  $X_+$  bijektiv auf das Schwarz'sche Dreieck ab.

Denn in diesem Fall handelt es sich in der Tat bei  $f, f_1, f_\infty$  um konforme Abbildungen.

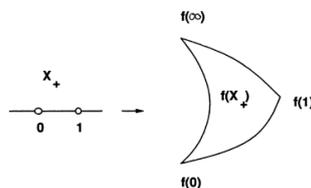


Abbildung 11: Schwarz'sches Dreieck mit  $f = f_0$

## 2.9 Kettenbrüche in der Funktionentheorie

### 2.9.1 Nachbarschafts-Relationen und ein Einblick in unendliche Kettenbrüche

Die folgenden Funktionen  $F(a \pm 1, b; c; z)$ ,  $F(a, b \pm 1; c; z)$ ,  $F(a, b; c \pm 1; z)$  heißen **benachbarte Funktionen** von  $F(a, b; c; z)$ . Zwischen  $F(a, b; c; z)$  und zwei benachbarten Funktionen existieren jeweils lineare Relationen, die wir naheliegenderweise **Nachbarschafts-Relationen** nennen wollen. In den Nachbarschafts-Relationen sind die Koeffizienten entweder linear in  $z$  oder konstant.

**Lemma 2.11.** Es gelten die folgenden zwei Nachbarschafts-Relationen:

$$F(a, b; c; z) = F(a, b + 1; c + 1, z) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} z F(a + 1, b + 1; c + 2; z) \quad (2.88)$$

$$F(a, b; c; z) = F(a + 1, b; c + 1, z) - \frac{b(c-a)}{c(c+1)} z F(a + 1, b + 1; c + 2; z) \quad (2.89)$$

*Beweis.* Wir beweisen nur die erste Relation und die zweite folgt durch die Vertauschung  $a \leftrightarrow b$ . Wir haben für  $0 \leq |z| < 1$  die konvergente Reihendarstellung der hypergeometrischen Funktion. Es reicht wenn wir die generischen Koeffizienten vergleichen:

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} &= \frac{(a)_n (b+1)_n}{(c+1)_n n!} - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} \frac{(a+1)_{n-1} (b+1)_{n-1}}{(c+2)_{n-1} (n-1)!} \text{ für } n \geq 1 \Leftrightarrow \\ \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} &= (a)_n \frac{(b+1)_n}{(c+1)_n} - n(c-b) (a)_n \frac{(b+1)_{n-1}}{(c+1)_{n+1}} \Leftrightarrow \\ \frac{b(b+1)_{n-1}}{c(c+1)_{n-1}} &= \frac{(b+1)_{n-1} (b+n)}{(c+1)_{n-1} (c+n)} - n(c-b) \frac{(b+1)_{n-1}}{(c+n)c(c+1)_{n-1}} \Leftrightarrow \\ \frac{b}{c} &= \frac{b+n}{c+n} - n \frac{c-b}{c(c+n)} \Leftrightarrow \\ b(c+n) &= (b+n)c - n(c-b). \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.12.** Analog gelten für die konfluente hypergeometrische Funktion die zwei folgenden Gleichungen:

$$F(a, c; z) = F(a, c + 1; z) + \frac{az}{c(c+1)} F(a + 1, c + 2; z) \quad (2.90)$$

$$F(a, c; z) = F(a + 1, c + 1; z) + \frac{a-c}{c(c+1)} z F(a + 1, c + 2; z) \quad (2.91)$$

*Beweis.* Selbe Rechnung wie oben oder beachte, dass  $F(a, c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b; c; \frac{z}{b})$ . □

Schlussendlich machen wir noch die folgende Definition

**Definition 2.15.**

$$F(a; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{n!} z^n. \quad (2.92)$$

**Lemma 2.13.** Es gilt für diese neue Funktion die folgende Nachbarschafts-Relation:

$$F(a, z) = F(a + 1; z) + \frac{z}{a(a + 1)} F(a + 2; z). \quad (2.93)$$

Nun wollen wir nach weiteren Relationen zwischen benachbarten Funktionen suchen. Dazu führen wir das Konzept eines unendlichen Kettenbruchs ein:

**Definition 2.16.** Unter einem (unendlichen) **Kettenbruch** verstehen wir einen mathematischen Ausdruck der Gestalt

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots}}} \quad (2.94)$$

und benutzen für diesen eine der zwei folgenden abkürzenden Schreibweisen

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots = b_0 + \mathbf{K}_{l \geq 1} \frac{a_l}{|b_l|}. \quad (2.95)$$

Die zweite gebräuchliche Notation geht auf Carl Friedrich Gauss zurück und veranschaulicht besonders die Analogie zu (unendlichen) Reihen und Produkten. Die  $a_k, b_k$  heissen die **Elemente** des Kettenbruchs, insbesondere heisst  $b_0$  das **Anfangsglied** des Kettenbruchs. Gilt  $b_0 = 0$  so lässt man es bei der Darstellung einfach weg. Weiter nennen wir  $\frac{a_k}{|b_k|}$  den **k-ten Teilbruch** oder das **k-te Glied** des Kettenbruchs. Die Elemente  $a_k$  und  $b_k$  heissen auch **k-ter Teilzähler** und **k-ter Teilnenner**. Desweiteren verstehen wir unter dem **Näherungsbruch n-ter Ordnung** den Ausdruck

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|} = b_0 + \mathbf{K}_{1 \leq l \leq n} \frac{a_l}{|b_l|}. \quad (2.96)$$

In dieser Definition eines unendlichen Kettenbruchs denken wir uns unter den Symbolen  $a_k, b_k$  nicht numerische Zahlenwerte, sondern irgendwelche Unbestimmten, so dass der Ausdruck sinnvoll ist. Wir werden uns zu einem späteren Zeitpunkt genauer darum kümmern wann ein unendlicher Kettenbruch überhaupt sinnvoll ist. Offenbar ist dann der Näherungsbruch  $n$ -ter Ordnung eine rationale Funktion dieser Unbestimmten und wie wir noch sehen werden, lässt sich dieser als "einfacher Bruch" schreiben (für kleine  $n$  überzeugt man sich leicht davon).

**Satz 2.19.** Wir betrachten den Näherungsbruch  $n$ -ter Ordnung

$$Q_n := b_0 + \mathbf{K}_{1 \leq l \leq n} \frac{a_l}{|b_l|}.$$

Wie bereits angemerkt lässt sich jeder Näherungsbruch als "normaler" Bruch  $Q_n = \frac{A_n}{B_n}$  schreiben, wobei  $A_n$  **Näherungszähler** und  $B_n$  **Näherungsnenner** der Ordnung  $n$  heissen. Genauer gelten die folgenden rekursiven Darstellung für  $n = 0, 1, \dots$  ( $a_0 = 1$ )

$$Q_n = \frac{A_n}{B_n} \text{ mit } \begin{cases} A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}; & A_{-2} = 0, A_{-1} = 1 \\ B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}; & B_{-2} = 1, B_{-1} = 0 \end{cases}$$

$$[A, B]_{n, n-1} := A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n.$$

*Beweis.* (Induktionsbeweis)

Wir wollen zuerst aus instruktiven Gründen die Fälle  $n = 0, 1, 2$  explizit ausrechnen:

$$Q_0 = b_0 = \frac{b_0}{1} \stackrel{!}{=} \frac{A_0}{B_0}$$

$$Q_1 = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} \stackrel{!}{=} \frac{A_1}{B_1}$$

$$Q_2 = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}$$

$$= \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} \stackrel{!}{=} \frac{A_2}{B_2}$$

Durch Einsetzen von  $n = 0, 1, 2$  in die behaupteten Gleichungen des Satzes sieht man, dass die berechneten Näherungsnenner und Näherungszähler mit denen von der ersten Gleichung übereinstimmen und die zweite Gleichung erfüllen. Nun nehmen wir an, dass die zwei Gleichungen bis zu einem Index  $n$  gelten und folgern, dass sie dann auch für den Index  $n + 1$  richtig sind.

$$Q_{n+1} = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \cdots + \frac{a_n}{|b_n|} + \frac{a_{n+1}}{|b_{n+1}|}$$

$$\stackrel{(a)}{=} b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \cdots + \frac{a_n}{|b'_n|}$$

$$= \frac{b'_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}}{b'_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}}$$

$$= \frac{\left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) A_{n-1} + a_n A_{n-2}}{\left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) B_{n-1} + a_n B_{n-2}}$$

$$= \frac{(b_n b_{n+1} + a_{n+1}) A_{n-1} + a_n b_{n+1} A_{n-2}}{(b_n b_{n+1} + a_{n+1}) B_{n-1} + a_n b_{n+1} B_{n-2}}$$

$$= \frac{b_{n+1} (b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}) + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1} (b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}) + a_{n+1} B_{n-2}}$$

$$= \frac{b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-2}}$$

$$= \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}.$$

Wir setzen in (a)  $b'_n := b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$  und dann konnten wir die üblichen Formeln verwenden. Für die zweite Gleichung können wir nun die eben hergeleitete Relation verwenden:

$$\begin{aligned} [A, B]_{n+1, n} &= A_{n+1}B_n - B_{n+1}A_n \\ &= (b_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1})B_n - (b_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1})A_n \\ &= -a_{n+1}(A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n) \\ &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n+1} a_i. \end{aligned}$$

□

In der Tat ermöglicht uns dieser Satz auch rein praktisch endliche Kettenbrüche mit numerischen Werten auszurechnen (heute ev. weniger relevant als früher).

Die folgende Definition sagt uns wie wir unendliche Kettenbrüche explizit berechnen können. Man beachte die starke Analogie zur Theorie der Reihen.

**Definition 2.17.** Seien  $a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, \dots$  komplexe Zahlenfolgen. Wir sagen, dass der unendliche Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \dots = b_0 + \mathbf{K}_{l \geq 1} \frac{a_l}{|b_l|}$$

**konvergent** ist, wenn der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} =: \xi$  existiert. Wenn dieser nicht existiert, so nennen wir den unendlichen Kettenbruch **divergent**. Falls  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_k}{A_k} = 0$  gilt, dann nennen wir den Kettenbruch *unwesentlich divergent* und alle anderen *wesentlich divergent*. Desweiteren nennen wir die Grösse  $\frac{A_n}{B_n}$  *sinnlos*, wenn  $B_n = 0$  gilt. Es ist aber zu beachten, dass solange die Anzahl von sinnlosen Näherungsbrüchen  $\frac{A_k}{B_k}$  endlich ist trotzdem der Grenzwert existieren kann, denn dass dieser existieren kann, müssen die Näherungsbrüche nur ab einem hinreichend grossen Index  $n_0$  sinnvoll sein.

*Bemerkung 2.20.* Wir bemerken, dass es wie für Reihen sehr viele verschiedene Konvergenzkriterien gibt, da wir aber primär an Kettenbrüchen interessiert sind in welchen die Elemente  $a_k, b_k$  analytische Funktionen sind, wollen wir hier nicht weiter darauf eingehen.

Nun wollen wir noch das Konzept von "äquivalenten Kettenbrüchen" einführen. Dazu betrachten wir die folgenden zwei möglicherweise unendlichen Kettenbrüche

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \dots + \frac{a_k}{|b_k|} + \dots \quad (2.97)$$

und

$$\rho_0 b_0 + \frac{\rho_0 \rho_1 a_1}{|\rho_1 b_1|} + \dots + \frac{\rho_{k-1} \rho_k a_k}{|\rho_k b_k|} + \dots, \quad (2.98)$$

wobei für alle Indizes  $i$   $\rho_i \neq 0$  gelten soll. Für den ersten Kettenbruch bezeichnen wir den  $k$ -ten Näherungszähler und Nenner mit  $A_k, B_k$  und für den zweiten Kettenbruch mit  $C_k, D_k$ .

**Behauptung 2.9.** Zwischen den Näherungszähler und Nenner der zwei Kettenbrüche besteht die folgende Relation

$$C_k = \rho_0 \rho_1 \cdots \rho_k A_k, \quad D_k = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k B_k, \quad (2.99)$$

wobei  $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, B_{-2} = 1, B_{-1} = 0$  und genauso  $C_{-2} = 0, C_{-1} = 1, D_{-2} = 1, D_{-1} = 0$ .

*Beweis.* (Induktionsbeweis)

Aus dem Beweis des Satzes 2.19 sehen wir für  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= b_0 b_1 + a_1, \quad B_1 = b_1 \\ C_1 &= \rho_0 \rho_1 (b_0 b_1 + a_1), \quad D_1 = \rho_1 b_1. \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, dass die Aussage bis zu einem Index  $k$  wahr ist. Es folgt mit dem Satz 2.19:

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \rho_{k+1} b_{k+1} C_k + \rho_k \rho_{k+1} a_{k+1} C_{k-1} \\ &= \rho_0 \cdots \rho_{k+1} \underbrace{(b_{k+1} A_k + a_{k+1} A_{k-1})}_{=A_{k+1}}. \end{aligned}$$

Analog für  $D_{k+1}$ . □

Da alle  $\rho_i$  ungleich Null sind, ist  $B_k$  genau dann null bzw. ungleich null wenn  $D_k$  verschwindet bzw. nicht verschwindet. Deshalb gilt für  $B_k \neq 0$  die Formel

$$\frac{C_k}{D_k} = \rho_0 \frac{A_k}{B_k}. \quad (2.100)$$

**Behauptung 2.10.** Erfüllen im Kettenbruch 2.97 die Zählerelemente  $a_k \neq 0$  für alle  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dann hat jeder weitere Kettenbruch mit dem Näherungsbruch  $\frac{P_k}{Q_k} = \rho_0 \frac{A_k}{B_k}$  notwendigerweise die Form des Kettenbruchs 2.98.

*Beweis.* Wir nehmen an, dass der Kettenbruch die Form

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1} + \cdots$$

hat und nennen den Näherungszähler  $P_k$  bzw. den Nenner  $Q_k$ . Natürlich erfüllt dieser wieder den Satz 2.19. Da für  $k \geq 0$  gilt  $\frac{P_k}{Q_k} = \rho_0 \frac{A_k}{B_k}$ , können wir schreiben

$$P_k = \rho_0 g_k A_k, \quad Q_k = g_k B_k \quad \text{mit } g_k \neq 0.$$

Für  $k = 0$  folgt insbesondere  $g_0 = 1, q_0 = \rho_0 b_0$ . Setzen wir nun noch  $\frac{q_k}{g_{k-1}} = \rho_k$ , also  $g_k = \rho_1 \cdots \rho_k$ , so erhalten wir

$$P_k = \rho_0 \cdots \rho_k A_k, \quad \rho_0 Q_k = \rho_0 \rho_1 \cdots \rho_k B_k.$$

Deshalb werden die zwei Rekursionsformeln für  $P_k, Q_k$  zu

$$A_k = \frac{q_k}{\rho_k} A_{k-1} + \frac{p_k}{\rho_{k-1} \rho_k} A_{k-2}, \quad B_k = \frac{q_k}{\rho_k} B_{k-1} + \frac{p_k}{\rho_{k-1} \rho_k} B_{k-2}.$$

Da aber die Rekursionsformeln aus Satz 2.19 auch für  $A_k, B_k$  gelten und  $[A, B]_{k-1, k-2} = (-1)^{k-1} a_1 \cdots a_{k-1} \neq 0$  sind die Grössen  $a_k, b_k$  durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt und wir erhalten

$$\frac{q_k}{\rho_k} = b_k, \quad \frac{p_k}{\rho_{k-1} \rho_k} = a_k.$$

□

Insbesondere folgt aus der Gleichung 2.100 der folgende Satz:

**Satz 2.20.** Seien zwei Kettenbrüche der Form 2.97 und 2.98 gegeben, wobei  $\rho_k \neq 0$  für alle  $k$  gelten soll. Dann konvergiert der eine Kettenbruch genau dann wenn der andere Kettenbruch konvergiert und der numerische Wert des zweiten Kettenbruchs entspricht genau dem  $\rho_0$ -fachen des ersten.

Am wichtigsten ist der Fall  $\rho_0 = 1$  und für diesen machen wir die folgende Definition:

**Definition 2.18.** Wir nennen zwei Kettenbrüche **äquivalent**, wenn sie von der Form 2.97 bzw. 2.98 sind und  $\rho_0 = 1$  gilt.

Dieser Begriff besitzt ganz offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

- (1) Jeder Kettenbruch ist mit sich selbst äquivalent. (Reflexivität)
- (2) Ist ein Kettenbruch mit einem zweiten äquivalent, so ist auch der zweite mit dem ersten äquivalent. (Symmetrie)
- (3) Sind zwei Kettenbrüche mit einem dritten äquivalent, so sind sie auch miteinander äquivalent. (Transitivität)

Aus der Gleichung 2.100 und den daran anschliessenden Ausführungen für  $\rho_0 = 1$  erhalten wir den wichtigen Satz:

**Satz 2.21.** Zwei äquivalente Kettenbrüche haben die gleiche Serie von Näherungsbrüchen, wobei auch ein sinnloser Näherungsbruch des einen ein ebensolcher des anderen entspricht. Und umgekehrt sind zwei Kettenbrüche mit der gleichen Serie von Näherungsbrüchen, sofern die Teilzähler von Null verschieden sind, stets äquivalent.

Aus diesem Grund kann jeder Kettenbruch, wenn wir an der Konvergenz oder seines Wertes interessiert sind, durch einen äquivalenten Kettenbruch ersetzt werden. Beispielsweise sind die folgenden zwei Kettenbrüche äquivalent

$$\frac{b_1|}{|b_1|} + \frac{b_2|}{|b_2|} + \frac{b_3|}{|b_3|} + \dots = \frac{b_0|}{|b_0|} + \frac{b_0|}{|b_1|} + \frac{b_1|}{|b_2|} + \dots,$$

wenn alle  $b_k \neq 0$  sind, denn den zweiten erhalten wir durch  $\rho_k = \frac{b_{k-1}}{b_k}$  für  $k \geq 1$  aus dem ersten.

Die Transformation in einen äquivalenten Kettenbruch sind vor allem in den folgenden drei Fällen von Interesse:

- (i) Wenn die Elemente des betrachteten Kettenbruchs rationale Zahlen/Funktionen sind und wir diese eliminieren wollen:

$$b_0 + \frac{\frac{\alpha_1|}{\gamma_1|}}{\frac{|\beta_1|}{\gamma_1}} + \dots = b_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1|} + \frac{\gamma_1\alpha_2|}{|\beta_2|} + \dots + \frac{\gamma_{k-1}\alpha_k|}{|\beta_k|} + \dots. \quad (2.101)$$

Oder etwas allgemeiner:

$$b_0 + \frac{\frac{\alpha_1|}{\gamma_1|}}{\frac{|\beta_1|}{\delta_1}} + \dots = b_0 + \frac{\delta_1\alpha_1|}{|\gamma_1\beta_1|} + \frac{\gamma_1\delta_1\delta_2\alpha_2|}{|\gamma_2\beta_2|} + \dots + \frac{\gamma_{k-1}\delta_{k-1}\delta_k\alpha_k|}{|\gamma_k\beta_k|} + \dots. \quad (2.102)$$

- (ii) Wenn alle  $b_k \neq 0$  sind, so können wir die Teilnenner auf 1 normieren:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \dots + \frac{a_k|}{|b_k|} + \dots = b_0 + \frac{a_1|}{1} + \frac{\frac{a_2|}{b_1 b_2|}}{|1|} + \dots + \frac{\frac{a_k|}{b_{k-1} b_k|}}{|1|} + \dots \quad (2.103)$$

- (iii) Wenn alle  $a_k \neq 0$  sind, so können wir die Teilzähler auf 1 normieren:

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \dots + \frac{a_{2k}|}{|b_{2k}|} + \frac{a_{2k+1}|}{|b_{2k+1}|} + \dots &= b_0 + \frac{1|}{\frac{b_1|}{a_1}} + \frac{1|}{\frac{a_1|}{a_2 b_2}} \\ &+ \dots + \frac{1|}{\frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} b_{2k}} + \frac{1|}{\frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_1 a_3 \dots a_{2k+1}} b_{2k+1}} + \dots. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Nun wollen wir eine Bemerkung machen die einerseits wieder etwas mehr mit Funktionentheorie zu tun hat und andererseits benötigen wir sie im gleich folgenden Satz von Gauss und zwar um Quotienten von benachbarten hypergeometrischen Funktionen durch unendliche Kettenbrüche auszudrücken.

*Bemerkung 2.21.* Seien  $f_0, f_1, \dots$  analytische Funktionen in der Nähe von  $z = 0$  mit  $f_i(0) \neq 0$  für  $i = 1, 2, \dots$ . Gibt es Konstanten  $k_i \in \mathbb{C}$ , so dass  $f_{i-1} = f_i + k_i z f_{i+1}$ , dann haben wir für  $g_i := \frac{f_i}{f_{i-1}}$  die Gleichung

$$g_i = \frac{1}{1 + k_i z g_{i+1}}.$$

Im Speziellen erhalten wir für  $i = 1$  die Gleichung

$$g_1 = \frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{1 + k_1 z g_2} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 z}{1 + k_2 z g_3}} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 z}{1 + \frac{k_2 z}{1 + k_3 z g_4}}} = \frac{1}{|1| + \frac{|k_1 z|}{|1|} + \frac{|k_2 z|}{|1|} + \dots}$$

Also haben wir rein formal einen unendlichen Kettenbruch für die Funktion  $g_1$  erhalten. Da nun die linke Seite für  $z = 0$  keinen divergenten Ausdruck darstellt und Nullstellen von analytischen Funktionen isoliert sind, gibt es eine offene Umgebung um  $z = 0$  in welcher  $f_1/f_0$  eine analytische Funktion darstellt und damit in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Die hergeleitete Relation ist sicherlich dann sinnvoll, wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die abgebrochene Taylor-Entwicklung der Ordnung  $n$  mit dem  $n$ -ten Näherungsbruch im Durchschnitt ihrer Konvergenzgebiete übereinstimmt.

**Satz 2.22.** (Gauss)

Nach Gauss gelten für die hypergeometrische Funktion  $F(a, b; c; z)$  und deren Derivate die folgenden Identitäten:

(1) Wenn  $z \in \mathbb{C}$  und  $a \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$  dann haben wir

$$\frac{F(a+1; z)}{F(a; z)} = \frac{|a|}{|a|} + \frac{|z|}{|a+1|} + \frac{|z|}{|a+2|} + \dots, \quad (2.105)$$

wobei  $F(a; z) = \sum \frac{(a)_n}{n!} z^n$ .

(2) Wenn  $z \in \mathbb{C}$  und  $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$  dann haben wir die zwei Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{F(a+1; c+1; z)}{F(a; c; z)} &= \frac{|c|}{|c|} + \frac{(a-c)|z|}{|c+1|} + \frac{(a+1)|z|}{|c+2|} + \frac{(a-c-1)|z|}{|c+3|} \\ &+ \frac{(a+2)|z|}{|c+4|} + \frac{(a-c-2)|z|}{|c+5|} + \dots \end{aligned} \quad (2.106)$$

und

$$\frac{F(a; c+1; z)}{F(a; c; z)} = \frac{|c|}{|c|} + \frac{|az|}{|c+1|} + \frac{(a-c-1)|z|}{|c+2|} \quad (2.107)$$

$$+ \frac{(a+1)|z|}{|c+3|} + \frac{(a-c-2)|z|}{c+4} + \dots \quad (2.108)$$

(3) Wenn  $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  und  $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$  dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{F(a+1, b; c+1; z)}{F(a, b; c; z)} &= \frac{|c|}{|c|} + \frac{(a-c)bz|}{|c+1|} + \frac{(b-c-1)(a+1)|z|}{c+2} \\ &+ \frac{(a-c-1)(b+1)|z|}{|c+3|} + \frac{(b-c-2)(a+2)|z|}{|c+4|} + \dots \end{aligned} \quad (2.109)$$

*Beweis.* (1) Nach Lemma 2.13 wissen wir

$$F(a-1; z) - F(a; z) = \frac{z}{a(a-1)} F(a+1; z).$$

Wir setzen nun  $f_i = F(a+i; z)$ ,  $k_i = \frac{1}{(a+i)(a+i-1)}$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{F(a+1; z)}{F(a; z)} &= \frac{1}{|1|} + \frac{\frac{z}{a(a+1)}|}{|1|} + \frac{\frac{z}{(a+1)(a+2)}|}{|1|} + \frac{\frac{z}{(a+2)(a+3)}|}{|1|} + \dots \\ &\equiv \frac{a}{|a|} + \frac{|z|}{|a+1|} + \frac{|z|}{|a+2|} + \frac{|z|}{|a+3|} + \dots \end{aligned}$$

Wir haben für die Äquivalenz die Transformation 2.103 verwendet.

(2) Wir wissen bereits, dass die folgenden zwei Identitäten gelten:

$$\begin{aligned} F(a; c; z) - F(a; c+1; z) &= \frac{az}{c(c+1)} F(a+1; c+2; z) \\ F(a; c; z) - F(a+1; c+1; z) &= \frac{a-c}{c(c+1)} z F(a+1; c+2; z). \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} f_0(z) &:= F(a; c; z) \\ f_1(z) &:= F(a+1; c+1; z) \\ f_2(z) &:= F(a+1; c+2; z) \\ f_3(z) &:= F(a+2; c+3; z) \\ f_4(z) &:= F(a+2; c+4; z) \\ f_5(z) &:= \dots \end{aligned}$$

Das Schema ist das folgende:  $a, c$  um eins erhöhen,  $c$  um eins erhöhen,  $a, c$  um eins erhöhen,  $c$  um eins erhöhen etc. Wir sehen

$$f_{i-1} - f_i = k_i z f_{i+1} \text{ mit } \begin{cases} k_1 = \frac{a-c}{c(c+1)} \\ k_2 = \frac{a+1}{(c+1)(c+2)} \\ k_3 = \frac{a-c-1}{(c+2)(c+3)} \\ k_4 = \frac{a+2}{(c+3)(c+4)}. \end{cases}$$

Damit folgt

$$\frac{F(a+1; c+1; z)}{F(a; c; z)} = \frac{1}{|1|} + \frac{\frac{az}{c(c+1)}|}{|1|} + \frac{\frac{(a-c-1)z}{(c+1)(c+2)}|}{|1|} + \frac{\frac{(a+1)z}{(c+2)(c+3)}|}{|1|} + \dots$$

Benutzen wir wieder die obige Transformation, so erhalten wir den gewünschten Ausdruck. Den Beweis für die zweite Formel verläuft analog.

(3) Wir benutzen die folgenden zwei bekannten Identitäten

$$F(a, b; c; z) - F(a, b + 1; c + 1; z) = -\frac{a(c-b)z}{c(c+1)} F(a+1, b+1; c+2; z)$$

$$F(a, b; c; z) - F(a+1, b; c+1; z) = -\frac{b(c-a)z}{c(c+1)} F(a+1, b+1; c+1; z).$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} f_0(z) &:= F(a, b; c; z) \\ f_1(z) &:= F(a+1, b; c+1; z) \\ f_2(z) &:= F(a+1, b+1; c+2; z) \\ f_3(z) &:= F(a+2, b+1; c+3; z) \\ f_4(z) &:= F(a+2, b+2; c+4; z) \\ f_5(z) &:= \dots \end{aligned}$$

Wir sehen

$$f_{i-1} - f_i = k_i z f_{i+1} \text{ mit } \begin{cases} k_1 = \frac{(a-c)b}{c(c+1)} \\ k_2 = \frac{(b-c-1)(a+1)}{(c+1)(c+2)} \\ k_3 = \frac{(a-c-1)(b+1)}{(c+2)(c+3)} \\ k_4 = \frac{(b-c-2)(a+2)}{(c+3)(c+4)}. \end{cases}$$

Nun folgt wieder durch einfaches Einsetzen die gewünschte Formel. □

*Anwendungen:*

(1) Da  $F(0; c; z) = 1$  haben wir für  $a = 0, c + 1 = \gamma$  die Formel

$$\begin{aligned} F(1; \gamma; z) &= \frac{\gamma-1}{|\gamma-1|} + \frac{-(\gamma-1)z}{|\gamma|} + \frac{z}{|\gamma+1|} + \frac{-\gamma z}{|\gamma+2|} + \frac{2z}{|\gamma+3|} + \dots \\ &= \frac{1}{|1|} + \frac{-z}{|\gamma|} + \frac{z}{|\gamma+1|} + \frac{-\gamma z}{|\gamma+2|} + \dots \end{aligned}$$

(2) Nun betrachten wir den Spezialfall  $F(1; 1; z) = e^z$ . Einerseits haben wir die Darstellung

$$e^z = \frac{1}{|1|} + \frac{-z}{|1|} + \frac{z}{|2|} + \frac{-z}{|3|} + \frac{2z}{|4|} + \frac{-2z}{|5|} + \dots$$

Andererseits durch die Vertauschung  $z \leftrightarrow -z$  und  $e^z = \frac{1}{e^{-z}}$  haben wir die Darstellung

$$e^z = 1 + \frac{z}{|1|} + \frac{-z}{|2|} + \frac{z}{|3|} + \frac{-2z}{|4|} + \dots$$

## 2.9.2 Äquivalenz zwischen Reihen und Kettenbrüchen\*

**Definition 2.19.** Wir nennen eine Reihe  $c_0 + c_1 + \dots$  und einen Kettenbruch  $b_0 + \mathbf{K} \frac{a_l}{|b_l|}$  **äquivalent** (schreiben dafür  $\equiv$ ), wenn die Relationen

$$c_0 + \dots + c_m = b_0 + \mathbf{K} \frac{a_l}{|b_l|} \quad (2.110)$$

für alle  $m$  gelten. Dabei können Reihe und Kettenbruch beide unendlich oder endlich sein, wobei im zweiten Fall dieselbe Anzahl Glieder vorliegen muss.

Nach dieser Definition gibt es zu einem Kettenbruch jedenfalls nur dann eine äquivalente Reihe, wenn er keine sinnlosen Näherungsbrüche hat. Hat ein Kettenbruch keine sinnlosen Näherungsbrüche, dann gibt es in der Tat *nur eine* äquivalente Reihe, denn ihre Glieder ergeben sich eindeutig aus der Gleichung 2.110 und zwar:

$$c_0 = \frac{A_0}{B_0} = b_0, \quad c_k = \frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{a_1 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k}.$$

Sind nun alle Teilzähler  $a_k \neq 0$ , so sind auch alle Reihenglieder  $c_k \neq 0$  für  $k \geq 1$ . Es ergibt sich damit

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots \equiv b_0 + \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} \mp \dots$$

Umgekehrt ist jede Reihe, deren Glieder, vom ersten abgesehen, ungleich Null sind, unendlich vielen Kettenbrüchen äquivalent, die aber alle untereinander ebenfalls äquivalent sind. Um dies zu sehen benötigen wir den folgenden Satz:

**Satz 2.23.** Seien  $\{S_n\}_{n=0}^\infty, \{T_n\}_{n=0}^\infty$  zwei Folgen mit  $T_0 = 1$  und gilt  $[S, T]_{k, k-1} \neq 0$ , dann gibt es genau einen Kettenbruch

$$t_0 + \frac{s_1}{|t_1|} + \frac{s_2}{|t_2|} + \frac{s_3}{|t_3|} + \dots,$$

dessen Näherungszähler und Näherungsnenner gerade mit  $S_k$  und  $T_k$  übereinstimmen. Die Elemente des Kettenbruches berechnet sich gemäss den Formeln

$$t_0 = S_0; \quad t_1 = T_1, \quad s_1 = [S, T]_{1,0}; \quad s_k = \frac{[S, T]_{k-1,k}}{[S, T]_{k-1,k-2}}, \quad t_k = \frac{[S, T]_{k,k-2}}{[S, T]_{k-2,k-1}}.$$

*Beweis.* Zuerst eine Bemerkung: Würde die Ungleichung  $[S, T]_{k, k-1} \neq 0$  für einen fixen Index  $k$  nicht gelten, dann müsste es wegen  $[S, T]_{k, k-1} = (-1)^{k-1} s_1 \cdots s_k$  einen Index  $l$  geben, so dass der  $l$ -te Teilzähler verschwindet. Aber dann würden alle folgenden Näherungsbrüche denselben Wert haben wie  $S_l/T_l$ , falls die  $B_{n \geq l}$  sinnvoll sind. Deshalb fordern wir diese Ungleichung. Ist nun  $t_0 + \frac{s_1}{|t_1|} + \frac{s_2}{|t_2|} + \frac{s_3}{|t_3|} + \dots$  der gesuchte Kettenbruch, dann wissen wir nach dem Satz 2.19, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} S_0 &= t_0, \quad T_0 = 1, \quad S_1 = t_0 t_1 + s_1, \quad T_1 = t_1, \\ S_k &= t_k S_{k-1} + s_k S_{k-2}, \quad T_k = t_k T_{k-1} + s_k T_{k-2} \end{aligned}$$

erfüllt sein müssen. Umgekehrt hat ein Kettenbruch welcher diese Relationen erfüllt in der Tat die obige Form. Desweiteren sind die Gleichungen wegen  $[S, T]_{k-1, k-2} \neq 0$  eindeutig nach  $s_k, t_k$  auflösbar.  $\square$

Nun können wir das behauptete einsehen und zwar müssen wir nur den Kettenbruch bilden mit Näherungsnenner  $T_k = 1$  und  $S_k := \sum_{l=0}^k c_l$ . Die Elemente erhält man sofort aus obigem Satz und wir erhalten einen weiteren nützlichen Satz.

**Satz 2.24.** Die Reihe

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_k + \dots \text{ mit } c_k \neq 0 \text{ für } k \geq 1$$

und der Kettenbruch

$$c_0 + \frac{c_1}{|1|} - \frac{\frac{c_2}{c_1}}{|1 + \frac{c_2}{c_1}|} - \dots - \frac{\frac{c_k}{c_{k-1}}}{|1 + \frac{c_k}{c_{k-1}}|} - \dots$$

sind äquivalent.

Diese Transformation wird besonders häufig auf Potenzreihen angewandt, wie wir eigentlich in der weiter oben gemachten Bemerkung getan haben ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ):

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \equiv c_0 + \frac{c_1 z}{|1|} - \dots - \frac{\frac{c_k}{c_{k-1}} z}{|1 + \frac{c_k}{c_{k-1}} z|} - \dots \quad (2.111)$$

*Bemerkung 2.22.* Wir wollen ein paar Bemerkungen machen:

- (i) Aus der Definitionsgleichung für die Äquivalenz einer Reihe und eines Kettenbruchs sehen wir sofort, dass bei Konvergenz der Reihe der Kettenbruch gegen denselben Wert konvergiert und aus der Divergenz der Reihe die Divergenz des Kettenbruchs folgt.
- (ii) Man kann also im Konvergenzfall das  $\equiv$ -Zeichen durch ein normales Gleichheitszeichen ersetzen. Da nun aber die linke Seite auch für  $z = 0$  konvergent ist, können wir den Wert  $z = 0$  zulassen.
- (iii) Bricht eine Potenzreihe ab einem gewissen Glied  $n + 1$  ab, dann kann der Kettenbruch auch nur so viele Glieder haben.
- (iv) Die erhaltene Formel für einen zur Reihe äquivalenten Kettenbruch kann natürlich in einen äquivalenten Kettenbruch, welcher keine Brüche als Teilzähler bzw. Teilnenner hat, umgewandelt werden.

*Beispiel 2.7.* Wir wollen ein kleines Beispiel anfügen.  $c_k = \frac{1}{k!}$  liefert direkt die Formel

$$e^z = 1 + \frac{z}{|1|} - \frac{\frac{1}{2}z}{|1 + \frac{1}{2}z|} - \frac{\frac{1}{3}z}{|1 + \frac{1}{3}z|} - \frac{\frac{1}{4}z}{|1 + \frac{1}{4}z|} - \dots,$$

zumindest nach Verwendung des Ausdrucks für einen äquivalenten Kettenbruch. Diese gilt wie die Exponentialreihe für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

### 2.9.3 Gleichmässige Konvergenz von Kettenbrüchen

Für die folgende Diskussion benötigen wir die Definition der gleichmässigen Konvergenz von unendlichen Kettenbrüchen:

**Definition 2.20.** Wenn die Elemente eines Kettenbruchs Funktionen von einer komplexen Variable  $z$  sind, dann heisst der Kettenbruch in einem gewissen Bereich  $\Omega \subset \mathbb{C}$  **gleichmässig konvergent**, wenn seine Näherungsbrüche  $\frac{A_k}{B_k}$  im ganzen Bereich  $\Omega$  gleichmässig gegen einen Grenzwert streben, d.h.

- (1) Es gibt ein  $n_0$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  im ganzen Bereich  $B_n \neq 0$  gilt. (Diese Bedingung ist nur notwendig, wenn mindestens ein  $B_n$  sinnlos ist.)
- (2) Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $m_0 \geq n_0$ , so dass für alle  $m \geq m_0$  im ganzen Bereich die Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{A_m}{B_m} - \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{A_l}{B_l} \right| < \epsilon. \quad (2.112)$$

**Satz 2.25.** Sei eine beliebig grosse positive Zahl  $K$  und eine reelle Zahlenfolge  $\{p_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $p_l \geq 1$  gegeben. Wenn die Elemente des Kettenbruchs

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots,$$

Funktionen der komplexen Variable  $z$  sind, dann ist der Kettenbruch in jeder Menge in welcher die zwei Ungleichungen

$$\left| \frac{a_1(z)}{b_1(z)} \right| \leq K \frac{p_1 - 1}{p_1}, \quad (2.113)$$

$$\left| \frac{a_k(z)}{b_{k-1}(z) b_k(z)} \right| \leq \frac{p_k - 1}{p_{k-1} p_k} \text{ für } k \geq 2 \quad (2.114)$$

gelten, gleichmässig konvergent.

Man beachte, dass dabei verschwindende Teilzähler nicht ausgeschlossen sind. Wenn  $p_k = 1$  ist, dann muss in der ganzen Menge  $a_k = 0$  gelten.

*Beweis.* Offensichtlich bleibt die gleichmässige Konvergenz eines Kettenbruchs bestehen, wenn man ihn durch einen äquivalenten ersetzt und noch den ersten Teilzähler mit einer beschränkten Funktion  $\rho_0$  multipliziert, also können wir den Kettenbruch

$$\frac{\rho_0 \rho_1 a_1}{|\rho_1 b_1|} + \frac{\rho_1 \rho_2 a_2}{|\rho_2 b_2|} + \frac{\rho_2 \rho_3 a_3}{|\rho_3 b_3|} + \dots$$

betrachten, wobei natürlich die  $\rho_k$  im ganzen Bereich wo die Ungleichung gilt endlich und von Null verschieden sein sollen. Wir setzen nun

$$\rho_0 = \frac{1}{K}, \quad \rho_k = \frac{p_k}{b_k}.$$

Wir bezeichnen die Näherungszähler bzw. -nenner mit  $C_k, D_k$ . Wir sehen zunächst, dass im Bereich wo der ursprüngliche Kettenbruch die Ungleichungen erfüllt gilt:

$$\begin{aligned} |\rho_0 \rho_1 a_1| &= \frac{1}{K} \left| \frac{p_1}{b_1} a_1 \right| \leq \frac{1}{K} p_1 \cdot K \frac{p_1 - 1}{p_1} \leq p_1 - 1 \\ |\rho_{k-1} \rho_k a_k| &= \left| \frac{p_{k-1} p_k}{b_{k-1} b_k} a_k \right| \leq p_{k-1} p_k \left| \frac{a_k}{b_{k-1} b_k} \right| \leq p_k - 1. \end{aligned}$$

Aus der Rekursionsformel für die Näherungsnenner wissen wir  $D_k = \rho_k b_k D_{k-1} + \rho_{k-1} \rho_k a_k D_{k-2}$  und damit erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$|D_k| \geq p_k |D_{k-1}| - (p_k - 1) |D_{k-2}|.$$

Daraus folgt, da  $p_k \geq 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |D_k| - |D_{k-1}| &\geq (p_k - 1) (|D_{k-1}| - |D_{k-2}|) \\ &\geq (p_k - 1) (p_{k-1} - 1) \cdots (p_2 - 1) (|D_1| - |D_0|) \\ &= (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) \end{aligned}$$

und mit  $q_k := p_k - 1 \geq 0$  haben wir

$$|D_k| \geq 1 + q_1 + q_1 q_2 + \cdots + q_1 \cdots q_k > 0.$$

Also sind alle Näherungsnenner sinnvoll für alle  $k$  und wir müssen zeigen, dass die Reihe

$$\frac{C_0}{D_0} + \left( \frac{C_1}{D_1} - \frac{C_0}{D_0} \right) + \cdots$$

gleichmäßig konvergiert. Nun erhalten wir mit der zweiten Formeln im Satz 2.19 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{C_k}{D_k} - \frac{C_{k-1}}{D_{k-1}} \right| &= \frac{|\rho_0 \rho_1 a_1| \cdot |\rho_1 \rho_2 a_2| \cdots |\rho_{k-1} \rho_k a_k|}{|D_k| \cdot |D_{k-1}|} \\ &\leq \frac{(p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)}{|D_k| \cdot |D_{k-1}|} \\ &\leq \frac{q_1 \cdots q_k}{(1 + q_1 + \cdots + q_1 \cdots q_k) (1 + q_1 + \cdots + q_1 \cdots q_{k-1})} \\ &= \frac{1}{1 + q_1 + \cdots + q_1 \cdots q_{k-1}} - \frac{1}{1 + q_1 + \cdots + q_1 \cdots q_k}. \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck ist klarerweise das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe.  $\square$

## 2.9.4 C-Kettenbrüche und korrespondierende Reihe

Bevor wir weitere Resultate über Kettenbrüche beweisen, deren Elemente Funktionen einer Variable  $z$  sind, möchten wir die sogenannten  $C$ -Kettenbrüche einführen.

**Definition 2.21.** Einen endlichen oder unendlichen Kettenbruch der Form

$$1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1|} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1|} + \frac{a_3 z^{n_3}}{|1|} + \dots, \quad (2.115)$$

wobei  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n_k \in \mathbb{N}$  (Exponenten) und  $a_k \neq 0$  (konstante Koeffizienten) gilt, nennen wir einen **C-Kettenbruch**.

Aus dem Satz 2.19 wissen wir

$$A_m(z) B_{m-1}(z) - A_{m-1}(z) B_m(z) = (-1)^{m-1} \prod_{k=1}^m a_k z^{n_k}$$

und daraus folgt, dass  $A_m, B_m$  keine gemeinsamen Nullstellen haben können, weshalb sich der folgende Satz ergibt:

**Satz 2.26.** Ein endlicher C-Kettenbruch stellt eine rationale Funktion  $F(z)$  dar und ist nur für solche  $z$  sinnlos (und zwar  $= \infty$ ), die Pole der Funktion  $F$  sind.

Für den nächsten Satz benötigen wir eine weitere Rekursionsformel zwischen den Näherungszählern und Näherungsnennern. Wir setzen

$$b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}}{|b_{\lambda+1}|} + \frac{a_{\lambda+2}}{|b_{\lambda+2}|} + \dots + \frac{a_{\lambda+\nu}}{|b_{\lambda+\nu}|} = \frac{A_{\nu,\lambda}}{B_{\nu,\lambda}}. \quad (2.116)$$

Man kann zeigen, dass diese neuen Näherungszähler bzw. -nenner die folgenden Rekursionsrelationen erfüllen

$$A_{\nu+\lambda-1} = A_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda}, \quad (2.117)$$

$$B_{\nu+\lambda-1} = B_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda}, \quad (2.118)$$

$$B_{\nu,\lambda} = A_{\nu-1,\lambda+1}, \quad (2.119)$$

$$[A, B]_{\nu+\lambda-1,\lambda-1} = (-1)^{\lambda-1} a_1 \cdots a_\lambda B_{\nu-1,\lambda}. \quad (2.120)$$

Da die Beweise nicht weiter schwer sind, werden sie hier nicht explizit ausgeführt. Wende wir nun auf den C-Kettenbruch die vierte Formel an, so haben wir

$$\frac{A_{\nu+\lambda-1}}{B_{\nu+\lambda-1}} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1} \frac{a_1 \cdots a_\lambda z^{n_1 + \dots + n_\lambda} B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu+\lambda-1} B_{\lambda-1}}.$$

Bemerke, dass nach dem Beweis der Rekursionsformeln für die Näherungsnenner und Näherungszähler  $B_n, A_n$  Polynome in der Variable  $z$  sind und auch  $B_{\nu-1,\lambda}$  nach den obigen Formeln. Wenn wir nun beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von  $z$  entwickeln, so erkennen wir, dass die Entwicklung von  $A_{\lambda-1}/B_{\lambda-1}$  mit der Entwicklung jedes Näherungsbruches höherer Ordnung bis zur Potenz  $z^{n_1 + \dots + n_\lambda - 1}$  übereinstimmt und erst die Koeffizienten von  $z^{n_1 + \dots + n_\lambda}$  voneinander abweichen. Damit haben wir den Satz:

**Satz 2.27.** Zu jedem  $C$ -Kettenbruch gibt es eine Potenzreihe

$$\mathcal{P}_0(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad (2.121)$$

die im Fall eines unendlichen Kettenbruches dadurch eindeutig bestimmt ist, dass die Taylor'schen Reihen für die Näherungsbrüche  $A_\lambda(z)/B_\lambda(z)$  mit wachsendem  $\lambda$  bis zu immer höheren Potenzen von  $z$  (mindestens bis  $z^\lambda$ ) mit  $\mathcal{P}_0(z)$  übereinstimmen. (Man könnte natürlich auch eine beliebige Konstante  $c_0$  anstatt des Anfangsglieds 1 wählen.)

Wir nennen die so bestimmte Potenzreihe, die mit dem Kettenbruch **korrespondierende Reihe**. Es ist zu bemerken, dass es sich hier zunächst nur um formale Aussagen handelt, denn weder der Kettenbruch noch die Reihe müssen für irgendein  $z \neq 0$  konvergieren. Wir beweisen nun den Satz:

**Satz 2.28.** Zwei unendliche  $C$ -Kettenbrüche

$$K := 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1|} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1|} + \dots, \quad K' := 1 + \frac{a'_1 z^{n'_1}}{|1|} + \frac{a'_2 z^{n'_2}}{|1|} + \dots \quad (2.122)$$

haben die gleiche korrespondierende Reihe, wenn sie identisch sind, d.h. für alle  $k$  gilt  $a_k = a'_k, n_k = n'_k$  (gilt auch für endliche Kettenbrüche).

*Beweis.* Wir nehmen an, dass die Kettenbrüche nicht identisch sind, also gibt es einen kleinsten Index  $k$  für welchen  $a_k \neq a'_k$  oder  $n_k \neq n'_k$  gilt. Dann hat man

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} &= (-1)^{k-1} \frac{a_1 \cdots a_k z^{n_1 + \cdots + n_k}}{B_k B_{k-1}} \\ \frac{A'_k}{B'_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} &= (-1)^{k-1} \frac{a_1 \cdots a_{k-1} a'_k z^{n_1 + \cdots + n_{k-1} + n'_k}}{B'_k B_{k-1}}. \end{aligned}$$

Man findet nun durch Subtraktion, dass die Taylor'schen Reihen für  $A_k/B_k$  und  $A'_k/B'_k$  im Koeffizienten von  $z^{n_1 + \cdots + n_{k-1} + \min(n_k, n'_k)}$  voneinander abweichen. Jedoch stimmen die zu  $K, K'$  korrespondierenden Reihen per Definition mindestens bis zu  $z^{n_1 + \cdots + \min(n_k, n'_k)}$  mit  $A_k/B_k$  bzw.  $A'_k/B'_k$  überein, weichen also ebenfalls im Koeffizienten von  $z^{n_1 + \cdots + \min(n_k, n'_k)}$  voneinander ab. Damit haben wir bereits die Aussage.  $\square$

Dieser Satz besagt also, dass es für jede Potenzreihe  $\mathcal{P}_0$  höchstens einen  $C$ -Kettenbruch gibt für welchen sie die korrespondierende Reihe ist. Das "Korrespondieren" drücken wir aus durch

$$\mathcal{P}_0 \sim 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1|} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1|} + \dots.$$

Falls die Potenzreihe einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius hat, also in der Umgebung des Nullpunktes eine analytische Funktion  $f(z)$  darstellt, schreiben wir auch

$$f(z) \sim 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1|} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1|} + \dots.$$

Damit ist aber nicht gesagt, dass der Kettenbruch konvergiert und gleich der Funktion  $f(z)$  ist. Nun wollen wir umgekehrt zeigen, dass es zu jeder Potenzreihe  $\mathcal{P}_0$  einen und nach obigem Satz nur einen korrespondierenden Kettenbruch gibt. Konkret zeigen wir:

**Satz 2.29.** Zu jeder Potenzreihe  $\mathcal{P}_0$  mit konstantem Anfangsglied 1 gibt es genau einen korrespondierenden Kettenbruch. Man findet ihn, indem man durch sukzessive Reziprokenbildung die formale Gleichungskette

$$\mathcal{P}_0(z) = 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{\mathcal{P}_1(z)}, \mathcal{P}_1(z) = 1 + \frac{a_2 z^{n_2}}{\mathcal{P}_2(z)}, \dots \quad (2.123)$$

aufstellt, die entweder unendlich ist oder mit einer Formel  $\mathcal{P}_n(z) = 1$  endet. Es gilt dann die Formel

$$\mathcal{P}_0(z) \sim 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1} + \dots \quad (2.124)$$

Umgekehrt zieht die Korrespondenzformel 2.124 immer die Existenz einer Kette von Potenzreihen  $\{\mathcal{P}_i(z)\}$  nach sich, für die die formalen Identitäten 2.123 gelten.

*Beweis.* Sei also  $\mathcal{P}_0(z)$  eine beliebige Potenzreihe mit konstantem Glied 1 und  $a_1 z^{n_1}$  das erste nicht verschwindende Glied in der Potenzreihe  $\mathcal{P}_0(z) - 1$ . Dann wird durch die formale Gleichung

$$\mathcal{P}_0(z) = 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{\mathcal{P}_1(z)} \Leftrightarrow \mathcal{P}_1(z) = 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{\mathcal{P}_0(z) - 1}$$

eine weitere Potenzreihe mit konstantem Glied 1. Bezeichnet nun  $a_2 z^{n_2}$  das erste nicht verschwindende Glied von  $\mathcal{P}_1(z) - 1$ , so wird durch die Gleichung

$$\mathcal{P}_1(z) = 1 + \frac{a_2 z^{n_2}}{\mathcal{P}_2(z)}$$

eine weitere Potenzreihe mit konstantem Glied 1 produziert. Wir erhalten also wie im Satz eine Kette von formalen Gleichungen, die sich entweder unbegrenzt fortsetzen lässt oder einmal abbricht, indem  $\mathcal{P}_n = 1$  gilt. Nun folgt indem man mit den in der Kette auftretenden  $a_k, n_k$  den gewünschten Kettenbruch bildet die formale Identität

$$\mathcal{P}_0(z) = 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1} + \dots + \frac{a_k z^{n_k}}{|\mathcal{P}_k(z)} = \frac{\mathcal{P}_k(z) A_{k-1}(z) + a_k z^{n_k} A_{k-2}(z)}{\mathcal{P}_k(z) B_{k-1}(z) + a_k z^{n_k} B_{k-2}(z)}$$

oder

$$\mathcal{P}_0 - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1} a_1 \dots a_k z^{n_1 + \dots + n_k}}{B_{k-1} (\mathcal{P}_k B_{k-1} + a_k z^{n_k} B_{k-2})}.$$

Diese besagt aber dass die Taylor'sche Reihe für den Näherungsbruch  $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$  mit der Reihe  $\mathcal{P}_0$  bis zur Potenz  $z^{n_1 + \dots + n_k - 1}$  übereinstimmt, so dass die Reihe  $\mathcal{P}_0$  den konstruierten Kettenbruch als korrespondierenden Kettenbruch hat, also

$$\mathcal{P}_0(z) \sim 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1} + \dots \quad \square$$

Wir wollen nun als Anwendung dieses Satzes nochmals den Satz von Gauss betrachten. Wir fordern wieder  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  und setzen

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{2k}(z) &:= \frac{F(a+k, b+k; c+2k; z)}{F(a+k, b+k; c+2k+1; z)} \\ \mathcal{P}_{2k+1}(z) &:= \frac{F(a+k, b+k+1; c+2k+1; z)}{F(a+k+1, b+k+1; c+2k+2; z)}.\end{aligned}$$

Nun folgt aus

$$F(a, b; c; z) = F(a, b+1; c+1; z) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} z F(a+1, b+1; c+2; z),$$

wenn man  $a, b, c$  durch  $a+k, b+k, c+2k$  ersetzt, die Gleichung

$$\mathcal{P}_{2k}(z) = 1 + \frac{a_{2k+1}z}{\mathcal{P}_{2k+1}(z)} \quad \text{mit} \quad a_{2k+1} = -\frac{(a+k)(c-b+k)}{(c+2k)(c+2k+1)}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Nachbarschaftsrelation für die hypergeometrische Funktion die Gleichung

$$\mathcal{P}_{2k+1}(z) = 1 + \frac{a_{2k+2}z}{\mathcal{P}_{2k+2}(z)} \quad \text{mit} \quad a_{2k+2} = -\frac{(b+k+1)(c-a+k+1)}{(c+2k+1)(c+2k+2)}.$$

Es besteht also mit diesen Werten von  $a_k$  und  $\mathcal{P}_k$  das System von formalen Identitäten im obigen Satz mit  $n_k = 1$  und deshalb resultiert daraus die Korrespondenzformel

$$\mathcal{P}_0(z) = \frac{F(a, b; c; z)}{F(a, b+1; c+1; z)} \sim 1 + \frac{a_1 z}{|1|} + \frac{a_2 z}{|1|} + \frac{a_3 z}{|1|} + \dots, \quad (2.125)$$

wobei die Koeffizienten durch die obigen Formeln gegeben sind. Nun gilt:

**Korollar 2.6.** Wenn in der Korrespondenzformel

$$\mathcal{P}_0(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \sim 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1|} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1|} + \dots,$$

die  $c_k, a_k$  Funktionen eines Parameters  $t$  sind und die Grenzwerte  $\lim_{t \rightarrow \alpha} c_k = c_k^*, \lim_{t \rightarrow \alpha} a_k = a_k^* \neq 0$  existieren, so gilt auch die Formel

$$\mathcal{P}_0^*(z) = 1 + c_1^* z + c_2^* z^2 + \dots \sim 1 + \frac{a_1^* z^{n_1}}{|1|} + \frac{a_2^* z^{n_2}}{|1|} + \dots. \quad (2.126)$$

Setzen wir nun  $z/b$  anstelle von  $z$  ein und betrachten den Grenzwert  $b \rightarrow \infty$ , dann finden wir die Formel für die konfluente hypergeometrische Funktion

$$\frac{F(a; c; z)}{F(a; c+1; z)} \sim 1 + \frac{\frac{a}{c(c+1)}z}{|1|} + \frac{-\frac{c-a+1}{(c+1)(c+2)}z}{|1|} + \frac{\frac{a+1}{(c+2)(c+3)}z}{|1|} + \frac{-\frac{c-a+2}{(c+3)(c+4)}z}{|1|} + \dots. \quad (2.127)$$

Ersetzen wir nun  $z$  durch  $z/c$  und betrachten den Grenzwert  $c \rightarrow \infty$  so erhalten wir die Formel für  $F(a; z)/F(a+1; z)$ . Im Rest dieses Kapitels wird es nun darum gehen wann wir die Korrespondenz durch ein Gleichheitszeichen ersetzen können und für welche  $z$  dies gilt.

Schliesslich gilt noch die Umkehrung des Satzes 2.26:

**Satz 2.30.** Sei  $\mathcal{P}_0(z)$  die Taylor'sche Reihe für eine rationale Funktion, so ist der korrespondierende Kettenbruch endlich.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{P}_0(z) = \frac{P_0(z)}{P_1(z)}$  mit  $P_0, P_1$  Polynome mit konstantem Glied 1. Aus  $\mathcal{P}_0(z) = 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{P_1(z)}$  folgt, dann

$$\mathcal{P}_1(z) = \frac{a_1 z^{n_1}}{\mathcal{P}_0(z) - 1} = \frac{a_1 z^{n_1} P_1(z)}{P_0(z) - P_1(z)} = \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

wo natürlich auch  $P_2$  ein Polynom mit konstantem Glied 1 ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir allgemein

$$\mathcal{P}_k(z) = \frac{P_k(z)}{P_{k+1}(z)},$$

wobei alle  $P_k$  konstantes Glied 1 haben. Ist  $p_k := \deg P_k$ , dann folgt

$$p_2 \leq \max(p_0, p_1) - r_1 \leq \max(p_0, p_1) - 1$$

und analog  $p_3 \leq \max(p_1, p_2) - 1 \leq \max(p_0, p_1) - 1$ . Also schliesslich

$$\max(p_2, p_3) \leq \max(p_0, p_1) - 1.$$

Ebenso ist dann auch

$$\max(p_4, p_5) \leq \max(p_2, p_3) - 1 \leq \max(p_0, p_1) - 2,$$

usw. Aus dieser nicht notwendigerweise monotonen Gradabnahme erkennt man, dass der Prozess einmal enden muss.  $\square$

Eventuell ist man versucht zu glauben, dass die Konvergenz von  $C$ -Kettenbruch und korrespondierender Reihe sich gegenseitig bedingen, aber in der Tat können für einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  die folgenden vier Fälle eintretend:

- (1) Kettenbruch und Reihe konvergieren.
- (2) Kettenbruch und Reihe divergieren.
- (3) Kettenbruch konvergiert, Reihe divergiert.
- (4) Kettenbruch divergiert, Reihe konvergiert.

Ein Beispiel in welchem aller vier Fälle zugleich auftretend ist der dreigliedrige reinperiodische Kettenbruch

$$1 + \frac{2z}{|1} + \frac{z}{|1} - \frac{3z}{|1} + \frac{2z}{|1} + \frac{z}{|1} - \frac{3z}{|1} + \dots .$$

Bei diesem Beispiel stimmen im Falle der Konvergenz die Werte in der Tat überein, aber ob dies in jedem Fall stimmt ist bis heute (zumindest 1977) eine offene Frage.

Von grösster Wichtigkeit ist der folgende Satz:

**Satz 2.31.** Konvergiert der unendliche Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1} + \dots \tag{2.128}$$

gleichmässig in einer abgeschlossenen zusammenhängenden Menge  $D \subset \mathbb{C}$  mit  $0 \in D$ , dann stellt dieser eine in  $D^\circ$  reguläre, aber niemals rationale, Funktion  $F(z)$  dar. Für jedes  $r > 0$  mit  $B_r(0) \subset D$  stimmt desweiteren  $F$  mit der korrespondierenden Reihe des Kettenbruchs überein.

*Beweis.* Wir bezeichnen wie üblich mit  $A_k, B_k$  den Näherungszähler und Nenner  $n$ -ter Ordnung. Wegen der gleichmässigen Konvergenz gibt es einen Index  $n$  so dass für alle  $\nu \geq n$   $B_\nu \neq 0$  gilt und der Wert des Kettenbruchs wird dann in  $D$  dargestellt durch die gleichmässig konvergente Reihe

$$\frac{A_n}{B_n} + \left( \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} \right) + \dots ,$$

deren einzelne Glieder in  $D^\circ$  reguläre rationale Funktionen von  $z$  sind. Nach Weierstrass ist daher der Kettenbruch selbst im Innern von  $D$  regulär. Nun sei wieder  $1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$  die korrespondierende Reihe, dann beginnen die Taylor'schen Entwicklungen für die Glieder der obigen Reihe mit immer höheren Potenzen von  $z$ , so dass die Taylor-Entwicklung für die  $(p+1)$ -te Partialsumme

$$\frac{A_n}{B_n} + \left( \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} \right) + \dots + \left( \frac{A_{n+p}}{B_{n+p}} - \frac{A_{n+p-1}}{B_{n+p-1}} \right) = \frac{A_{n+p}}{B_{n+p}}$$

mindestens bis zum Glied  $c_{n+p} z^{n+p}$  mit der korrespondierenden Reihe übereinstimmt. Diese Taylor-Entwicklungen gelten in einer Kreisscheibe  $B_r(0)$ . Wegen der gleichmässigen Konvergenz folgt mit dem Weierstrass'schen Doppelreihensatz in  $B_r(0)$

$$\frac{A_n}{B_n} + \left( \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} \right) + \dots = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots .$$

Also ist in der Tat der Kettenbruch gleich der korrespondierenden Reihe. Nun bleibt noch zu zeigen, dass der Kettenbruch keine rationale Funktion sein kann, aber in diesem Fall müsste ja nach dem Bewiesenen auch die korrespondierende Reihe eine rationale Funktion darstellen, was jedoch wie wir wissen nicht möglich ist.  $\square$

**Satz 2.32.** Wenn die beiden unendlichen  $C$ -Kettenbrüche

$$K := 1 + \frac{a_1 z^{n_1}}{|1|} + \frac{a_2 z^{n_2}}{|1|} + \dots, \quad K' := 1 + \frac{a'_1 z^{n'_1}}{|1|} + \frac{a'_2 z^{n'_2}}{|1|} + \dots$$

mit  $a_k, a'_k \neq 0$  in einer Umgebung des Nullpunktes gleichmässig konvergieren, so sind die durch sie dargestellten analytischen Funktionen genau dann identisch, wenn die Kettenbrüche identisch sind.

*Beweis.* Nach dem obigen Satz müssen die korrespondierenden Reihen die gleichen sein, also nach Satz 2.28 auch die Kettenbrüche.  $\square$

Wir wollen nun ein paar allgemeine Kriterien beweisen.

**Satz 2.33.** Wenn die Koeffizienten des unendlichen  $C$ -Kettenbruchs

$$1 + \frac{a_1 z}{|1|} + \frac{a_2 z}{|1|} + \frac{a_3 z}{|1|} + \dots, \quad a_k \neq 0$$

den Ungleichungen  $|a_k| \leq g$  genügen, dann stellt dieser in der Kreisscheibe  $B_r(0)$  mit  $r := \frac{1}{4g}$  eine reguläre aber nicht rationale Funktion  $F(z)$  dar, welche gleich der korrespondierenden Reihe ist.

*Beweis.* Nach dem Satz 2.25 mit  $b_n = 1, a_n(z) = a_n \cdot z, p_n = 2$  ist der Kettenbruch für  $|z| \leq 1/4g$  gleichmässig konvergent, woraus nach Satz 2.31 die Behauptung folgt.  $\square$

Beispiele für Kettenbrüche, welche diesem Satz genügen, stellen die periodischen Kettenbrüche dar.

**Satz 2.34.** Wenn  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k| \leq g$ , dann stellt der Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 z}{|1|} + \frac{a_2 z}{|1|} + \frac{a_3 z}{|1|} + \dots, \quad a_k \neq 0$$

in der Kreisscheibe  $B_r(0)$  mit  $r := \frac{1}{4g}$  eine bis auf mögliche Pole eine reguläre aber nicht rationale Funktion  $F(z)$  dar, wobei in den Polen unwesentliche Divergenz stattfindet. In einer Umgebung des Nullpunktes, welche in  $B_r$  vollständig enthalten ist, ist der Kettenbruch gleich der korrespondierenden Reihe.

*Beweis.* Sei  $g' > g$  eine beliebig wenig grössere Zahl als  $g$ . Es genügt nun zu zeigen, dass der Kettenbruch auf  $B_{r'}$  mit  $r' := \frac{1}{4g'}$  die gewünschten Eigenschaften hat. Da  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k| \leq g$  existiert ein  $n$ , so dass für alle  $\nu > n$  gilt  $|a_\nu| \leq g'$ . Nach Satz 2.33 ist daher der Kettenbruch

$$1 + \frac{a_{n+1} z}{|1|} + \frac{a_{n+2} z}{|1|} + \dots$$

auf  $B_{r'}$  regulär und gleich seiner korrespondierenden Reihe  $\mathcal{P}_n$ . In der Tat handelt es sich bei diesem Kettenbruch um eine reguläre Funktion  $F(z)$  in diesem Gebiet bis auf etwaige Pole, denn im folgenden Ausdruck

$$\frac{\mathcal{P}_n A_{n-1} + a_n z A_{n-2}}{\mathcal{P}_n B_{n-1} + a_n z B_{n-2}}$$

sind Zähler und Nenner in  $B_{r'}$  reguläre Funktionen. Die Nennerfunktion kann nicht identisch verschwinden, denn für  $z = 0$  hat sie den Wert 1, folglich ist der Nenner allenfalls an einzelnen Stellen des Gebiets  $B_{r'}$  gleich 0 und an diesen Stellen ist die Zählerfunktion sicher ungleich Null, weil sonst  $A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1} = \pm a_1 \cdots a_{n-1} z^{n-1}$  verschwinden müsste, während doch  $z = 0$  keine Nullstelle des Nenners ist. Andererseits stimmt aber der obige Ausdruck mit dem endlichen Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 z}{|1|} + \cdots + \frac{a_n z}{|\mathcal{P}_n|}$$

überein, also ist dieser in der Umgebung des Nullpunkts auch gleich  $\mathcal{P}_0$ . Nun benötigen wir die zwei folgenden elementaren Aussagen:

(1) Wenn  $a_1, \dots, a_\lambda \neq 0$ , dann implizieren die ersten zwei Gleichungen die dritte:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \cdots + \frac{a_\lambda}{|\xi_\lambda|} \\ \xi_\lambda &= b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}}{|b_{\lambda+1}|} + \cdots \\ \xi_0 &= b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \cdots + \frac{a_\lambda}{|\xi_\lambda|} + \frac{a_{\lambda+1}}{|b_{\lambda+1}|} + \cdots \end{aligned}$$

(2) Wenn  $a_1, \dots, a_\lambda \neq 0$ , dann implizieren die ersten zwei Gleichungen die dritte:

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \cdots + \frac{a_\lambda}{|\xi_\lambda|} &\text{ ist sinnlos} \\ \xi_\lambda &= b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}}{|b_{\lambda+1}|} + \cdots \text{ in infin.} \\ b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \cdots + \frac{a_\lambda}{|\xi_\lambda|} + \frac{a_{\lambda+1}}{|b_{\lambda+1}|} + \cdots &\text{ ist unwesentlich divergent.} \end{aligned}$$

Mit diesen Bemerkungen folgt nun, dass auch der unendliche Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 z}{|1|} + \frac{a_2 z}{|1|} + \frac{a_3 z}{|1|} + \cdots$$

auf  $B_{r'}$  die Funktion  $F(z)$  darstellt, wobei wir in den Polen unwesentliche Divergenz haben. Für kleine  $|z|$  ist  $F(z) = \mathcal{P}_0(z)$  und natürlich kann  $\mathcal{P}_0$  wieder nicht rational sein. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Ein Spezialfall des obigen Satzes ist:

**Satz 2.35.** Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , dann ist der Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 z}{|1|} + \frac{a_2 z}{|1|} + \frac{a_3 z}{|1|} + \cdots, \quad a_k \neq 0$$

eine meromorphe aber nicht rationale Funktion  $f(z)$  (in  $z = \infty$  wesentliche Singularität), wobei in den möglichen Polen unwesentliche Divergenz vorliegt. In der Umgebung des Nullpunkts ist diese Funktion auch gleich der korrespondierenden Reihe.

*Beweis.* Wir müssen für  $g$  in Satz 2.34 nur eine beliebig kleine Zahl wählen und erhalten die Aussage.  $\square$

Als Anwendung dieses Satzes betrachten wir die Funktion  $F(a; z)$  und  $F(a; c; z)$ . Wir sehen

$$\frac{F(a+1; z)}{F(a; z)} = \frac{1}{|1|} + \frac{\frac{z}{a(a+1)}}{|1|} + \frac{\frac{z}{(a+1)(a+2)}}{|1|} + \frac{\frac{z}{(a+2)(a+3)}}{|1|} + \dots$$

und da  $a_n := \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} \rightarrow 0$  konvergiert der Kettenbruch gegen eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ .

### 2.9.5 Limitärperiodische Kettenbrüche

Die nachfolgende Diskussion ist durch das folgende Beispiel motiviert:

*Beispiel 2.8.* Man kann zeigen, dass der Kettenbruch

$$b + \frac{a}{|b|} + \frac{a}{|b|} + \frac{a}{|b|} + \dots$$

im Speziellen, dann konvergiert, wenn die Wurzeln  $\rho_1, \rho_2$  der quadratischen Gleichung  $\rho^2 - b\rho - a = 0$  ungleichen absolut Betrag haben.

Wir wollen nun untersuchen wie stark wir die Elemente abändern können ohne die Konvergenz dieses Kettenbruchs zu zerstören und wann sogar gleichmässige Konvergenz vorliegt. Ein erstes Kriterium stellt der folgende Satz dar:

**Satz 2.36.** Seien eine Menge  $D \subset \mathbb{C}$  und Funktionen  $a, b : D \rightarrow \mathbb{C}$  derart gegeben, so dass für die Wurzeln  $\rho_1, \rho_2$  der quadratischen Gleichung

$$\rho^2 - b\rho - a = 0$$

in ganz  $D$  die Ungleichungen

$$0 < |\rho_1| \leq C \text{ und } \left| \frac{\rho_2}{\rho_1} \right| \leq \theta < 1 \tag{2.129}$$

gelten, wobei  $C, \theta > 0$  Konstanten sind. Desweiteren sei  $k > 0$  derart, dass  $\theta < k \leq 1$  und  $s > 0$  genüge einer der zwei folgenden Ungleichungstripel

$$ks \leq k - \theta, (1+k)s < 1 - \theta, \theta \leq ks \tag{2.130}$$

$$ks \leq k - \theta, (1+k)s < 1 - \theta, (1 + \theta^2 + 2k)s < (1 - \theta)^2. \tag{2.131}$$

Wenn nun die Elemente des Kettenbruchs

$$\frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots$$

Funktionen sind, die in ganz  $D$  den Ungleichungen für  $l \geq 1$

$$\begin{aligned} |a_l - a| &\leq s(k - \theta - ks) |\rho_1|^2 \\ |b_l - b| &\leq s(1 - k) |\rho_1| \end{aligned}$$

genügen, dann ist der Kettenbruch in  $D$  gleichmässig konvergent.

*Beweis.* Zuerst bemerken wir, dass wegen der Bedingung  $(1 + k)s < 1 - \theta$  die Zahl  $s$  strikt kleiner als 1 sein muss. Desweiteren muss

$$\rho_1 + \rho_2 = b, \quad \rho_1 \rho_2 = -a$$

gelten. Wir definieren nun rekursiv eine Folge:

$$x_1 = \begin{cases} 0, & ks \geq \theta \\ -\frac{a_1}{\rho_1}, & ks < \theta \end{cases} \quad (2.132)$$

und

$$x_n + y_n = b_n \quad (2.133)$$

$$y_n x_{n+1} = -a_{n+1} \quad (2.134)$$

Um einzusehen, dass die Rekursionsformeln wirklich einen Sinn haben, indem bei der sukzessiven Berechnung sich niemals ein verschwindendes  $y_k$  ergeben kann (in diesem Fall wäre die Berechnung von  $x_{k+1}$  unmöglich), beweisen wir über die Gültigkeit der folgenden drei Ungleichungen:

$$|x_k - \rho_2| \leq ks |\rho_1|, \quad (2.135)$$

$$|y_k - \rho_1| \leq s |\rho_1|, \quad (2.136)$$

$$|y_k| \geq (1 - s) |\rho_1| > 0. \quad (2.137)$$

Die Formel 2.135 gilt zumindest für  $k = 1$  denn:

(1) Für  $ks \geq \theta$  haben wir

$$|x_1 - \rho_2| = |-\rho_2| \leq \theta |\rho_1| \leq ks |\rho_1|$$

(2) und für  $ks < \theta$  gilt:

$$|x_1 - \rho_2| = \left| -\frac{a_1}{\rho_1} - \rho_2 \right| = \left| \frac{a - a_1}{\rho_1} \right| \leq s(k - \theta - ks) |\rho_1| < ks |\rho_1|.$$

Wenn nun aber die Formel 2.135 für einen Index  $k$  gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit der Formel 2.136:

$$\begin{aligned} |y_k - \rho_1| &= |b_k - x_k - \rho_1| = |b_k - b + \rho_2 - x_k| \\ &\leq |b_k - b| + |x_k - \rho_2| \leq s(1 - k) |\rho_1| + ks |\rho_1| = s |\rho_1|. \end{aligned}$$

Aus dieser Formel folgt direkt die Ungleichung 2.137. Mit diesen drei Ungleichungen gilt dann aber auch ( $k \mapsto k + 1$ )

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \rho_2| &= \left| \frac{-a_{k+1}}{y_k} - \rho_2 \right| = \left| \frac{a - a_{k+1}}{y_k} + \frac{\rho_2}{y_k} (\rho_1 - y_k) \right| \\ &\leq \left| \frac{a - a_{k+1}}{y_k} \right| + \left| \frac{\rho_2}{y_k} \right| \cdot |y_k - \rho_1| \leq \frac{s(k - \theta - ks)}{1 - s} |\rho_1| + \frac{\theta s}{1 - s} |\rho_1| \\ &= ks |\rho_1|. \end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung 2.135 allgemein bewiesen und nach dem obigen auch die anderen zwei. Mit den Rekursionsrelationen lässt sich der betrachtete Kettenbruch in der Form

$$\frac{a_1|}{|x_1 + y_1} - \frac{y_1 x_2|}{|x_2 + y_2} - \frac{y_2 x_3|}{|x_3 + y_3} - \dots \quad (2.138)$$

schreiben. Da aber alle  $y_k$  ungleich Null sind, kann man die Brüche  $\gamma_k = \frac{x_k}{y_k}$  einführen und können stattdessen den äquivalenten Kettenbruch

$$\frac{\frac{a_1|}{y_1}}{|\gamma_1 + 1} - \frac{\gamma_2|}{|\gamma_2 + 1} + \dots$$

betrachten. Man sieht leicht durch den Schluss von  $k$  auf  $k + 1$ , dass der Näherungsbruch  $k$ -ter Ordnung wie folgt lautet

$$\frac{\frac{a_1}{y_1} (1 + \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3 + \dots + \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_k)}{1 + \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 + \dots + \gamma_1 \dots \gamma_k}.$$

Also müssen wir nur zeigen, dass dieser Ausdruck gleichmässig konvergiert, wobei wir uns um den Vorfaktor im Zähler nicht kümmern müssen, denn dieser ist in  $D$  beschränkt, denn es gilt:

$$\left| \frac{a_1}{y_1} \right| \leq \frac{|a_1 - a| + |a|}{|y_1|} \leq \frac{s(k - \theta - ks) |\rho_1|^2 + \theta |\rho_1|^2}{(1 - s) |\rho_1|} \leq \frac{s(k - \theta - ks) + \theta}{(1 - s)} C.$$

Wegen den Ungleichungen 2.135, 2.136 gilt nun

$$|\gamma_k| = \left| \frac{x_k}{y_k} \right| \leq \frac{|\rho_2| + ks |\rho_1|}{(1 - s) |\rho_1|} \leq \frac{\theta + ks}{1 - s} < 1.$$

Folglich sind Zähler und Nenner einzeln gleichmässig konvergent. Also ist die gleichmässige Konvergenz des Bruches sichergestellt wenn wir zeigen können, dass der Grenzwert des Nenners ungleich Null ist. Für  $ks \geq \theta$  ist aber  $\gamma_1 = x_1/y_1 = 0$  und damit der Nenner des Bruches gleich 1, womit dieser Fall erledigt ist. Deshalb ist von jetzt an  $ks < \theta$ . Wir führen nun die Abkürzungen

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \alpha, \quad \gamma_k - \alpha = \eta_k$$

ein. Da  $|\rho_2/\rho_1| \leq \theta < 1$  gilt  $|\alpha| \leq \theta$ . Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_1 \cdots \gamma_k - \alpha^k| &= |(\alpha + \eta_1) \cdots (\alpha + \eta_k) - \alpha^k| \\ &= |\alpha^k + \alpha^{k-1} \sum_i \eta_i + \alpha^{k-2} \sum_{i<j} \eta_i \eta_j + \cdots + \eta_1 \cdots \eta_k - \alpha^k| \\ &\leq \theta^{k-1} \sum_i |\eta_i| + \theta^{k-1} \sum_{i<j} |\eta_i| |\eta_j| + \cdots + \prod_{i=1}^k |\eta_i| \\ &= (\theta + |\eta_1|) \cdots (\theta + |\eta_k|) - \theta^k. \end{aligned}$$

Für  $\eta_i$  erhält man aber mit den Ungleichungen 2.135, 2.136, 2.137 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\eta_k| = |\gamma_k - \alpha| &= \left| \frac{x_k - \rho_2}{y_k - \rho_1} \right| = \left| \frac{\rho_1 (x_k - \rho_2) - \rho_2 (y_k - \rho_1)}{y_k \rho_1} \right| \\ &\leq \left| \frac{x_k - \rho_2}{y_k} \right| + \left| \frac{\rho_2 y_k - \rho_1}{\rho_1 y_k} \right| \leq \frac{ks}{1-s} + \theta \frac{s}{1-s} = \frac{k+\theta}{1-s} s, \end{aligned}$$

so dass wir erhalten

$$|\gamma_1 \cdots \gamma_k - \alpha^k| \leq \left( \theta + \frac{k+\theta}{1-s} s \right)^k - \theta^k = \left( \frac{\theta + ks}{1-s} \right)^k - \theta^k.$$

Da nun  $\theta + ks < 1 - s$  gilt, haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(1 + \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 + \cdots) - (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\theta + ks}{1-s} \right)^i - \theta^i \\ &= \frac{1-s}{1-\theta - (k+1)s} - \frac{1}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Da weiter  $|\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i| = |\frac{1}{1-\alpha}| \geq \frac{1}{1+\theta}$  gilt, folgt schlussendlich

$$\begin{aligned} |1 + \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 + \cdots| &\geq \frac{1}{1+\theta} - \left( \frac{1-s}{1-\theta - (k+1)s} - \frac{1}{1-\theta} \right) \\ &= \frac{(1-\theta)^2 - (1+\theta^2 + 2k)s}{(1-\theta^2)(1-\theta - (1+k)s)} > 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Nun wollen wir einen speziellen Typ von Kettenbrüchen betrachten und zwar solche deren Teilzähler und Teilnenner gegen bestimmte Grenzwerte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$$

streben. Derartige Kettenbrüche heissen **limitärperiodische Kettenbrüche**. Für diese gelten insbesondere die folgenden zwei Konvergenzsätze:

**Satz 2.37.** Seien  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Funktionenfolgen in einer Menge  $D$ , welche gleichmässig auf  $D$  gegen die Grenzfunktionen  $\lim_k a_k = a$  und  $\lim_k b_k = b$  konvergieren. Desweiteren gebe es eine positive Zahl  $0 < \theta < 1$  und zwei positive Konstanten  $c, C$ , derart dass in der ganzen Menge  $D$

$$c \leq |\rho_1(z)| \leq C, |\rho_2(z)| \leq \theta |\rho_1(z)|.$$

gilt, wobei  $\rho_1, \rho_2$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung  $\rho^2 - b\rho - a = 0$  sein sollen. In diesem Fall gibt es einen Index  $\nu_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $\nu \geq \nu_0$  der Kettenbruch

$$\frac{a_{\nu+1}}{|b_{\nu+1}|} + \frac{a_{\nu+2}}{|b_{\nu+2}|} + \dots$$

in ganz  $D$  gleichmässig konvergiert.

*Beweis.* Wir wählen ein  $k$  mit  $\theta < k \leq 1$  und ein kleine Zahl  $s$  mit  $0 < s < 1$ , so dass

$$ks \leq k - \theta, (k + 1)s < 1 - \theta, (1 + \theta^2 + 2k)s < (1 - \theta)^2$$

gilt. Wie man unschwer sieht, handelt es sich hierbei gerade um das zweite Ungleichungstriple des letzten Satzes, also dasjenige für  $ks < \theta$ . Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes haben wir dann für ein genügend grosses  $n$  (z.B.  $n \geq \nu_0$ )

$$\begin{aligned} |a_n(z) - a(z)| &\leq s(k - \theta - ks)c^2 \leq s(k - \theta - ks)|\rho_1(z)|^2 \\ |b_n(z) - b(z)| &\leq s(1 - k)c \leq s(1 - k)|\rho_1(z)|^2. \end{aligned}$$

Daher erfüllt der Kettenbruch

$$\frac{a_{n+1}}{|b_{n+1}|} + \frac{a_{n+2}}{|b_{n+2}|} + \dots$$

für  $n \geq \nu_0$  die gewünschten Bedingungen im letzten Satz und damit ist er also gleichmässig konvergent in  $D$ , was wir beweisen wollten.  $\square$

Eine Anwendung dieses Satzes ist das folgende Korollar:

**Korollar 2.7.** Seien  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $a_i \rightarrow a \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}$  eine komplexe Variable.

(1) Wenn  $a = 0$ , dann gibt es für jede Kreisscheibe  $\overline{B}_r(0)$  mit  $r \in (0, \infty)$  einen Index  $\nu_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $\nu \geq \nu_0$  der Kettenbruch

$$\frac{a_\nu z}{|1|} + \frac{a_{\nu+1} z}{|1|} + \frac{a_{\nu+2} z}{|1|} + \dots$$

gleichmässig konvergiert.

- (2) Wenn  $a \neq 0$ , dann gibt es für jedes  $r \in (0, \infty)$  auf dem Komplement des Schnittes  $\overline{B}_r(0)$  mit der Gerade, die von  $-\frac{1}{4a}$  entgegen dem Nullpunkt ins Unendliche führt, einen Index  $\nu_0$ , so dass für alle  $\nu \geq \nu_0$  der Kettenbruch

$$\frac{a_\nu z}{|1|} + \frac{a_{\nu+1} z}{|1|} + \frac{a_{\nu+2} z}{|1|} + \dots$$

gleichmässig konvergiert.

*Beweis.* Für den Beweis wollen wir den Satz 2.37 verwenden. Wir betrachten nach diesem Satz also die quadratische Gleichung

$$\rho^2 - \rho - az = 0.$$

- (1) Für  $a = 0$  haben wir  $\rho(\rho - 1) = 0$  und damit sind die Wurzeln  $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0$ . Damit sind auf  $\overline{B}_r(0)$  die Bedingungen des Satzes erfüllt.
- (2) Für  $a \neq 0$  ist die betrachtete Menge in Abbildung 12 veranschaulicht. Die beiden Wurzeln der Gleichung sind

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4az}}{2},$$

wobei  $\operatorname{Re}(\sqrt{1 + 4az}) \geq 0$  und stellen stetige Funktionen von  $z$  dar. Beachte, dass die Wurzeln bloss auf dem Schnitt gleichen Absolutbetrag haben, denn nur dort ist der Radikand gleich Null oder in  $\mathbb{R}_{<0}$ . In der betrachteten Menge gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\rho_1| &\leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4|az|}}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4|a|r}}{2} \\ |\rho_1| &> \frac{|\rho_1| + |\rho_2|}{2} \geq \frac{|\rho_1 + \rho_2|}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deshalb gibt es zwei positive Zahlen  $c, C$  und ein  $\theta \in (0, 1)$  für welche wieder die Bedingungen des Satzes 2.37 erfüllt sind und damit folgt die Behauptung. Wir bemerken noch, dass die Aussage auf jedem Schnitt des Strahls mit einer kompakten Menge gilt.

□

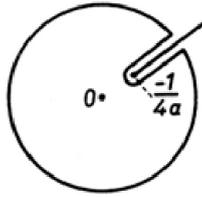


Abbildung 12: Skizze zur betrachteten Menge im Korollar (Strahl).

Man findet noch mehr:

**Satz 2.38.** Wenn die Koeffizienten des  $C$ -Kettenbruchs

$$1 + \frac{a_1 z}{|1|} + \frac{a_2 z^2}{|1|} + \dots \quad \text{mit } a_k \neq 0$$

einen Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \neq 0$  haben, dann ist der Kettenbruch in  $\mathbb{C} \setminus \{\text{Strahl}\}$  eine bis auf etwaige Pole reguläre, aber nicht rationale Funktion  $F(z)$ , die in der Umgebung des Nullpunkts auch gleich der korrespondierenden Reihe ist. In den Polen ist der Kettenbruch unwesentlich divergent.

*Beweis.* Sei  $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\text{Strahl}\}$  ein kompaktes Gebiet mit  $0 \in K$ . Nun ist der Kettenbruch, wenn  $n$  genügend gross gewählt wird, in  $K$  gleichmässig konvergent, nach vorherigem Satz. Nach dem Satz 2.31 ist er also im Innern von  $K$  eine reguläre Funktion und ausserdem in der Umgebung des Nullpunktes gleich seiner korrespondierenden Reihe  $\mathcal{P}_n(z)$ . Wir wollen deshalb diese Funktion im Innern von  $K$  überall mit  $\mathcal{P}_n$  bezeichnen. Den Rest des Beweises können wir wörtlich vom Satz 2.34 übernehmen, wobei nur an die Stelle des Bereichs  $|z| < 1/4g'$  das Innere von  $K$  zu treten hat.  $\square$

Mit diesen Konvergenzkriterien in der Hand wollen wir nun nochmals die Korrespondenzformeln im Satz von Gauss betrachten. Wie man leicht sieht, konvergieren die Koeffizienten  $a_k$  in der Korrespondenzformel für die hypergeometrische Funktion gegen  $-1/4$ . Wollen wir den Satz 2.38 anwenden, so müssen wir einen Schnitt vom Punkt  $+1$  nach  $+\infty$  ausführen. Gehen wir zum reziproken Wert über, ergibt sich also für alle  $z$ , die nicht dem Schnitt angehören die Formel

$$\frac{F(a, b+1; c+1; z)}{F(a, b; c; z)} = \frac{1}{|1|} + \frac{a_1 z}{|1|} + \frac{a_2 z^2}{|1|} + \dots, \quad (2.139)$$

wobei

$$a_{2k} = -\frac{(b+k)(c-a+k)}{(c+2k-1)(c+2k)}, \quad a_{2k+1} = -\frac{(a+k)(c-b+k)}{(c+2k)(c+2k+1)}.$$

Unter dem Quotienten links hat man ausserhalb der Konvergenzkreisscheibe, diejenige analytische Fortsetzung zu verstehen, die man ohne Überschreitung des Schnittes erhält. Daraus ergibt sich insbesondere, dass sich der Quotient auf der linken Seite in der zerschnittenen Ebene wirklich eindeutig analytisch fortsetzen lässt und bis auf die Pole dort

regulär ist. Für Zähler und nenner alleine lässt sich nichts schliessen; jedoch ist aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe bekannt, dass sie selbst überall regulär sind.

Die Teilzähler in den Korrespondenzformeln für  $F(a; c; z)$  und  $F(a; z)$  konvergieren gegen Null. Die betreffenden Kettenbrüche sind also meromorphe Funktionen, die in der Umgebung des Nullpunktes mit ihrer korrespondierenden Reihen übereinstimmen. Da dasselbe aber auch für die linken Seiten dieser Korrespondenzformeln gilt, kann man die Korrespondenzzeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzen, wobei nur in den Polen wieder unwesentliche Divergenz stattfindet.

### 3 Randwertprobleme holomorpher Funktionen

#### 3.1 Cayley-Abbildung und ein paar nützliche Formeln

Wir erinnern an die biholomorphe Abbildung  $\alpha : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}, w \mapsto i \frac{1+w}{1-w}$ . Diese nennen wir *Cayley-Abbildung*. Wie man durch eine leichte Rechnung feststellt hat die inverse Abbildung die Form  $\beta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i} = \frac{iz+1}{iz-1}$ . Als Möbiustransformationen handelt es sich, ausser im Punkt 1 bzw.  $-i$ , um auf ganz  $\mathbb{C}$  analytische Funktionen. Für jedes  $c \geq 0$  bildet  $\beta$  die Menge  $\{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > c\}$  auf die Kreisscheibe

$$\left| w - \frac{c}{1+c} \right| < \frac{1}{1+c}$$

ab und die Gerade  $\text{Im}(z) = c$  wird auf den Kreis  $\left| w - \frac{c}{1+c} \right| = \frac{1}{1+c}$  abgebildet, ohne den Punkt 1. Wie man leicht sieht, gilt  $\alpha(1) = \infty$  und  $\beta(\infty) = 1$ . Also bildet  $\beta$  die erweiterte Zahlengerade  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  nach  $\partial\mathbb{E} =: \Gamma$  ab.

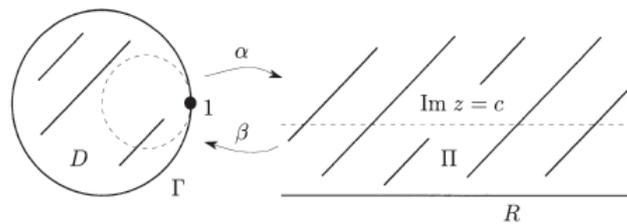


Abbildung 13: Abbildungsverhalten der Cayley-Abbildung, wobei  $D = \mathbb{E}, \Pi = \mathbb{H}$ .

Manchmal ist es nötig in Integralen eine Koordinatentransformation durchzuführen. In einem ersten Schritt wollen wir ein normiertes Lebesgue-Mass auf der Menge  $\Gamma \setminus \{1\}$  konstruieren. Wir beginnen mit einem äusseren Lebesgue-Mass  $\lambda$  auf den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Die Menge  $[0, 2\pi)$  ist als Elementarfigur messbar und das Integral über diese Menge ist damit definiert für einen geeigneten Integranden. Wir definieren das "normierte" Mass  $\nu = \frac{\lambda}{2\pi}$ . Sei nun  $g : [0, 2\pi) \rightarrow \Gamma \setminus \{1\}$  eine messbare Abbildung, so erhalten wir ein Bildmass  $\mu_g := \nu \circ g^{-1}$  auf dem Raum  $\Gamma \setminus \{1\}$ . Per Definition des Bildmasses gilt

$$\mu_g(A) = \nu(g^{-1}(A)).$$

Folglich gilt für jede  $\mu_g$ -a.e. endliche,  $\mu_g$ -messbare Funktion  $f$  (sieht man leicht durch Approximation von  $f$  durch einfache Funktionen) die Gleichung

$$\int_{\Gamma \setminus \{1\}} f(s) d\mu_g(s) = \int_0^{2\pi} f(g(t)) d\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g(t)) d\lambda(t). \quad (3.1)$$

Wählen wir insbesondere für die Funktion  $g : [0, 2\pi) \rightarrow \Gamma \setminus \{1\}$  die Funktion  $e^{i\theta}$ , welche ein Diffeomorphismus ist, dann ist das resultierende Mass  $\mu_g$  wieder ein Lebesgue-Mass.

Insbesondere gilt dann für ein  $f \in L^1(\lambda)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\beta(t))}{1+t^2} dt,$$

wobei wir wie üblich für ein Lebesgue-Integral  $d\theta$  anstatt  $d\lambda(\theta)$  geschrieben haben.

*Beweis.* Wie bekannt ist gilt:

$$\frac{d}{dz} \frac{az+b}{cz+d} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Haben wir nun  $e^{i\theta} = \frac{it+1}{it-1} = \beta(t)$ , so ist  $ie^{i\theta}d\theta = \frac{-2i}{(it-1)^2}dt$  und damit

$$\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{-e^{-i\theta}}{\pi(it-1)^2} = \frac{-1}{(it-1)(it+1)} \frac{dt}{\pi} = \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt.$$

Beachte, dass wir hier implizit den Transformationssatz für Lebesgue-Integrale verwenden.  $\square$

Analog erhalten wir dass für  $F \in L^1(\mathbb{R})$  die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{F(\alpha(e^{i\theta}))}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad (3.2)$$

gilt. Wenn  $z = \alpha(w)$ ,  $w = \beta(z)$ ,  $w = u+iv \in \mathbb{E}$  und  $z = x+iy \in \mathbb{H}$ , dann transformieren sich Flächenintegrale in  $\mathbb{R}^2$  gemäss

$$\begin{aligned} dx dy &= |\det \alpha(w)| du dv = |\alpha'(w)|^2 du dv \\ du dv &= |\det \beta(z)| dx dy = |\beta'(z)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Die Aussage folgt direkt aus der Transformationsformel für Lebesgue-Integral und  $dx dy$ ,  $du dv$  bezeichnen die Lebesgue-Masse auf den korrespondierenden Räumen.

### 3.2 Blasche-Produkte ([2])

Bei einem Blaschke-Produkt handelt es sich um eine beschränkte analytische Funktion in der offenen Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene, welche derart konstruiert ist, dass sie Nullstellen in den Punkten einer gegebenen endlichen oder unendlichen Folge von komplexen Zahlen  $\{d_n\} \subset \mathbb{C}$  hat. Die Blaschke-Produkte wurden im Jahr 1915 von Wilhelm Blaschke eingeführt und wie wir eventuell später noch sehen werden, stehen sie in einer Beziehung zu den sogenannten Hardy Räumen. Bevor wir jedoch zu diesen Produkten kommen müssen wir etwas Vorarbeit leisten.

### 3.2.1 Unendliche Produkte

Für die nachfolgende Diskussion ist es nützlich einiges über unendliche Produkte zu wissen. Zuerst wollen wir die Situation betrachten, wenn die Faktoren komplexe Zahlen sind und danach auf funktionenwertige Faktoren verallgemeinern.

**Definition 3.1.** Sei  $\{a_\nu\}_{\nu \geq k} \subset \mathbb{C}$  eine Folge komplexer Zahlen, dann heisst die Folge der Partialprodukte  $\{\prod_{\nu=k}^n a_\nu\}_{\nu \geq k}$  ein **unendliches Produkt** mit den Faktoren  $a_k$  und wir schreiben abkürzend (analog zu Reihen) dafür

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} a_k.$$

Wenn man wie für Reihen ein unendliches Produkt konvergent nennen, wenn die Folge der Partialprodukte einen Limes hat, dann ergäben sich gewisse Pathologien. Beispielsweise wäre dann ein Produkt bereits konvergent mit Wert 0, wenn nur ein einziges Folgenglied  $a_\nu$  null wäre. Andererseits könnte auch ein Produkt Null werden, wenn kein einziges Folgenglied  $a_k$  Null ist (z.B. wenn stets  $|a_k| \leq q < 1$ ). Aus diesem Grund trifft man bestimmte Vorsichtsmassnahmen gegen Nullkonvergenz und Nullfaktoren. Wir spalten die ursprünglichen Partialprodukte auf

$$\prod_{\nu=k}^n a_\nu = a_k a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{m-1} \underbrace{\prod_{\nu=m}^n a_\nu}_{=: p_{m,n}} \quad \text{mit } k \leq m \leq n \quad (3.3)$$

und führen damit neue Partialprodukte  $p_{m,n}$  ein. Man nennt nun ein unendliches Produkt  $\prod_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$  **konvergent**, wenn es einen Index  $m \in \mathbb{N}$  gibt, so dass die Folge der neuen Partialprodukte  $\{p_{m,n}\}_{n \geq m}$  einen Limes  $\hat{a}_m \neq 0$  hat und man nennt

$$a := a_k a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{m-1} \cdot \hat{a}_m$$

den Wert des Produkts und schreibt wie für Reihen  $\prod_{\nu=k}^{\infty} a_\nu = a$ . Der Wert des Produktes  $a$  ist unabhängig vom Index  $m$ : Per Voraussetzung gilt  $\hat{a}_m \neq 0$  und deshalb notwendigerweise  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq m$ . Also hat für jedes feste  $l > m$  die Folge  $\{p_{l,n}\}_{n \geq l}$  einen Limes  $\hat{a}_l \neq 0$ , welcher nicht verschwindet und es gilt

$$a = a_k a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{l-1} \hat{a}_l.$$

Nicht konvergente Produkte nennt man **divergent**. Dies führt uns zu der folgenden Definition:

**Definition 3.2.** Ein unendliches Produkt  $\prod_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$  konvergiert, wenn

- (i) nur endlich viele Faktoren  $a_\nu$  verschwinden und
- (ii) das Produkt bestehend aus den nicht-verschwindenden Faktoren konvergent ist.

Also hat ein unendliches Produkt den Wert Null genau dann wenn mindestens ein Faktor verschwindet.

**Lemma 3.1.** Falls  $\prod_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  konvergiert, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

*Beweis.* O.B.d.A. nehmen wir an, dass  $a \neq 0$  gilt und mit der obigen Notation haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{a}_n}{\hat{a}_{n-1}} = \frac{a}{a} = 1.$$

□

*Beispiel 3.1.* Wir wollen ein paar einfache Beispiele anschauen:

- (i) Sei  $a_{\nu} := 1 - \frac{1}{\nu^2}, \nu \geq 2$ . Da  $a_{\nu} \neq 0$  können wir die Partialprodukte  $p_{2,n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$  betrachten. Wir sehen also  $\prod_{\nu \geq 2} a_{\nu} = \frac{1}{2}$ .
- (ii) Sei  $a_{\nu} = 1 - \frac{1}{\nu}, \nu \geq 2$ . Es gilt  $p_{2,n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Das Produkt  $\prod_{\nu \geq 2} a_{\nu}$  ist also divergent (da kein Faktor verschwindet), obwohl  $\lim a_{\nu} = 1$ .
- (iii) Sei  $\{a_{\nu}\}_{\nu=0}^{\infty}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $a_{\nu} \geq 0$  und  $\sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - a_{\nu}) = \infty$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=0}^n a_{\nu} = 0$ .

*Beweis.* Da alle Glieder ungleich Null sind können wir die Partialprodukte zu  $m = 0$  betrachten und für diese gilt die Abschätzung ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$0 \leq p_{0,n} = \prod_{\nu=0}^n a_{\nu} \leq e^{-\sum_{\nu=0}^{\infty} (1-a_{\nu})}.$$

Wie man in der Analysis I über vollständige Induktion zeigt, gilt für  $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}$  die sogenannte Bernoulli'sche Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wenn nun  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  genügend gross wählt, dann ist  $x/n \geq -1$  und damit

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x.$$

Wegen  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  haben wir damit

$$1+x \leq e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

und damit ist die Ungleichung gezeigt. Setzt man nun  $x = t - 1$  so haben wir die zweite Ungleichung in der obigen Abschätzung. Betrachten wir nun den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  und benutzen das Sandwich-Kriterium so sehen wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=0}^n a_{\nu} = 0$ . □

Nun wollen wir unendliche Produkte von Funktionen studieren, wobei diese auf einem allgemeinen lokal-kompakten metrischen Raum  $X$  definiert sein sollen, d.h. jede Umgebung eines jedes Punktes in  $X$  enthält eine kompakte Umgebung. Bekanntlich stimmen für diese Räume die Begriffe *kompakte Konvergenz* und *lokal gleichmässige Konvergenz* überein.

Für eine Folge  $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  heisst das unendliche Produkt  $\prod_{\nu \in \mathbb{N}} f_\nu$  **kompakt konvergent** in  $X$ , wenn es zu jedem Kompaktum  $K \in \text{Compact}(X)$  eine Index  $m = m_K$  gibt, so dass die Folge  $p_{m,n} := f_m f_{m+1} \cdots f_n$  ( $n \geq m$ ) in  $K$  gleichmässig gegen eine in  $K$  nullstellenfreie Funktion  $\hat{f}_m$  konvergiert. (Für die Aussage (iii)-(v) benutze man den Stetigkeitssatz 3.1.2 in [1])

(i) Für jede Punkt  $x \in X$  existiert dann das Produkt

$$f(x) := \prod_{\nu \in \mathbb{N}} f_\nu(x)$$

und wir nennen die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  den **Limes des Produktes**.

(ii) Für den Limes des Produktes schreiben wir  $f = \prod f_\nu$  und auf jedem Kompaktum gilt

$$f|_K = f_1|_K \cdots f_{m-1}|_K \cdot \hat{f}_m.$$

(iii) Konvergiert  $\prod f_\nu$  in  $X$  kompakt gegen  $f$ , so ist  $f$  in  $X$  stetig und die Folge  $f_\nu$  konvergiert in  $X$  kompakt gegen 1.

(iv) Konvergieren die Produkte  $\prod f_\nu, \prod g_\nu$  kompakt gegen  $f$  bzw.  $g$ , dann konvergiert auch  $\prod f_\nu g_\nu$  kompakt in  $X$  und es gilt  $\prod f_\nu g_\nu = f \cdot g$ .

(v) Sei nun  $X = G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und alle  $f_\nu$  holomorph. Dann folgt mit dem Satz von Weierstrass: Jedes in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  kompakt konvergente Produkt  $\prod f_\nu$  von in  $G$  holomorphen Funktionen  $f_\nu$  hat einen in  $G$  holomorphen Limes  $f$ .

*Beispiel 3.2.* Die Funktionen  $f_\nu(z) := \frac{1 + \frac{2z}{2\nu-1}}{1 + \frac{2z}{2\nu+1}}$ ,  $\nu \geq 1$  sind holomorph im Einheitskreis und es gilt

$$p_{2,n} = \frac{1 + \frac{2}{3}z}{\left(1 + \frac{2z}{2n+1}\right)^{-1}} \in \mathcal{O}(\mathbb{E}),$$

also  $\lim p_{2,n} = 1 + \frac{2}{3}z$  und daher konvergiert das Produkt  $\prod_{\nu \geq 1} f_\nu$  in  $\mathbb{E}$  kompakt gegen  $1 + 2z$ .

Wir geben nun ein wichtiges hinreichendes Kriterium an:

**Lemma 3.2.** Es sei  $\{f_\nu\}_{\nu \geq 0} \subset \mathcal{C}(X)$ . Gibt es einen Index  $m$ , so dass jede Funktion  $f_\nu$  einen Logarithmus besitzt und konvergiert  $\sum_{\nu \geq m} \log f_\nu$  in  $X$  kompakt gegen  $s \in \mathcal{C}(X)$ , dann konvergiert das Produkt  $\prod f_\nu$  in  $X$  kompakt gegen

$$f_0 f_1 \cdots f_{m-1} \exp s.$$

*Beweis.* Da die Folge  $s_n := \sum_{\nu=m}^n \log f_\nu$  in  $X$  kompakt gegen  $s$  konvergiert, so konvergiert die Folge  $p_{m,n} = \prod_{\nu=m}^n f_\nu = \exp s_n$  in  $X$  kompakt gegen  $\exp s$ . Da  $\exp s$  nullstellenfrei ist, folgt die Behauptung. Wir haben benutzt, dass aus der kompakten Konvergenz von  $s_n$  gegen  $s$  die kompakte Konvergenz von  $\exp s_n$  gegen  $\exp s$  folgt (siehe dazu 5.4.3 in [1]).  $\square$

Für die Diskussion der Weierstrass-Produkte benötigen wir noch den Begriff der normalen Konvergenz von unendlichen Produkten. Da dieser Begriff eng mit der normalen Konvergenz von Reihen verknüpft ist erinnern wir an deren Definition und bemerken ein paar Punkte:

**Definition 3.3.** Sei  $X$  ein lokal-kompakter metrischer Raum und  $\{f_\nu\} \subset \mathcal{C}(X)$  eine Folge stetiger Funktionen. Die Reihe  $\sum_\nu f_\nu$  heisst **normal konvergent** in  $X$ , wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so dass gilt  $\sum_\nu |f_\nu|_U < \infty$ . ( $|f|_U$  bezeichnet wie üblich die Supremum-Seminorm.)

(Eine alternative Charakterisierung, welche wir später benötigen ist die Folgende:  $\sum_\nu f_\nu$  ist genau dann normal konvergent in  $X$ , wenn für jedes Kompaktum  $K \subset X$  gilt:  $\sum_\nu |f_\nu|_K < \infty$ .)

Aufgrund des Weierstrass'schen Majorantenkriteriums ist jede in  $X$  normal konvergente Reihe auch lokal-gleichmässig konvergent und damit kompakt konvergent. Aus diesem Grund ist dann auch die Limes des Produkts stetig. Ganz trivial ist natürlich die Aussage: Jede Teilreihe einer in  $X$  normal konvergenten Reihe ist normal konvergent in  $X$ . Sehr zentral ist der folgende "Umordnungssatz":

**Satz 3.1.** Konvergiert die Reihe  $\sum_{\nu=0}^\infty f_\nu$  in  $X$  normal gegen  $f$ , dann konvergiert für jede Bijektion  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  die umgeordnete Reihe  $\sum_{\nu=0}^\infty f_{\tau(\nu)}$  auch normal in  $X$ .

*Beweis.* Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung  $U$  in  $X$ , so dass gilt  $\sum_\nu |f_\nu|_U < \infty$ . Nach dem Umordnungssatz komplexer Zahlen (absolut konvergente Reihen lassen sich beliebig umordnen) gilt dann auch  $\sum_\nu |f_{\tau(\nu)}|_U < \infty$ , für jede Bijektion  $\tau$  und es folgt

$$f(x) = \sum f_{\tau(\nu)}(x)$$

und die umgeordnete Reihe konvergiert natürlich normal in  $X$ .  $\square$

Im Folgenden schreiben wir oft die Faktoren eines Produktes  $\prod f_\nu$  in der Form  $f_\nu = 1 + g_\nu$ . Nach dem Gesagten ist dann  $g_\nu$  eine kompakt konvergente Nullfolge, falls das Produkt kompakt konvergiert. Wir formulieren nun die Definition für normale Konvergenz eines unendlichen Produktes:

**Definition 3.4.** Ein Produkt  $\prod f_\nu$  mit  $f_\nu = 1 + g_\nu \in \mathcal{C}(X)$  heisst **normal konvergent** in  $X$ , wenn die Reihe  $\sum_\nu g_\nu$  in  $X$  normal konvergiert.

Aus den erwähnten Fakten über normale Konvergenz von Reihen folgt sofort: Ist  $\prod_{\nu \geq 0} f_\nu$  normal konvergent in  $X$ , so konvergiert

- (a) für jede Bijektion  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  das Produkt  $\prod_{\nu \geq 0} f_{\tau(\nu)}$  normal in  $X$ ,
- (b) jedes Teilprodukt  $\prod_{j \geq 0} f_{\nu_j}$  normal in  $X$ ,
- (c) das Produkt  $\prod f_\nu$  kompakt in  $X$ .

Bis an hin haben wir noch gar nichts über den Limes des Produktes im Zusammenhang mit normaler Konvergenz gesagt. Dies wollen wir nun nachholen:

**Satz 3.2.** Sei  $\prod_{\nu \geq 0} f_\nu$  normal konvergent in  $X$ , mit  $f_\nu \in \mathcal{C}(X)$ . Dann gibt es eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für jede Bijektion  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  das umgeordnete Produkt  $\prod_{\nu \geq 0} f_{\tau(\nu)}$  in  $X$  kompakt gegen  $f$  konvergiert.

*Beweis.* Bekanntlich gilt für  $z \in \mathbb{E}$  die Darstellung  $\log(1+z) = \sum_{\nu \geq 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} z^\nu$ . Damit folgt für  $|z| \leq 1/2$  die Ungleichung:

$$|\log(1+z)| \leq |z|(1+|z|+|z|^2+\dots) \leq 2|z|.$$

Sei nun  $K \subset X$  eine beliebige kompakte Menge und  $g_n := f_n - 1$ . Dann gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$ , da  $g_n$  eine Nullfolge ist, so dass für alle  $n \geq m$  gilt:  $|g_n|_K \leq \frac{1}{2}$ . Für solche  $n$  folgt nun aber auch

$$\log f_n = \sum_{\nu \geq 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} g_n^\nu \in \mathcal{C}(K), \quad |\log f_n|_K \leq 2|g_n|_K.$$

Wir sehen also  $\sum_{\nu \geq m} |\log f_\nu|_K \leq 2 \sum_{\nu \geq m} |g_\nu|_K < \infty$ . Nach dem Umordnungssatz für Reihen konvergiert daher für jede Bijektion  $\sigma$  die Reihe  $\sum_{\nu \geq m} \log f_{\{\sigma(\nu)\}}$  in  $K$  gleichmässig gegen  $\sum_{\nu \geq m} \log f_\nu$  und daher konvergieren nach dem gesagten über kompakte Konvergenz für solche  $\sigma$  die Produkte  $\prod_{\nu \geq m} f_\nu, \prod_{\nu \geq m} f_{\sigma(\nu)}$  in  $K$  gleichmässig gegen dieselbe Grenzfunktion. Da sich eine beliebige Bijektion von  $\tau$  von  $\mathbb{N}$  nur um endlich viele Transpositionen von den betrachteten  $\sigma$  unterscheidet, folgt die Existenz einer Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass jedes Produkt  $\prod_{\nu \geq 0} f_{\sigma(\nu)}$  in  $X$  kompakt gegen  $f$  konvergiert.  $\square$

Es folgt sofort das folgende Korollar:

**Korollar 3.1.** Sei  $f = \prod_{\nu \geq 0} f_\nu$  normal konvergent in  $X$ . Dann folgt:

- (i) Jedes Produkt  $\hat{f}_n := \prod_{\nu \geq 0} f_\nu$  konvergiert normal in  $X$  und es gilt

$$f = f_0 f_1 \cdot \dots \cdot f_{n-1} \hat{f}_n.$$

- (ii) Ist  $\mathbb{N} = \cup_j N_j$  eine endliche oder unendliche Zerlegung von  $\mathbb{N}$  in disjunkte Teilmengen  $\{N_j\}$ , so konvergiert jedes Produkt  $\prod_{\nu \in N_j} f_\nu$  normal in  $X$  und es gilt

$$f = \prod_{j=1}^{\infty} \left( \prod_{\nu \in N_j} f_\nu \right).$$

Für die folgende Diskussion benötigen wir noch einen letzten Satz über unendliche Produkte, jedoch zuerst betrachten wir einen einfacheren Fall:

Die Nullstellenmenge  $\mathcal{N}(f)$  jeder in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorphen Funktion  $f \neq 0$  ist lokal endlich in  $G$  und somit höchstens abzählbar unendlich. Für endlich viele Funktionen  $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{O}(G)$  mit  $f_\nu \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(f_0 \cdot \dots \cdot f_n) &= \bigcup_{\nu=0}^n \mathcal{N}(f_\nu) \\ \text{ord}(f_0 \cdot \dots \cdot f_n, z_0) &= \sum_{\nu=0}^n \text{ord}(f_\nu, z_0).\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung auf unendliche Produkte lautet wie folgt:

**Satz 3.3.** Sei  $f = \prod f_\nu, f_\nu \neq 0$  ein in  $G$  normal konvergentes Produkt von in  $G$  holomorphen Funktionen. Dann gilt  $f \neq 0$  und

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(f) &= \bigcup_{\nu=0}^n \mathcal{N}(f_\nu) \\ \text{ord}(f, z_0) &= \sum_{\nu=0}^n \text{ord}(f_\nu, z_0)\end{aligned}$$

für alle  $z_0 \in G$ .

*Beweis.* Sei  $z_0 \in G$  fixiert. Da  $f(z_0) = \prod f_\nu(z_0)$  konvergiert, gibt es einen Index  $n$  so dass  $f_\nu(z_0) \neq 0$  für alle  $\nu \geq n$ . Nach dem vorherigen Korollar gilt also  $f = f_0 \cdot \dots \cdot f_{n-1} \cdot \hat{f}_n$ , wobei  $\hat{f}_n := \prod_{\nu \geq n} f_\nu \in \mathcal{O}(G)$  nach dem Weierstrass'schen Konvergenzsatz. Es folgt

$$\text{ord}(f, z_0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \text{ord}(f_\nu, z_0) + \underbrace{\text{ord}(\hat{f}_n, z_0)}_{=0}.$$

Damit ist die Summenregel für unendliche Produkte bewiesen. Speziell gilt  $\mathcal{N}(f) = \cup \mathcal{N}(f_\nu)$ . Wegen  $f_\nu \neq 0$  ist jede Menge  $\mathcal{N}(f_\nu)$  abzählbar und deshalb auch die abzählbare Vereinigung  $\mathcal{N}(f)$ . Daraus folgt  $f \neq 0$ .  $\square$

*Bemerkung 3.1.* Dieser Satz gilt bereits, falls die Konvergenz des Produktes in  $G$  nur kompakt ist.

### 3.2.2 Divisoren

Für das Folgende benötigen wir noch den Begriff einer lokal endlichen Teilmenge und den Support (Träger) einer Abbildung:

**Lemma 3.3.** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Bereich und  $A \subset D$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Für jedes  $a \in A$  gibt es eine Umgebung  $U$ , so dass  $|U \cap A| < \infty$ .
- (ii)  $A$  ist abgeschlossen in  $D$  und jeder Punkt  $a \in A$  ist ein isolierter Punkt von  $A$ , d.h. es gibt eine Umgebung  $U$  mit  $U \cap A = \{a\}$ .
- (iii) Für jedes Kompaktum  $K \subset D$  gilt  $|K \cap A| < \infty$ .

Wenn eine Menge  $A$  eine der Bedingungen erfüllt, dann heisst diese **lokal endlich**.

*Beweis.* Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übung. □

**Definition 3.5.** Sei  $D \in \text{Open}(\mathbb{C})$  ein Bereich und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine beliebige Funktion. Dann definieren wir den **Support** von  $f$  als die Nicht-Nullstellenmenge, also

$$\text{supp}(f) := \{x \in D \mid f(x) \neq 0\}.$$

Bei dieser Definition halten wir uns an die Konvention von Remmert [2] und bemerken, dass üblicherweise der Support als Abschluss der Nicht-Nullstellenmenge definiert ist. Damit können wir nun den Begriff eines Divisors einführen, welcher vor allem in der algebraischen Topologie zur Anwendung kommt:

**Definition 3.6.** Eine Abbildung  $\partial : D \rightarrow \mathbb{Z}$  mit lokal endlichem Support in  $D$  heisst **Divisor** in  $D$ .

Wir führen nun eine weitere Notation ein. Die Menge der meromorphen Funktionen auf einem Bereich  $D$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}(D)$ . Ist  $f \neq 0$  meromorph in einem Punkt  $z_0$ , d.h. es gibt eine Umgebung von  $z_0$  in der  $f$  meromorph ist, so hat  $f$  bekanntlich eine Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} a_m (z - z_0)^i \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z}, a_m \neq 0.$$

Die durch diese Gleichung eindeutig bestimmte ganze Zahl  $m$  heisst die **Ordnung** von  $f$  in  $z_0$  und wir setzen  $\text{ord}(f, z_0) := m$ . Es gilt:

- (a)  $\text{ord}(f, z_0) \geq 0 \Leftrightarrow f$  ist holomorph in  $z_0$  und  $z_0$  hat die Nullstellenordnung  $m$  Gleichheit genau dann, wenn  $f$  in  $z_0$  holomorph, sowie nullstellenfrei ist.
- (b)  $\text{ord}(f, z_0) < 0 \Leftrightarrow z_0$  ist ein Pol von  $f$  der Ordnung  $-m$ .

Seien  $f, g \in \mathcal{M}(U)$ , wobei  $U$  eine Umgebung von  $z_0$  ist, dann gelten die folgenden Rechenregeln:

- (i)  $\text{ord}(fg, z_0) = \text{ord}(f, z_0) + \text{ord}(g, z_0)$  (Produktregel)
- (ii)  $\text{ord}(f + g, z_0) \geq \min(\text{ord}(f, z_0), \text{ord}(g, z_0))$ , wobei Gleichheit stets dann besteht, wenn  $\text{ord}(f, z_0) \neq \text{ord}(g, z_0)$ .

Wir bemerken noch, dass wegen dem Identitätssatz die Polstellenmenge nur diskret (für jeden Pol gibt es eine offene Umgebung in der kein weiterer Pol liegt bzw. die Menge der Polstellen besitzt keinen Mengenhäufungspunkt) sein kann und damit liegen in kompakten Teilmengen höchstens endlich viele Pole. Aus dem selben Grund ist die Menge der Nullstellen diskret für  $f \neq 0$ . Wir erhalten damit die Behauptung:

**Behauptung 3.1.** Zu jeder von Null verschiedenen meromorphen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  kann ein Divisor  $(f)$  zugeordnet werden, welcher definiert ist durch

$$(f)(z) := \text{ord}(f, z)$$

Nun definieren wir den wichtigen Begriff des Hauptdivisors:

**Definition 3.7.** Ein Divisor, der gleich dem Divisor einer meromorphen Funktion ist, heisst **Hauptdivisor**.

Für Hauptdivisoren besteht also der Träger aus der Vereinigung der Null- und Postellenmenge (falls  $f \neq 0$ ). Wie man sich leicht überzeugt, gilt:

**Behauptung 3.2.** Die Menge  $\text{Div}(D)$  aller Divisoren in  $D$  ist mit der Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe.

Ein Divisor  $\partial$  heisst **positiv**, in Zeichen  $\partial \geq 0$ , wenn für alle  $z \in D$   $\partial(z) \geq 0$  gilt. Positive Divisoren nennt man aus einfachen Gründen **Nullstellenverteilungen** und holomorphe Funktionen haben positive Divisoren  $(f)$ . Die Menge  $\mathcal{M}(D)^*$  aller in  $D$  meromorphen Funktionen mit diskreter Nullstellenmenge ist eine multiplikative abelsche Gruppe, genauer ist diese Menge die **Einheitengruppe** des Ringes  $\mathcal{M}(D)$  und wenn  $D$  ein Gebiet ist, so ist  $\mathcal{M}(D)^*$  sogar ein Körper. Man verifiziert leicht, dass für einen beliebigen Bereich  $D \subset \mathbb{C}$  gilt:

**Behauptung 3.3.** Die Abbildung  $(\mathcal{M}(D)^*, \cdot) \rightarrow (\text{Div}(D), +), f \mapsto (f)$  ist ein Gruppenhomomorphismus und es gilt

- (1)  $f \in \mathcal{O}(D) \Leftrightarrow (f) \geq 0$
- (2)  $f \in \mathcal{M}(D)^*$  ist invertierbar in  $\mathcal{O}(D)$  (also eine Einheit in der Menge der holomorphen Funktionen)  $\Leftrightarrow (f) = 0$

Wir bemerken noch, dass jeder Divisor  $\partial$  die Differenz zweier positiver Divisoren ist (vgl. Mass und Integral Vorlesung an der ETH):

$$\partial := \partial^+ - \partial^- \text{ mit } \partial^+(z) := \max(0, \partial(z)), \partial^-(z) := \max(0, -\partial(z)) \text{ für } z \in D.$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung:

**Behauptung 3.4.** Wenn  $\partial^+, \partial^-$  Hauptdivisoren in  $D$  sind, dann ist  $\partial$  ein Hauptdivisor in  $D$ .

*Beweis.* Sei  $\partial^+ = (f), \partial^- = (g)$  mit  $f, g \in \mathcal{O}(D)$ . Für  $h := f/g \in \mathcal{M}(D)^*$  gilt dann

$$(h) = (f/g) = (f) - (g) = \partial^+ - \partial^- = \partial.$$

□

Damit können wir eine beliebigen Divisor  $\partial$  durch positive Divisoren darstellen und diese sind wiederum gegeben durch  $\partial^i = (f)$ , wobei  $f$  eine in  $D$  holomorphe Funktion ist.

### 3.2.3 Beschränkte Funktionen in $\mathbb{E}$ und Blaschke-Produkte

Blaschke-Produkte können als spezielle Weierstrass-Produkte betrachtet werden, jedoch werden wir die relevanten Sätze ohne Rückgriff auf diese Theorie beweisen, wie in der Vorlesung. Dennoch möchte ich die grundlegende Idee vorstellen und auf ein paar Punkte eingehen. Die Idee von Weierstrass ist durch die folgenden zwei Konsequenzen des Fundamentalsatzes der Algebra motiviert:

**Satz 3.4.** Jedes Polynom des Grades  $n \in \mathbb{N}$  mit komplexen Koeffizienten, welches nicht identisch verschwindet, besitzt mit Vielfachheit gerechnet genau  $n$  komplexe Nullstellen.

Damit folgt:

- (i) Für jede endliche Folge  $\{c_n\}$  komplexer Zahlen gibt es ein assoziiertes Polynom  $p(z)$ , welches genau in den Punkten  $c_n$  Nullstellen hat und es hat die Form

$$p(z) = \prod_{i \in I} (z - c_i).$$

- (ii) Jede polynomielle Funktion  $p(z)$  in der komplexen Ebene besitzt eine Faktorisierung  $p(z) = a \prod_{i \in I} (z - c_i)$ ,  $a \neq 0$  und die komplexen Zahlen  $c_i$  sind die Nullstellen des Polynoms.

Wenn wir jedoch unendliche Folgen  $\{d_n\}$  betrachten, dann konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_n (z - d_n)$$

im Allgemeinen nicht. Aus diesem Grund kann für unendliche Folgen keine ganze Funktion, wie im endlichen Fall, hingeschrieben werde, welche in den Punkten der unendliche Folge Nullstellen hat. Wie wir gesehen haben ist eine notwendige Bedingung für die Konvergenz eines unendlichen Produkt, dass jeder Faktor  $z - d_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1 strebt. Also liegt es nahe nach Funktionen zu suchen, welche in den Punkten der Folge verschwinden, jedoch in den anderen Punkten ungefähr 1 sind und zusätzlich nicht mehr Nullstellen als die gewünschten liefern. Die sogenannten *elementaren Weierstrass-Faktoren* erfüllen gerade diese Eigenschaften und sie haben die Form:

$$E_0(z) = 1 - z, E_n(z) := E_0(z) \cdot e^{\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k}}. \quad (3.4)$$

Wir sehen, dass diese die folgenden zwei Identitäten erfüllen:

$$E'_n(z) = -z^n e^{\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k}} \text{ für } n \geq 1, \quad (3.5)$$

$$E_n(z) = 1 + \sum_{k>n} a_k z^k \text{ mit } \sum_{k>n} |a_k| = 1 \text{ für } n \geq 0. \quad (3.6)$$

*Beweis.* Wir definieren  $t_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k}$  und sehen

$$t'_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

Damit lässt sich  $E_n$  schreiben als  $E_n(z) = (1-z)e^{t_n(z)}$  und wir haben

$$E'_n(z) = -e^{t_n(z)} + (1-z)t'_n(z)e^{t_n(z)} = -z^n e^{t_n(z)}$$

und dieser Ausdruck entspricht gerade der Gleichung 3.5.  $\sum_k a_k z^k$  bezeichne die Taylor-Reihe von  $E_n$  um  $z=0$ . Der Fall  $n=0$  der zweiten Gleichung ist trivial. Für  $n \geq 1$  gilt

$$\sum k a_k z^{k-1} = \frac{d}{dz} \sum a_k z^k = E'_n(z) = -z^n e^{t_n(z)}.$$

Da die Funktion rechts in  $z=0$  eine Nullstelle  $n$ -ter Ordnung hat und da alle Taylor-Koeffizienten von  $e^{t_n(z)}$  um  $z=0$  positiv sind, sehen wir

$$a_1 = \dots = a_n = 0 \text{ und } a_k \leq 0, \text{ also } |a_k| = -a_k \text{ für } k > n.$$

Wegen  $a_0 = E_n(0) = 1$  und  $0 = E_n(1) = 1 + \sum_{k>n} a_k$  folgt die Gleichung 3.6.  $\square$

Aus der Gleichung 3.6 ergibt sich sofort

**Korollar 3.2.** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq 1$  gilt

$$|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.7)$$

Beachte auch, dass für  $|z| < 1$  gilt:

$$E_0(z) = 1 - z = \exp \log(1-z) = \exp \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right).$$

Mit dem obigen Korollar können wir nun auf  $\mathbb{C}$  zu einer gegebenen Folge  $\{d_n\}$  eine ganze Funktion definieren, welche in den Punkten  $d_n$  Nullstellen hat und als Produkt dieser elementaren Weierstrass-Faktoren geschrieben werden kann. Und genau dies ist die Idee von Weierstrass.

Soweit zur Idee von Weierstrass-Produkten. Nun wollen wir wie folgt vorgehen:

- Wir definieren was wir unter einem Weierstrass-Produkt verstehen wollen.

- Dann formulieren und beweisen wir den Weierstrass'schen Produktsatz auf der ganzen komplexen Ebene.
- Anschliessend beweisen wir den Weierstrass'schen Produktsatz für einen beliebigen Bereich  $D \subset \mathbb{C}$  und fokussieren uns dann auch die Blaschke-Produkte.

Sei also  $\partial \neq 0$  wieder ein positiver Divisor im Bereich  $D$ . Der Träger  $\text{supp}(\partial) =: T$  ist, wie erwähnt *höchstens abzählbar*, da  $T$  lokal endlich in  $D$  ist.

**Definition 3.8.** Eine Folge komplexer Zahlen  $\{d_i\}_{i \in I} \subset T \setminus \{0\}$  heisst eine zum **Divisor** **gehörende Folge**, wenn jeder Punkt  $d \in T \setminus \{0\}$  in dieser Folge genau  $\partial(d)$ -mal vorkommt.

**Definition 3.9.** Ein möglicherweise unendliches Produkt  $f(z) = z^{\partial(0)} \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  heisst nun **Weierstrass-Produkt** zum Divisor  $\partial \geq 0$  auf  $D$ , falls gilt

- (i)  $f_k$  ist holomorph in  $D$ ,
- (ii)  $f_k$  hat genau eine Nullstelle und zwar in  $d_k$  von der Multiplizität 1,
- (iii) das Produkt  $\prod_k f_k$  konvergiert normal in  $D$ .

Wir zeigen nun sofort:

**Satz 3.5.** Ist  $f$  ein Weierstrass-Produkt zum Divisor  $\partial \geq 0$  im Bereich  $D$ , so gilt  $(f) = \partial$ , d.h. die Nullstellenmenge von  $f \in \mathcal{O}(D)$  ist der Träger  $T$  von  $\partial$  und jeder Punkt  $d \in T$  ist eine Nullstelle von  $f$  der Ordnung  $\partial(d)$ .

*Beweis.* Wegen der normalen Konvergenz gilt  $f \in \mathcal{O}(D) (\Rightarrow (f) \geq 0)$ . Da jeder Punkt  $d \in T \setminus \{0\}$  genau  $\partial(d)$  in der Folge  $\{d_k\}$  vorkommt, so folgt  $\text{ord}(f, z) = \partial(z)$  für alle  $z \in D$  aus den Bedingungen (i), (ii) und 3.3, angewandt auf die Zusammenhangskomponenten von  $D$ . Damit haben wir  $(f) = \partial$ .  $\square$

Aus der Definition folgt sofort das Lemma:

**Lemma 3.4.** Ist  $f(z) = z^{\partial(0)} \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  ein Weierstrass-Produkt zu  $\partial \geq 0$  und  $f'(z) = z^{\partial'(0)} \prod_{k=1}^{\infty} f'_k(z)$  ein Weierstrass-Produkt zu  $\partial' \geq 0$ , dann ist

$$g(z) = z^{\partial(0)+\partial'(0)} \prod g_k \text{ mit } g_{2k} := f'_k, g_{2k-1} := g_k \quad (3.8)$$

ein Weierstrass-Produkt zu  $\partial + \partial'$  in  $D$ .

Wir werden nun zu jedem positiven Divisor Weierstrass-Produkte konstruieren. (Das ist mehr als eine Funktion  $f \in \mathcal{O}(D)$  mit  $(f) = \partial$  zu finden.) Wir müssen also holomorphe Funktionen finden, so dass die obigen Bedingungen erfüllt werden. Im Fall  $D = \mathbb{C}$  können wir diese durch die elementaren Weierstrass-Faktoren angeben, jedoch im Allgemeinen Fall, wenn  $D$  ein Bereich ist, ist dies wie wir noch sehen werden etwas komplizierter. Also ist ab nun  $\partial \geq 0$  ein positiver Divisor und  $\{d_n\}$  eine Folge zu  $\partial$ .

**Lemma 3.5.** Ist  $\{n_k\}$  eine beliebige Folge natürlicher Zahlen, so dass für jedes  $r > 0$  gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{r}{d_k} \right|^{n_k+1} < \infty$$

dann ist

$$f(z) = z^{\partial(0)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \left( \frac{z}{d_k} \right) \quad (3.9)$$

ein Weierstrass-Produkt zu  $\partial$ .

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, dass  $\partial$  unendlich ist. Nach Abschätzung 3.7 gilt

$$\left| E_{n_k} \left( \frac{z}{d_k} - 1 \right) \right| \leq \left| \frac{r}{d_k} \right|^{n_k+1}$$

für alle  $z \in B_r(0)$  und  $k$  mit  $|d_k| \geq r$ . Da  $\lim_k |d_k| = \infty$ , gibt es zu jede  $r > 0$  einen Index  $k(r) \in \mathbb{N}$ , so dass  $|d_k| \geq r$  für  $k > k(r)$ . Daher folgt

$$\sum_{k > k(r)} |E_{n_k}(z/d_k) - 1|_{B_r(0)} \leq \sum_{k > k(r)} |r/d_k|^{n_k+1} < \infty$$

für jedes  $r > 0$ . Damit ist die normale Konvergenz des Produkts gezeigt. Da der Faktor  $E_{n_k}(z/d_k) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  in  $\mathbb{C} \setminus \{d_k\}$  nullstellenfrei ist und in  $d_k$  von erster Ordnung verschwindet, so haben wir ein Weierstrass-Produkt zum Divisor  $\partial$ .  $\square$

**Satz 3.6.** (Produktsatz in  $\mathbb{C}$ )

Zu jedem Divisor  $\partial \geq 0$  in  $\mathbb{C}$  existieren Weierstrass-Produkte der Form

$$z^{\partial(0)} \prod_{k \geq 1} E_{k-1} \left( \frac{z}{d_k} \right), \quad (3.10)$$

wobei  $\{d_k\}$  die zum Divisor gehörende Folge ist.

*Beweis.* Wie im letzten Beweis wähle man zu jedem  $r > 0$  einen Index  $k(r) \in \mathbb{N}$ , so dass  $|d_k| > 2r$  für  $k > k(r)$ . Dann folgt  $\sum_{k > k(r)} |r/d_k|^k < \sum_{k > k(r)} 2^{-k} < \infty$ . Also gilt das vorherige Lemma für  $n_k = k - 1$  und damit ist die Aussage bewiesen.  $\square$

Im folgenden Korollar fassen wir ein paar wichtige Folgerungen zusammen:

**Korollar 3.3.**

- (1) Jeder Divisor in  $\mathbb{C}$  ist ein Hauptdivisor. (Existenzsatz)
- (2) Jede ganze Funktion  $f \neq 0$  lässt sich in der Form

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{k \geq 1} E_{n_k} \left( \frac{z}{d_k} \right) \quad (3.11)$$

schreiben, wobei  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  und  $z^m \prod_{k \geq 1} E_{n_k}(z/d_k)$  ein (eventuell leeres) Weierstrass-Produkt zum Divisor  $(f)$  ist. (Faktorisierungssatz)

- (3) Zu jeder in  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktion  $h$  gibt es zwei ganze Funktionen  $f, g$  ohne gemeinsame Nullstellen in  $\mathbb{C}$ , so dass gilt  $h = f/g$ . (Quotientendarstellung meromorpher Funktionen)

*Beweis.* Wir beweisen nur den Faktorisierungssatz und die Quotientendarstellung.

(2): Nach dem Produktsatz gibt es ein Weierstrass-Produkt  $f'$  zum Divisor  $(f)$ . Dann ist  $f/f'$  eine Funktion ohne Nullstellen und von der Form  $\exp g$  (vgl. lokaler Logarithmus) mit  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ .

(3): Sei  $h \neq 0$ . Durch  $\partial^+(z) := \max(0, \text{ord}(h, z))$ ,  $\partial^-(z) := \max(0, -\text{ord}(h, z))$ , für  $z \in \mathbb{C}$ , werden positive Divisoren definiert. Es gilt  $(h) = \partial^+ - \partial^-$ . Man wähle  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  mit  $(g) = \partial^-$ . Es gilt  $g \neq 0$ . Für  $f := gh$  folgt  $(f) = (g) + (h) = \partial^+ \geq 0$  und daher ist  $f$  holomorph in  $\mathbb{C}$ . Nach Konstruktion ist  $\mathcal{N}(f) \cap \mathcal{N}(g)$  leer.  $\square$

Nun wollen wir die erhaltenen Resultate für ganze Funktionen auf holomorphe Funktionen in beliebigen Bereichen  $D \subset \mathbb{C}$  übertragen. Ein Ziel ist zu zeigen, dass jeder Divisor in  $D$  ein Hauptdivisor ist. Dazu konstruieren wir wieder zu jedem positiven Divisor Weierstrass-Produkte, welche wieder aus Weierstrass-Faktoren aufgebaut sein werden und normal konvergieren in Bereichen, die  $\mathbb{C} \setminus \partial D$  umfassen. Wie bereits am Anfang des Abschnitts erwähnt sind spezielle Weierstrass-Produkte in  $\mathbb{E}$  die Blaschke-Produkte. Diese dienen unter anderem der Konstruktion von beschränkten Funktionen in  $\mathcal{O}(\mathbb{E})$  zu vorgegebenem positiven Divisor  $\partial$ .

Wieder sei  $\partial$  ein positiver Divisor in  $D$  mit Träger  $T$  (höchstens abzählbar) und wir bilden analog zum Fall  $\mathbb{C}$  aus den Punkten in  $T$  eine Folge  $\{d_k\}$  derart, dass jeder der Punkte  $d \in T$  genau  $\partial(d)$ -mal in dieser Folge vorkommt. Man beachte, dass wir diesmal den Punkt 0 nicht ausschliessen. An die Stelle des Lemmas 3.5 tritt das Folgende:

**Lemma 3.6.** Gibt es eine Folge  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus D$  und eine Folge  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ , so dass für alle  $r > 0$  gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r(d_k - c_k)|^{n_k+1} < \infty, \quad (3.12)$$

dann konvergiert das Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \left( \frac{d_k - c_k}{z - c_k} \right) \quad (3.13)$$

in  $\mathbb{C} \setminus \overline{\{c_k\}} \supset D$  normal und ist in  $D$  ein Weierstrass-Produkt zum Divisor  $\partial$ .

*Beweis.* Wir setzen  $S := \overline{\{c_k\}}$ . Für  $f_k(z) := E_{n_k} \left( \frac{d_k - c_k}{z - c_k} \right)$  gilt

$$f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus S), f_k(z) \neq 0, \text{ falls } z \neq d_k, \text{ ord}(f_k, d_k) = 1. \quad (3.14)$$

Sei  $K \in \text{Compact}(\mathbb{C} \setminus S)$ . Dann gilt für alle  $z \in K$ :  $|z - c_k| \geq d(K, c_k) \geq d(K, S) > 0$  und damit

$$\left| \frac{d_k - c_k}{z - c_k} \right|_K \leq r |d_k - c_k| \text{ mit } r := \frac{1}{d(K, S)}.$$

Da  $\lim |d_k - c_k| = 0$  wegen 3.12, so gibt es zu jedem  $r$  einen Index  $k(K, r) \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k > k(K, r)$  gilt:  $r|d_k - c_k| < 1$ . Da  $|E_n - 1| \leq |z|^{n+1}$  für  $z \in \mathbb{E}$  haben wir

$$\sum_{k > k(K, r)} |f_k - 1|_K \leq \sum_{k > k(K, r)} |r(d_k - c_k)|^{n_k+1} < \infty.$$

Damit ist die normale Konvergenz von  $\prod_k f_k$  in  $\mathbb{C} \setminus S$  gezeigt. Wegen 3.14 ist dieses Produkt in  $D$  ein Weierstrass-Produkt zu  $\delta$ .  $\square$

**Korollar 3.4.** Falls  $\sum_k |d_k - c_k|^{n+1} < \infty$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so ist das Produkt  $\prod_{k \in \mathbb{N}} E_k \left( \frac{d_k - c_k}{z - c_k} \right)$  ein Weierstrass-Produkt zu  $\delta$  in  $D$ .

*Beweis.* Es gilt die Gleichung 3.12 mit  $n_k = n$  und wende obiges Lemma an.  $\square$

Offensichtlich ist der Konvergenzbereich des im obigen Lemma konstruierten Produktes im Allgemeinen grösser als der Bereich  $D$ . Da  $T$  die Nullstellenmenge des Produktes ist, ist  $T$  abgeschlossen in diesem grösseren Bereich. Wir definieren nun die **Ableitung** (nach Cantor) einer diskreten Menge  $T$  als die Menge der Häufungspunkte von  $T$  in  $\mathbb{C}$ , also  $\partial T := \overline{T} \setminus T$ . Wir bemerken folgendes Korollar:

**Korollar 3.5.** Sei  $T$  eine diskrete Menge in  $\mathbb{C}$ , dann ist die Ableitung  $\partial T$  abgeschlossen in  $\mathbb{C}$  und der Bereich  $\mathbb{C} \setminus \partial T$  ist der grösste Teilbereich von  $\mathbb{C}$  in dem  $T$  abgeschlossen ist.

*Beweis.* Übung.  $\square$

Aufgrund dieses Korollars lässt sich jeder positive Divisor  $\delta$  in  $D$  mit Träger  $T$  als ein positiver Divisor in  $\mathbb{C} \setminus \partial T \supset D$  mit gleichem Träger auffassen. Dazu setzt man einfach  $\delta(z) = 0$  für  $z \in (\mathbb{C} \setminus \partial T) \setminus D$ . Offensichtlich gilt  $\partial T \subset \partial D$ . Es folgt nun:

**Satz 3.7.** (Produktsatz für Bereiche der komplexen Ebene)

Sei  $\delta$  ein positiver Divisor auf dem Bereich  $D \subset \mathbb{C}$  mit zugehöriger Folge  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Gibt es eine Folge  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \partial T$ , so dass  $\lim |d_k - c_k| = 0$ , dann ist  $\prod_k E_{k-1} \left( \frac{d_k - c_k}{z - c_k} \right)$  ein Weierstrass-Produkt zum Divisor  $\delta$  in  $\mathbb{C} \setminus \partial T$ .

*Beweis.* Wegen  $\lim |d_k - c_k| = 0$  folgt  $\sum |r(d_k - c_k)|^k < \infty$  für jedes  $r > 0$ . Daher ist die Bedingung 3.12 erfüllt mit  $n_k = k - 1$ . Nun gilt per Voraussetzung  $\overline{\{c_k\}} \subset \partial T$  (beide Mengen sind sogar gleich). Daher folgt die Behauptung aus dem Lemma dieser Abschätzung.  $\square$

Leider existieren Folgen  $\{c_k\} \subset \partial T$  oder nur  $\{c_k\} \subset \mathbb{C} \setminus D$  im Allgemeinen nicht, z.B. nicht für Divisoren in  $D = \mathbb{H}$  mit Träger  $T = \{i, 2, i, 3i, \dots\}$ . Aber es gilt zum Glück:

**Satz 3.8.** Ist  $\partial T$  nicht leer und ist jede Menge  $T_\epsilon := \{z \in T | d(\partial T, z) \geq \epsilon\}$  für  $\epsilon > 0$  endlich, so existiert eine Folge  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \partial T$  mit  $\lim |d_k - c_k| = 0$ .

*Beweis.*  $\partial T$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{C}$  und damit gibt es zu jedem  $d_k$  ein  $c_k \in \partial T$ , so dass  $|d_k - c_k| = d(\partial T, d_k)$ . Wäre  $d_k - c_k$  keine Nullfolge, so gäbe es ein  $\epsilon > 0$  mit  $|d_k - c_k| \geq \epsilon$  für unendlich viele Indizes  $k$ , jedoch muss per Voraussetzung  $T_\epsilon$  endlich sein.  $\square$

Es gilt die folgende nützliche Behauptung:

**Behauptung 3.5.** Ist  $T$  beschränkt und nicht endlich, so ist die Ableitung nicht leer und jede Menge  $T_\epsilon$  für  $\epsilon > 0$  ist endlich.

*Beweis.* Wäre sie nicht endlich, dann hätte  $T_\epsilon$  einen Mengenhäufungspunkt  $d^* \in \partial T$ , was jedoch nicht möglich ist, da für alle  $z \in T_\epsilon$  gilt:  $|d^* - z| \geq d(\partial T, z) \geq \epsilon$ .  $\square$

Damit folgt:

**Satz 3.9.** Zu jedem positiven Divisor  $\partial$  in  $D$  mit beschränktem, nicht endlichem Träger  $T$  existiert eine Folge  $\{c_k\} \subset \partial T$  mit  $\lim |d_k - c_k| = 0$ .

Insbesondere ist damit auch klar, dass in beschränkten Bereichen jeder Divisor ein Hauptdivisor ist. (Dies ist ein Spezialfall des Existenzsatzes.) Nun wollen wir den folgenden allgemeinen Produktsatz beweisen:

**Satz 3.10.** (Allgemeiner Produktsatz) Es sein  $D \subset \mathbb{C}$  ein beliebiger Bereich in  $\mathbb{C}$ . Dann existiert zu jedem positiven Divisor  $\partial$  mit Träger  $T$  Weierstrass-Produkte in  $\mathbb{C} \setminus \partial T$ . Sie konvergieren also im Allgemeinen in einem grösseren Bereich als  $D$ .

Die Beweisidee ist den Divisor  $\partial$  als Summe zweier Divisoren zu schreiben, zu denen es Weierstrass-Produkte in  $\mathbb{C} \setminus \partial T$  gibt. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz aus der Topologie:

**Satz 3.11.** (Hilfssatz)

Es sei  $A$  eine diskrete Menge in  $\mathbb{C}$ , so dass die Ableitung nicht leer ist und

$$A_1 := \{z \in A \mid |z| \cdot d(\partial A, z) \geq 1\} \text{ und } A_2 := \{z \in A \mid |z| \cdot d(\partial A, z) < 1\}.$$

Dann ist  $A_1$  abgeschlossen in  $\mathbb{C}$  und jede Menge  $A_2(\epsilon) := \{z \in A_2 \mid d(\partial A, z) \geq \epsilon\}$  für  $\epsilon > 0$  ist endlich.

*Beweis des Hilfssatzes.*

- (1) Widerspruchsbeweis: Sei  $a \in \mathbb{C} \setminus A_1$  ein Mengenhäufungspunkt von  $A_1$ , dann wäre  $a \in \partial A$  und es gäbe eine Folge  $\{a_n\} \subset A_1$  mit  $a_n \rightarrow a$ . Wegen  $d(\partial A, a_n) \leq |a - a_n|$  wäre  $|a_n| \cdot d(\partial A, a_n)$  eine Nullfolge im Widerspruch zur Definition von  $A_1$ . Also gilt  $\overline{A_1} = A_1$ .
- (2) Widerspruchsbeweis: Für alle  $z \in A_2(\epsilon)$  gilt  $|z| < 1/\epsilon$ . Wir nehmen an es gibt ein  $\epsilon'$ , so dass  $A_2(\epsilon')$  nicht endlich ist. Dann hätte aber  $A_2(\epsilon')$  einen Häufungspunkt  $a \in \partial A$ , was nicht möglich ist, denn es gilt ja für alle  $z \in A_2(\epsilon')$  die Ungleichung  $|a - z| \geq d(\partial A, z) \geq \epsilon'$ .

$\square$

*Beweis des allgemeinen Produktsatzes.*

Wir fassen  $\partial$  als Divisor in  $\mathbb{C} \setminus \partial T$  auf. Wir dürfen  $\partial T \neq 0$  annehmen, denn sonst

sind wir bei Fall  $D = \mathbb{C}$ . Die Mengen  $T_1, T_2$  seien wie im Hilfssatz definiert. Es gilt  $\partial T_1 = \partial T, \partial T_2 = \emptyset$ . Da  $T_1, T_2$  lokal endliche Mengen sind in  $\mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{C} \setminus \partial T$ , wird durch

$$\partial_j(z) = \begin{cases} \partial(z), & \text{wenn } z \in T_j \\ 0, & \text{wenn } z \notin T_j \end{cases} \text{ für } j = 1, 2$$

ein positiver Divisor  $\partial_1$  bzw.  $\partial_2$  in  $\mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{C} \setminus \partial T$  mit Träger  $T_1$  bzw.  $T_2$  definiert. Da die zwei Mengen  $T_i$  eine disjunkte Zerlegung von  $T$  bilden, so gilt  $\partial = \partial_1 + \partial_2$  in  $\mathbb{C} \setminus \partial T$ . Nach dem Produktsatz für die ganze komplexe Ebene gibt es zu  $\partial_1$  Weierstrass-Produkte in  $\mathbb{C}$ . Da alle Mengen  $T_2(\epsilon)$  endlich sind, gib es nach dem obigen Produktsatz ein Weierstrass-Produkt in  $\mathbb{C} \setminus \partial T$ . Also gibt es dann auch Weierstrass-Produkte zu  $\partial = \partial_1 + \partial_2$  in  $\mathbb{C} \setminus \partial T$ .  $\square$

Wie für die ganze komplexe Ebene erhalten wir aus dem allgemeinen Weierstrass'schen Produktsatz das folgende Korollar (Beweise verlaufen analog):

**Korollar 3.6.**

- (1) In jedem Bereich  $D \subset \mathbb{C}$  ist jeder Divisor ein Hauptdivisor. (Existenzsatz)
- (2) Jede in einem beliebigen Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $f \neq 0$  lässt sich in der Form

$$f = u \prod_{k=1}^{\infty} f_k \tag{3.15}$$

schreiben, wobei  $u$  eine Einheit im Ring  $\mathcal{O}(G)$  und  $\prod_k f_k$  ein (eventuell leeres) Weierstrass-Produkt zum Divisor  $(f)$  in  $G$  ist. (Faktorisierungssatz) Bemerke, dass die Einheit  $u$  i.A. nicht mehr eine Exponentialfunktion ist. (Dies ist nur für homologisch einfach zusammenhängende Gebiete korrekt)

- (3) Zu jeder in  $G$  meromorphe Funktion  $h$  gibt es zwei in  $G$  holomorphe Funktionen  $f, g$  ohne gemeinsame Nullstellen in  $G$ , so dass  $h = f/g$  gilt. Insbesondere ist der Körper  $\mathcal{M}(G)$  der Quotientenkörper des Integritätsringes  $\mathcal{O}(G)$

Wie wir mit dem allgemeinen Produktsatz von Weierstrass gesehen haben, können die Nullstellen von in  $D$  holomorphen Funktionen in ihrem Definitionsbereich beliebig verteilt sein, solange sie sich nicht in  $D$  häufen. Wenn wir aber eine holomorphe Funktion mit bestimmten Wachstumsbedingungen suchen, so ist die Situation elementar von der vorherigen verschieden. Beispielsweise gibt es zu Divisoren  $\partial \neq 0$  in  $\mathbb{C}$  niemals beschränkte Funktionen  $f$  mit  $(f) = \partial$ . Und genau solche beschränkte Funktionen wollen wir nun studieren:

Ein Weierstrass-Produkt  $\prod f_k$  ist sicherlich beschränkt in einem Bereich  $D$ , wenn stets  $|f_k|_D \leq 1$  gilt. Aber Produkte mit solch "langsam wachsenden" Faktoren, sind eher rar. Im Rest dieses Abschnittes widmen wir uns dem Spezialfall  $D = \mathbb{E}$ . Wenn wir an das Unterkapitel 1.2 zurück denken, so fällt uns auf, dass die Funktionen

$$g_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} \text{ für } z_0 \in \mathbb{E}$$

Automorphismen von  $\mathbb{E}$  sind und für diese  $|g_{z_0}|_{\mathbb{E}} = 1$  gilt. Wir möchten nun in den kommenden Zeilen zeigen, dass ein Divisor  $\partial \geq 0$  in  $\mathbb{E}$  mit  $\partial(0) = 0$  genau dann der Divisor einer in  $\mathbb{E}$  beschränkten Funktion ist, wenn es zu  $\partial$  ein Weierstrass-Produkt der Form

$$\prod_k \frac{|d_k|}{d_k} g_{d_k}(z)$$

gibt und dass solche Produkte genau dann existieren wenn die sogenannte **Blaschke-Bedingung**

$$\sum_k (1 - |d_k|) < \infty \tag{3.16}$$

erfüllt ist. In einem ersten Schritt wollen wir Beweisen, dass für eine holomorphe, beschränkte Funktion  $f \neq 0$  auf  $\mathbb{E}$  die Blaschke-Bedingung notwendig ist.

**Satz 3.12.** (Notwendigkeit der Blaschke-Bedingung)

Sei  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \setminus \{0\}$  beschränkt und  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$  eine zum Divisor  $(f)$  gehörende Folge. Dann ist für  $\{d_k\}$  die Blaschke-Bedingung erfüllt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - |d_k|) < \infty.$$

*Beweis.* O.B.d.A. dürfen wir  $f(0) = 0$  annehmen. Wäre  $\sum_k (1 - |d_k|) = \infty$ , so wäre nach dem Beispiel 3.1 (iii) das unendliche Produkt  $\prod_{k=1}^{\infty} |d_k| = 0$  und damit  $f(0) = 0$  wegen der Jensen'schen Ungleichung ( $|f(0)| \leq |d_1 \cdot \dots \cdot d_n| \cdot |f|_{\mathbb{E}}$ ). Also haben wir einen Widerspruch.  $\square$

Als Korollar folgt überraschenderweise ein Identitätssatz:

**Korollar 3.7.** (Identitätssatz)

Sei  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  eine abzählbare Menge in  $\mathbb{E}$ , so dass  $\sum_k (1 - |a_k|) = \infty$  gilt und  $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$  beschränkt mit  $f|_A = g|_A$ . Dann stimmen die zwei Funktionen  $f$  und  $g$  auf der ganzen Einheitskreisscheibe überein, also  $f = g$ .

*Beweis.* Die Funktion  $h := f - g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$  ist beschränkt in  $\mathbb{E}$ . Wir nehmen nun  $h \neq 0$  an. Aber dann wäre  $\sum_k (1 - |a_k|)$  eine Teilreihe der Reihe  $\sum_k (1 - |d_k|)$ , wobei wie üblich  $\{d_k\}$  die zum Divisor  $(h)$  gehörende Folge bezeichnet. Aus obigem Satz müsste also diese auch konvergent sein, aber dann kann  $\sum_k (1 - |a_k|) = \infty$  nicht gelten und wir haben einen Widerspruch. Also muss  $h = 0$  gelten.  $\square$

Also verschwinden im Einheitskreis holomorphe Funktionen bereits dann identisch, wenn sich die Nullstellen zu langsam an den Rand des Kreises bewegen. Damit ist bspw. eine holomorphe Funktion im Einheitskreis bereits dann die Nullfunktion, wenn  $f$  beschränkt ist und in allen Punkten  $1 - 1/n$  verschwindet, denn bekanntlich  $\prod_k (1 - \frac{1}{k}) = \infty$ .

Wie im Abschnitt 1.2 benutzen wir im Folgenden die Notation:

$$b(z, d) := \frac{|d|}{d} \frac{z - d}{\bar{d}z - 1} = \frac{1}{|d|} \cdot E_0 \left( \frac{d - \bar{d}^{-1}}{z - \bar{d}^{-1}} \right), \tag{3.17}$$

wenn  $d \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$  und setzen  $b(z, d) = z$  für  $d = 0$ . Die Funktion  $b(z, d)$  ist holomorph in  $\mathbb{E}$  und nullstellenfrei in  $\mathbb{E} \setminus \{d\}$ . In der Tat handelt es sich bei  $d$  um eine Nullstelle erster Ordnung. Es gilt desweiteren  $|b(z, d)|_{\mathbb{E}} = 1$ .

Sei nun  $\partial \geq 0$  ein Divisor in  $\mathbb{E}$  und  $\{d_k\} \subset \mathbb{E}$  eine zugehörige Folge. Das Produkt

$$b(z) := \prod_{k=1}^{\infty} b(z, d_k) \quad (3.18)$$

heißt **Blaschke-Produkt** zu  $\partial$ , wenn es in  $\mathbb{E}$  (und dann sogar in  $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$ ) normal konvergiert. Blaschke-Produkte sind also spezielle Weierstrass-Produkte. Wenn wir  $d_n \neq 0$  im Produkt haben wollen, dann können wir wegen  $b(z, 0) = z$  einen Faktor  $z$  "herausziehen" und haben wie für die behandelten Weierstrass-Produkte die Form:

$$b(z) = z^{\partial(0)} \prod_{d_n \neq 0} b(z, d_n).$$

Wir beweisen nun unter anderem wann ein Blaschke-Produkt normal konvergent ist:

**Satz 3.13.** Folgende Aussagen über einen positiven Divisor  $\partial \geq 0$  in  $\mathbb{E}$  sind äquivalent:

- (i)  $\partial$  ist der Divisor einer in  $\mathbb{E}$  beschränkten Funktion aus  $\mathcal{O}(\mathbb{E})$ .
- (ii)  $\sum_{z \in \mathbb{E}} \partial(z) (1 - |z|) < \infty$  (Blaschke-Bedingung)
- (iii) Das Blaschke-Produkt  $\prod_{k \in \mathbb{N}} b(z, d_k)$  existiert für jede zu  $\partial$  gehörende Folge  $\{d_k\}$ .

Es folgt sofort:

**Korollar 3.8.** Zu jeder beschränkten Funktion  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$  gibt es ein Blaschke-Produkt  $b$  und ein  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ , so dass gilt

$$f(z) = b(z) \cdot \exp g(z). \quad (3.19)$$

*Beweis.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Haben wir im Satz 3.12 gezeigt.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Wir zeigen, dass für  $d \in \mathbb{E}$  und  $|z| < r < 1$  gilt

$$|b(z, d) - 1| < \frac{2}{1-r} (1 - |d|). \quad (\star)$$

Um  $(\star)$  zu sehen, beobachte:

$$\begin{aligned} b(z, d) - 1 &= \frac{|d|}{d} \frac{z - d}{\bar{d}z - 1} - \frac{d(\bar{d}z - 1)}{d(\bar{d}z - 1)} \\ &= \frac{|d|z - d|d| - |d|^2z + d}{d(\bar{d}z - 1)} \\ &= \frac{(1 - |d|)(d + |d|z)}{d(\bar{d}z - 1)}. \end{aligned}$$

Beachte nun  $|\bar{d}z - 1| \geq 1 - |z|$  für  $d \in \mathbb{E}$ . Folglich haben wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |b(z, d) - 1| &\leq \left| \frac{d + d|z|}{d(1 - |z|)} \right| (1 - |d|) \\ &= \left| \frac{1 + \frac{|d|}{d}z}{1 - |z|} \right| (1 - |d|) \\ &\leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - |d|) \\ &\leq \frac{2}{1 - r} (1 - |d|). \end{aligned}$$

Damit ist  $\sum |b(z, d_k) - 1|_{B_r(0)} < \infty$  klar. Also konvergiert das Blaschke-Produkt normal in  $\mathbb{E}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Per Voraussetzung gibt es für jede zu  $\partial$  gehörenden Folge  $\{d_k\}$  ein Blaschke-Produkt. Wir müssen zeigen, dass das Blaschke-Produkt beschränkt, holomorph ist und  $(b) = \partial$ . Die Beschränktheit folgt aus der Ungleichung  $|b(z, d)| \leq 1$  für alle  $z \in \mathbb{E}$ , also  $|b|_{\mathbb{E}} \leq 1$ . Holomorphie ist klar. Dass  $(b) = \partial$  gilt, ist aber klar, da es sich um ein Weierstrass-Produkt handelt.  $\square$

In der Vorlesung hatten wir die Theorie der Weierstrass-Produkte nicht und benötigten für den obigen Satz eine Aussage, dass das Blaschke-Produkt in der Tat nicht mehr als die gewünschten Nullstellen besitzt und dies lieferte der folgende Satz:

**Satz 3.14.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $\{f_i\} \subset \mathcal{O}(G)$  eine holomorphe Funktionenfolge, wobei kein Element identisch verschwindet und  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|_G < \infty$ . Dann konvergiert  $\prod_{n=1}^{\infty} f_j$  gleichmässig gegen eine holomorphe Funktion  $f \in \mathcal{O}(G)$  und es gibt einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n > n_0$  die Funktionen  $f_n$  nullstellenfrei sind und die Nullstellen mit den Nullstellen der Funktionen  $f_1, \dots, f_{n_0}$  übereinstimmen.

*Beweis.* Wähle einen Index  $n_0$ , so dass für alle  $n > n_0$  gilt  $|1 - f_n|_G < \frac{1}{2}$  gilt und damit  $f_n$  keine Nullstellen auf  $G$  hat. Nun gilt

$$\begin{aligned} |\log f_n(z)| &= |\log(1 - (1 - f_n(z)))| \\ &\leq 2|1 - f_n(z)| \\ \Rightarrow \sum_{n>n_0} \log f_n(z) &\text{ konvergiert gleichmässig} \\ \Rightarrow g(z) = \prod_{n>n_0} f_n(z) &= e^{\sum_n \log f_n(z)} \text{ hat keine Nullstellen.} \end{aligned}$$

Denn  $|\log 1 + y| \leq 2|y|$  für  $|y| \leq \frac{1}{2}$ . Und schlussendlich gilt ja  $f = f_1 \cdots f_{n_0} \cdot g$ .  $\square$

Durch die Abbildung

$$t : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}, t(z) := \frac{z - 1}{z + 1} \tag{3.20}$$

wird die rechte Halbebene biholomorph auf den Einheitskreis abgebildet und es gilt

$$1 - |t(z)|^2 = \frac{4\operatorname{Re}(z)}{|z+1|^2} = \frac{4}{|1+1/z|^2} \operatorname{Re}(1/z) \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}. \quad (3.21)$$

Die für  $\mathbb{E}$  gewonnenen Resultate lassen sich nun leicht auf die rechte Halbebene übertragen:

**Satz 3.15.**

- (i) Ein positiver Divisor  $\partial$  in  $\mathbb{T}$  mit zugehöriger Folge  $\{d_k\}$  ist genau dann der Divisor einer in  $\mathbb{T}$  beschränkten holomorphen Funktion, wenn

$$\sum_k \frac{\operatorname{Re}(d_k)}{|1+d_k|^2} < \infty \text{ (Blaschke-Bedingung für } \mathbb{T}\text{)}. \quad (3.22)$$

- (ii) Die Funktion  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{T})$  sei beschränkt in  $\mathbb{T}$  und verschwinde in den paarweise verschiedenen Punkten  $\{d_k\}$ , wobei  $\delta := \inf_k |d_k| > 0$  und  $\sum_k \operatorname{Re}(1/d_k) = \infty$  gelten soll. Dann verschwindet  $f$  überall in  $\mathbb{T}$ .

*Beweis.*

- (i) Die Abbildung  $\partial \circ t^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{N}$  ist ein positiver Divisor in  $\mathbb{E}$  mit zugehöriger Folge  $\hat{d}_N := t(d_n)$ . Für eine in  $\mathbb{T}$  beschränkte Funktion  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{T})$  gilt  $(f) = \partial$  genau dann wenn  $f \circ t^{-1} = \partial \circ t^{-1}$  für die in  $\mathbb{E}$  beschränkte Funktion  $f \circ t^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$  gilt. Nach dem obigen Satz trifft dies genau dann zu, wenn  $\sum_k (1 - |\hat{d}_k|) < \infty$  gilt. Die Behauptung folgt nun aus der Gleichung 3.21, da

$$\frac{1 - |w|^2}{2} \leq 1 - |w| \leq 1 - |w|^2 \text{ für alle } w \in \mathbb{E}.$$

- (ii) Da  $\frac{1}{|1-1/w|^2} \geq \frac{1}{(1+1/\delta)^2}$  für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus B_\delta(0)$  gilt, folgt mit 3.21

$$\sum_k \frac{\operatorname{Re}(d_k)}{|1+d_k|^2} \geq \frac{1}{(1+1/\delta)^2} \sum_k \operatorname{Re}(1/d_k) = \infty.$$

Wegen (i) muss dann  $f$  identisch verschwinden. □

Nun können wir die Resultat der rechten Halbebene benutzen um die Aussagen für die obere Halbebene zu finden. Die Abbildung  $z \mapsto -iz$  bildet  $\mathbb{H}$  biholomorph auf  $\mathbb{T}$  ab. Da  $\operatorname{Re}(-iz) = \operatorname{Im}(z)$  wird die Blaschke-Bedingung zu  $\sum_k \frac{\operatorname{Im}(d_k)}{|i+d_k|^2} < \infty$  und die Divergenz-Bedingung (ii) zu  $\sum_k \operatorname{Im}(1/d_k) = -\infty$ . (Oder direkter:  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  bildet  $\mathbb{H}$  biholomorph auf  $\mathbb{E}$  ab.) Sei also  $\{z_n\}$  eine darstellende Folge des Divisors  $\partial$  auf der oberen Halbebene. Durch die obige Abbildung erhalten wir eine Folge  $\zeta_n := \zeta(z_n) := \frac{z_n-i}{z_n+i}$  im Einheitskreis. Dass Blaschke-Produkt vom Einheitskreis

$$\zeta^{\partial(0)} \prod_n \frac{|\zeta_n|}{\zeta_n} \frac{\zeta_n - \zeta}{\bar{\zeta}_n \zeta - 1} \quad (3.23)$$

transformiert sich also zu

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\partial(0)} \prod_{z_n \neq i} \frac{|z_n^2+1|}{z_n^2+1} \frac{z-z_n}{z-\bar{z}_n}. \quad (3.24)$$

### 3.3 Hardy-Funktionen

#### 3.3.1 Vorbereitendes Material zu $L^p$ -Räumen und Fourier-Transformation

Zuerst werden wir einiges über die  $L^p$ -Räume ohne Beweise in Erinnerung rufen. Wir schreiben wieder für ein Lebesgue-Mass  $\mathcal{L}$  für  $d\mathcal{L}$  stets abkürzend  $dx$ . Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar ist, dann verstehen wir unter dem Raum  $L^p(\Omega, dx) =: L^p(\Omega)$  mit  $1 \leq p < \infty$  stets den Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

wobei zwei Funktionen miteinander identifiziert werden, wenn die Menge auf der sie sich unterscheiden eine Lebesgue-Nullmenge ist. In der Tat handelt es sich, wie in einer üblichen Mass und Integral Vorlesung bewiesen wird, bei der Abbildung  $\|\cdot\|_{L^p}$  um eine Norm und  $(L^p, dx)$  ist vollständig, sowie separabel. Wie sich herausstellt, sind die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger  $C_c(\Omega)$  dicht im Raum  $L^p(\Omega)$ . Der Raum der quadrat-summierbaren Funktionen  $L^2$  bildet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

sogar einen Hilbert-Raum über  $\mathbb{C}$ . Diese Definition ist sinnvoll, denn sind  $f, g \in L^2$ , dann ist  $f\bar{g}$  auch summierbar, da wegen  $|f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$  gilt:

$$2|f \cdot \bar{g}| = 2|f| \cdot |g| \leq |f|^2 + |g|^2.$$

Wie man leicht nachweist erfüllt diese Abbildung alle Eigenschaften eines Skalarprodukts. Im Speziellen gilt die Schwarz'sche und Minkowski'sche Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}|^2 \leq \int_{\Omega} |f|^2 \cdot \int_{\Omega} |g|^2 = \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2, \quad (3.25)$$

$$\|f+g\|_2 = \left( \int_{\Omega} |f+g|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |g|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2 + \|g\|_2. \quad (3.26)$$

Wie üblich nennen wir zwei Funktionen orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet und eine Familie von orthogonalen Vektoren heisst ein Orthogonalsystem. Unter den Orthogonalsystemen spielen die Orthogonalbasen eine besondere Rolle, worunter wir Orthogonalsysteme verstehen, die nicht mehr durch Hinzufügen eines weiteren Vektors vergrößert werden können, also bezüglich Inklusion maximal sind. (Äquivalent ist, dass die lineare Hülle im Hilbert-Raum dicht ist.) Sind diese Basisvektoren darüber hinaus normiert, so spricht man auch von einer Orthonormalbasis. Die Vektoren  $\{v_i\}$  bilden also

genau dann ein Orthonormalsystem, wenn  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$  für alle Tupel  $(i, j)$ . Mittels des Zorn'schen Lemmas kann man nun zeigen, dass jeder Hilbert-Raum eine Orthonormalbasis besitzt (es kann sogar jedes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden). Beispielsweise bilden die Funktionen

$$e_n(x) := e^{2\pi i n x} \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

eine orthonormales Funktionensystem in  $L^2([0, 1]) \simeq L^2(S^1)$ .

Haben wir nun eine Orthonormalbasis  $S$  und einen Hilbert-Raum  $H$ , dann kann man jedes Element  $f \in H$  durch eine formale Summe

$$f = \sum_{e \in S} \langle f, e \rangle e$$

darstellen. Diese Reihendarstellung wird auch verallgemeinerte Fourier-Reihe genannt. Für den Fall  $\Omega = S^1$  stellen die Funktionen  $\{e_n := e^{2\pi i n x} | n \in \mathbb{Z}\}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(S^1)$  dar und es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n(x) \\ \hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aber später mehr zu dieser Familie  $\{e_n\}$ . Desweiteren verwenden wir für Lebesgue-summierbare Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R})$  die folgenden Konventionen für die **Fourier-Transformation** und die Rücktransformation verwenden:

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (3.28)$$

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.29)$$

Wir bemerken noch einen nützlichen Satz von Riemann und Lebesgue:

**Satz 3.16.** Gilt  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und verschwindet die Fourier-Transformation im Unendlichen, also  $\hat{f}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0$ , dann gilt

$$\hat{f} \in C(\mathbb{R}).$$

Wenn  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und gilt für die Fourier-Transformierte  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , dann gilt

$$\check{\check{f}}(x) = f(x)$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ . Abschliessend zur Fourier-Transformation über  $L^1$ -Funktionen geben wir noch einen praktischen Satz für Berechnungen an:

**Satz 3.17.** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f} g dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f \hat{g} dx.$$

*Beweis.* Wir wollen nun den Satz von Fubini verwenden:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} g(x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x) f(t) dx dt \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} f \hat{g} dt. \end{aligned}$$

□

Wir möchten nun die Fourier-Transformation auf  $L^2$ -Funktionen verallgemeinern. Dazu bemerken wir das folgende Lemma:

**Lemma 3.7.** Der Raum  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  ist dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  bezüglich der  $L^2$ -Norm induzierten Metrik.

*Beweis.* Aus der Mass und Integral Vorlesung wissen wir, dass  $C_c^0(\mathbb{R})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  liegt. Da  $C_c^0 \subset L^1 \cap L^2$  folgt aber bereits die Behauptung. □

**Satz 3.18.** (Plancherel Identität)

Für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  gilt die Identität von Plancherel

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2. \quad (3.30)$$

*Beweis.* Sei  $f \in L^1 \cap L^2$  und  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk$  bezeichnet die Fourier-Transformierte. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{f}(k')} e^{i(k'-k)x} dk dk' dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{f}(k')} \delta(k' - k) dk dk' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk, \end{aligned}$$

wobei  $\delta$  die Delta-Distribution bezeichnet. □

Eine Folgerung ist, dass die Fourier-Transformierte einer Funktion in  $L^1 \cap L^2$  in  $L^2$  liegt. Wir benutzen nun diese Tatsache um die Fourier-Transformation auf ganz  $L^2$  fortzusetzen:

**Satz 3.19.** Es existiert eine beschränkte Fortsetzung  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  der Fourier-Transformation auf  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , welche eindeutig ist.

*Beweis.* Sei  $f \in L^2$ , dann existiert eine Cauchy-Folge  $\{f_k\} \subset L^1 \cap L^2$  mit  $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$ . Aus dem Satz von Plancherel folgt offenbar, dass  $\{\hat{f}_k\}$  ebenfalls eine Cauchy-Folge in  $L^2$  ist. Somit besitzt sie einen Grenzwert, welchen wir mit  $\mathcal{F}f := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k$  bezeichnen. Sei  $\{g_k\} \subset L^2$  eine weitere Folge mit  $\|g_k - f\|_2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \|g_k - f_l\|_2 \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann gilt  $\|g_k - f_l\|_2 \sim \|\hat{g}_k - \hat{f}_l\|_2 \rightarrow 0$  für  $k, l \rightarrow \infty$  und die Grenzwerte sind gleich. Die Abbildung  $\mathcal{F}$  ist also wohl-definiert. Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus der Dichtheit von  $L^1 \cap L^2$  in  $L^2$ .  $\square$

Setzt man  $f_k := \chi_{B_k(0)} f$ , so erhält man offenbar eine Cauchy-Folge, die gegen  $f$  konvergiert. Dadurch können wir die Erweiterung auch wie folgt charakterisieren

$$\mathcal{F}f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k(0)} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Nun kann man zeigen:

**Satz 3.20.** (i)  $\mathcal{F}$  ist ein unitärer Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$ , d.h. er ist surjektiv und es gilt für alle  $f, g \in L^2$

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}.$$

(ii) Die inverse Fourier-Transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  ist für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}f := \delta_{-1} \mathcal{F}f(x) \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}f(-x).$$

Diesen Satz wollen wir hier nicht beweisen. Der interessierte Leser konsultiere ein Buch über Fourier Analysis. In der Tat findet man nun, dass die zwei verschiedenen Definitionen der Fourier-Transformationen, wenn sie erklärt sind, übereinstimmen. Im Folgenden schreiben wir:  $\mathcal{F}f = \hat{f}$  und  $\mathcal{F}^{-1}f = \check{f}$ .

### 3.3.2 Hardy-Funktionen auf der oberen Halbebene

**Satz 3.21.** Für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{H}$  gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{k - z} dk = \int_0^{\infty} f(x) e^{ixz} dx. \quad (3.31)$$

Übung: Wieso existieren die Integrale im Satz.

*Beweis.* Für  $z \in \mathbb{H}$  definieren wir die Abbildung

$$g(k) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{k - z} \in L^2(\mathbb{R})$$

Dann ist die Funktion  $g$  quadrat-summierbar auf der reellen Achse und durch Integration über einen Halbkreis in der Halbebene kann man zeigen (Übung), dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk = \begin{cases} e^{izx}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Damit finden wir für eine quadrat-summierbare Funktion  $f$ , welche genügend schnell abfällt, die Gleichungskette

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\hat{f}(k)}{k-z} dk = \langle \hat{f}, \bar{g} \rangle = 2\pi \langle f, \check{g} \rangle = \int_0^{\infty} f(x) e^{izx} dx.$$

□

**Definition 3.10.** Wir definieren die folgenden Funktionen ("Halbtransformierte")

$$f^+(a) = \int_0^{\infty} f(x) e^{iax} dx. \quad (3.32)$$

Beachte, dass es sich für  $a = is$  gerade um die Laplace-Transformation handelt.

**Satz 3.22.** Sei  $h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{k-z} dk = \int_0^{\infty} f(x) e^{izx} dx$ . Unter Benutzung der Kurznotation  $h_b(a) := h(a + ib)$  mit  $a + ib \in \mathbb{H}$  gilt:

- (1)  $h$  ist analytisch auf  $\mathbb{H}$ .
- (2)  $\|h_b\|_2 \leq \|f^+\|_2$ .
- (3)  $\|h_b - f^+\|_2 \rightarrow 0$  für  $b \downarrow 0$ .

*Beweis.*

- (1) Zuerst bemerken wir, dass  $h$  holomorph in der oberen Halbebene ist. Integrieren wir die holomorphe Funktion  $f(x) e^{izx}$  über ein kompaktes Intervall  $[0, M]$  für beliebiges  $M > 0$ , so erhalten wir eine holomorphe Funktion. Wir müssen nur zeigen, dass das Integral gleichmässig konvergiert. Aber dies folgt wegen der Abschätzung, wobei wir  $z = a + ib, b > 0$  schreiben:

$$\begin{aligned} \int_M^{\infty} |f(x) e^{izx}| dx &\leq \int_M^{\infty} |f(x)| e^{-bx} dx \\ &\leq \left( \int_M^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_M^{\infty} e^{-2bx} dx \right)^{1/2} \\ &\leq C e^{-bM} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da  $f$  quadrat-summierbar ist und  $b > 0$ .

(2)  $h_b(a) = \int_0^\infty f(x) e^{iax} e^{-bx} dx$ .  $h_b$  ist die Fourier-Transformierte von

$$f(x) e^{-bx} \theta(x),$$

wobei  $\theta(x)$  die Heaviside-Funktion ist. Mit Plancherel erhalten wir wieder

$$\begin{aligned} \|h_b\|_2^2 &= 2\pi \|f(x) e^{-bx} \theta(x)\|_2^2 \\ &= 2\pi \int_0^\infty e^{-2bx} |f(x)|^2 dx \\ &\leq \|f^+\|_2^2. \end{aligned}$$

(3) Wir erhalten analog:

$$\begin{aligned} \|h_b - f^+\|_2(a) &= 2\pi \left\| \int_0^\infty f(x) (e^{-bx} - 1) e^{iax} dx \right\|_2^2 \\ &= 2\pi \int_0^\infty (1 - e^{-bx})^2 |f(x)|^2 dx \\ &\stackrel{b \downarrow 0}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

□

Wir bemerken noch, dass die Funktion  $h$  sich nicht ändert, wenn wir  $f$  auf der negativen reellen Achse  $x < 0$  modifizieren, deshalb können wir  $f$  dort auch Null setzen. Wir werden nach ein paar Definitionen und Beispielen sehen, dass der Satz von Paley und Wiener gerade sagt, dass jede Funktion in  $H^2$  gerade von der obigen Form für ein solches  $f$  ist. Eine Funktion  $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , welche analytisch in der oberen Halbebene ist und

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{y>0} \left( \int_{-\infty}^\infty |h(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (3.33)$$

für ein fixes  $1 \leq p < \infty$  erfüllt heisst **Hardy-Funktion** und die Menge solcher Funktion heisst **Hardy-Raum**, wobei wir abkürzend  $H^p := H^p(\mathbb{H})$  schreiben. Für den Fall  $p = \infty$  definieren wir den Hardy-Raum durch

$$H^\infty := H^\infty(\mathbb{H}) := \{f \text{ holomorph auf } \mathbb{H} \mid \|f\|_{H^\infty} := \sup_{z \in \mathbb{H}} |f(z)|\}. \quad (3.34)$$

Nun wollen wir ein paar Beispiele betrachten:

*Beispiel 3.3.*

(1) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

wobei  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ . Die Fourier-Transformation dieser Abbildung ist

$$\hat{f}(k) = \int_0^\infty e^{-(\lambda-ik)x} dx = \frac{1}{\lambda-ik}.$$

Damit ergibt sich die Hardy-Funktion zu:

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{(\lambda-ik)(k-z)} \\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda-iz)x} dx = \frac{1}{\lambda-iz}. \end{aligned}$$

(2) Wir betrachten die Folge  $f_n(x) := x^n e^{-\lambda x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Offensichtlich gilt

$$\frac{dh}{dz}(z) = i \int_0^\infty (x f(x)) e^{izx} dx$$

und damit erhalten wir

$$h_n(z) = (-i)^n \frac{d^n}{dz^n} \frac{i}{z+i\lambda} = (-i)^{n-1} \frac{(-1)^n n!}{(z+i\lambda)^{n+1}} = -\frac{i^n n!}{(z+i\lambda)^{n+1}}.$$

(3) Wir betrachten  $f_n(x) = e^{-x} L_n(x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), wobei  $L_n$  das  $n$ -te Laguerre-Polynom bezeichnet und es gilt

$$L_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

Mit den bisherigen Resultaten folgt

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \frac{-i^k k!}{(z+i)^{k+1}} \\ &= -\frac{1}{z+i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{-i}{z+i}\right)^k \\ &= -\frac{1}{z+i} \left(\frac{z}{z+i}\right)^n. \end{aligned}$$

(4) Sei nun  $f_n(x) = e^{-x} L_n(2x)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \frac{-(2i)^k k!}{(z+i)^{k+1}} \\ &= -\frac{1}{z+i} \sum_k \binom{n}{k} \left(\frac{-2i}{z+i}\right)^k \\ &= -\frac{1}{z+i} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n. \end{aligned}$$

Berechne als Übung  $h_n(\alpha(z))$ , wobei  $\alpha$  die Cayley-Transformation bezeichnet.

*Beispiel 3.4.* Hardy Funktionen haben wichtige Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften und der Physik. Wir betrachten eine Störung eines physikalischen Systems durch eine zeitabhängige Kraft  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und wollen die Antwort des Systems  $Kf$  zum Zeitpunkt  $t$  beschreiben. Die Kraft soll adiabatisch zum Zeitpunkt  $t_0 = -\infty$  eingeschalten werden um wir messen die Systemantwort zu einem Zeitpunkt  $t > -\infty$ . Wir fordern nun, dass die Systemantwort linear in der Kraft  $f$  ist (schwache Kopplung), nur von der Zeitdifferenz abhängt und Kausalität gewährleistet ist, also die Systemantwort nicht von der Kraft  $f(s)$  mit  $s > t$  abhängen darf. Damit ist klar, dass diese durch das Integral

$$Kf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s) f(s) ds$$

gegeben ist. Aufgrund der Kausalität muss  $k(t) = 0$  für  $t < 0$  gelten. In der Tat handelt es sich um eine Faltung und für diese Wissen wir  $f \hat{\star} g = \hat{f}\hat{g}$ , wenn  $f, g \in L^1$ . Wir sehen also (ev. über ein Dichtheitsargument)

$$\hat{K}f = \hat{k}\hat{f}.$$

**Satz 3.23.** (Satz von Paley-Wiener 1934)

Eine Funktion  $h$  ist in  $H^2$  genau dann wenn ein  $f \in L^2(\mathbb{R})$  existiert mit

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{k-z} dk = \int_0^{\infty} f(x) e^{izx} dx \quad (3.35)$$

und für alle  $x < 0$   $f(x) = 0$  gilt.

*Beweis.*

$\Leftarrow$ : Bereits gezeigt.

$\Rightarrow$ : Diese Richtung zeigen wir in 3 Schritten: Wir nehmen also an, dass  $h \in H^2$  und müssen zeigen, dass  $h$  analytisch in der oberen Halbebene ist und es eine quadratsummierbare Funktion  $f$  gibt, so dass sich  $h$  durch die gegebene Gleichung darstellen lässt.

Schritt 1: Zuerst wollen wir zeigen, dass für  $z \in \mathbb{H}$  und für jedes  $b > 0$  gilt

$$h_b(z) = h(z+ib) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h_b(t)}{t-z} dt.$$

Da  $h$  holomorph ist, könnte man den Eindruck haben, dass wir nur Residuensatz anwenden müssen, jedoch haben wir für  $h$  nicht eine genügend scharfe obere Schranke. Um diese Schwierigkeit zu umgehen betrachten wir die Abbildung

$$k_A(z) := \frac{e^{izA}}{A} \int_0^A h_b(z+t) dt.$$

für ein fixes positive  $A > 0$ . Dann ist  $k_A$  analytisch in der oberen Halbebene und auf

einem Halbkreis in der oberen Halbebene haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |k_A(Re^{i\theta})| &\leq \frac{e^{-AR\sin\theta}}{A} \left( \int_0^A 1 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^A |h_b(z+t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{e^{-AR\sin\theta}}{\sqrt{A}} \|h_{b+R\sin\theta}\|_2 \\ &\leq C \cdot \frac{e^{-AR\sin\theta}}{\sqrt{A}}, \end{aligned}$$

wobei wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendeten. Wenden wir nun den Residuensatz auf diesen Halbkreis an der über die reelle Achse geschlossen ist, so erhalten wir

$$k_A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{k_A(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{-R}^R \frac{k_A(t) dt}{t - z} + \int_0^{\pi} \frac{k_A(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta}{Re^{i\theta} - z} \right), \quad (3.36)$$

wenn  $R > |z|$ . Denn die Funktion  $k_A$  ist ja holomorph in der oberen Halbebene und damit haben wir nur einen einfachen Pol in  $z = \zeta$ . Für das zweite Integral haben wir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} \frac{k_A(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta}{Re^{i\theta} - z} \right| &\leq \frac{|CR|}{|\sqrt{A}|} \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{-AR\sin\theta} d\theta}{Re^{i\theta} - z} \right| \\ &\leq \frac{C'}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$2\pi i k_A(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_A(t) dt}{t - z} \xrightarrow{A \rightarrow 0} h_b(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h_b(t)}{t - z} dt.$$

Für  $A \rightarrow 0$  finden wir den behaupteten Ausdruck, da  $k_A$  die Funktion  $h_b$  lokal gleichmässig approximiert und die Abschätzung

$$\int_{|t|>n} \frac{|k_A(t)| dt}{|t - z|} \leq \|k_A\|_2 \left( \int_{|t|>n} \frac{dt}{|t - z|^2} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{n} \|h_b\|_2.$$

Dies ist eine analoge Argumentation wie wir bereits ein Mal weiter oben verwendeten. Die anderen zwei Schritte sind nun einfach.

**Schritt 2:** In diesem Schritt konstruieren wir das  $f$ : Die Cauchy-Formel für  $h_b$  impliziert für  $z = a + ic \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} h_b(a + ic) &= h_{b+c}(a) = \int_0^{\infty} \check{h}_b(x) e^{ixz} dx \\ &= \int_0^{\infty} \check{h}_b(x) e^{izx} dx \\ &= \int_0^{\infty} \check{h}_b(x) e^{iax} e^{-cx} dx, \end{aligned}$$

so dass

$$\check{h}_{b+c} = e^{-cx} \check{h}_b,$$

wenn  $c, b > 0$ . Wir definieren nun die Funktion

$$f := e^{bx} \check{h}_b, \quad (3.37)$$

welche unabhängig vom Parameter  $b > 0$  ist, denn für jedes  $\epsilon > 0$  gilt

$$e^{(b+\epsilon)x} \check{h}_{b+\epsilon}(x) = e^{bx+\epsilon x} \check{h}_b(x) e^{-\epsilon x} = e^{bx} \check{h}_b(x).$$

Schritt 3:  $f$  hat die gewünschten Eigenschaften.  $f$  ist in  $L^2$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\infty |f(x)|^2 dx &= \lim_{b \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-2bx} |f(x)|^2 dx \\ &= \lim_{b \downarrow 0} 2\pi \|\check{h}_b\|_2^2 \\ &= \lim_{b \downarrow 0} \|h_b\|_2^2 \stackrel{h \in H^2}{<} \infty. \end{aligned}$$

Lassen wir nun in der Formel

$$h_b(z) = \int_0^\infty f(x) e^{izx} e^{-bx} dx$$

den Parameter  $b$  gegen Null gehen während wir  $z = a + ic$  fixiert halten, so ist der Beweis beendet.  $\square$

Aufgrund dieses Satzes können wir nun die Hardy-Funktionen  $h$  in der oberen Halbebene mit der zugehörigen Fourier-Transformierten  $\hat{f} = f^+ = \lim_{b \rightarrow 0} h_b$ , wobei  $f = 0$  für  $x < 0$ , identifizieren, also  $H^2 \simeq L^2([0, \infty))$ . Der wichtige Punkt ist, dass für ein  $f$  mit  $f = 0$  auf der negativen reellen Achse die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\hat{f}(t) dt}{t - z} = \int_0^\infty f(x) e^{izx} dx$$

als analytische Fortsetzung auf  $\mathbb{H}$  der Funktion  $\lim_{b \downarrow 0} h_b = \hat{f} = f^+$  betrachtet werden kann. Deshalb schreiben wir auch

$$H^2 = \{\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \mid \check{f} = f = 0 \text{ für } x < 0\}.$$

Ab jetzt werden wir für die zwei "Hardy-Räume"  $H^{2+}$  schreiben um anzudeuten, dass das zweite Integral für  $h$  über die positive reelle Achse ist bzw.  $f$  für negative reelle Werte verschwindet. Analog sehen wir durch einen ähnlichen Beweis, dass die Hardy-Funktionen auf der unteren Halbebene mit der Menge

$$H^{2-} = \{\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \mid f = \check{f} = f = 0 \text{ für } x > 0\}$$

identifiziert werden können. Durch die folgenden zwei Abbildungen können wir ein beliebiges  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  auf die Hardy-Räume projizieren:

$$\pi_+ : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H^{2+}, \hat{f} \mapsto \pi_+(\hat{f}) := f^+ \quad (3.38)$$

$$\pi_- : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H^{2-}, \hat{f} \mapsto \pi_-(\hat{f}), \quad (3.39)$$

wobei

$$f^+(z) := \lim_{b \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\hat{f}(t) dt}{t-z} = \int_0^\infty f(x) e^{iax} dx \quad (3.40)$$

$$f^-(z) := -\lim_{b \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\hat{f}(t) dt}{t-z} = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{iax} dx \quad (3.41)$$

Im Speziellen wird die orthogonale Zerlegung  $L^2(\mathbb{R}) = L^2((-\infty, 0]) \oplus L^2([0, \infty))$  durch die Fourier-Transformation  $\hat{\cdot}$  auf die duale orthogonale Zerlegung  $L^2(\mathbb{R}) = H^{2+} \oplus H^{2-}$  abgebildet.

Als eine Art Bonus der obigen Diskussion erhalten wir die sogenannte **Poisson-Formel** für  $H^{2+}$ : Wenn  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $f = 0$  für  $x < 0$ , dann gilt für jedes  $z := a + ib \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\hat{f}(t) dt}{t-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int \frac{\hat{f}(t) dt}{t-z} - \int \frac{\hat{f}(t) dt}{t-\bar{z}} \right) \\ &= \frac{b}{\pi} \int \frac{\hat{f}(t) dt}{(t-a)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Die folgenden zwei Aussagen wurden in der Vorlesung nicht bewiesen, jedoch erachte ich sie als derart zentral, dass ich diese nicht als Übung überlasse:

Es ist üblich den Raum  $H^{2+}$  mit einer orthonormalen Basis auszustatten und zwar

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(it-1)} \left( \frac{it+1}{it-1} \right)^n \quad \text{für } n \geq 0. \quad (3.42)$$

In der Tat ist die Familie  $\{e_n\}$  für  $n < 0$  eine Orthonormalbasis von  $H^{2-}$ . Zuerst beweisen wir jedoch das folgende Lemma:

**Lemma 3.8.** Eine rationale, genügend schnell abfallende Funktion  $\hat{f}$  ist eine Hardy-Funktion der oberen Halbebene genau dann, wenn alle Pole von ihr in der unteren Halbebene liegen.

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $\hat{f}$  eine genügend schnell abfallende Funktion ohne Pole in der abgeschlossenen oberen Halbebene ist. Dann müssen wir zeigen, dass die inverse Fourier-Transformation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$

auf der negativen reellen Achse verschwindet. Dazu betrachten wir die komplexifizierte Funktion  $\hat{f}(\zeta) e^{-i\zeta x}$ . Da  $\hat{f}$  keine Pole in der oberen Halbebene und auf der reellen Achse hat, können wir als Integrationsweg einen Halbkreis in der oberen Halbebene wählen, welcher über die reelle Achse geschlossen ist. Dieses Integral liefert für jedes fixierte  $a < 0$  nach Cauchy's Integralsatz

$$0 = \int_{\gamma} \hat{f}(\zeta) e^{-i\zeta a} d\zeta = \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{-i\xi a} d\xi + \int_0^{\pi} \hat{f}(Re^{i\theta}) e^{-iaRe^{i\theta}} iRd\theta.$$

Mit der üblichen Abschätzung für das Integral über den Halbkreis sehen wir

$$\left| \int_0^{\pi} \hat{f}(Re^{i\theta}) e^{-iaRe^{i\theta}} iRd\theta \right| \leq \int_0^{\pi} |\hat{f}| e^{aR \sin \theta} R d\theta \leq MR \int_0^{\pi} e^{aR \sin \theta} d\theta.$$

Denn  $\hat{f}$  ist genügend schnell abfallend und damit beschränkt. Bemerken wir, dass der Integrand ganz rechts exponentiell abfallend für  $a < 0$  ist, ausser in  $\epsilon$ -Bällen um die Punkte  $\theta = 0, \pi$ , welche wir beliebig klein machen können, sehen wir dass das Integral für  $R \rightarrow \infty$  verschwindet. Also können wir mit der Cauchy'schen Integralformel

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi a} d\xi = 0$$

folgern. Also ist  $\hat{f}$  eine Hardy-Funktion in der oberen Halbebene wie gewünscht. Umgekehrt ist  $\hat{f}$  eine rationale Hardy-Funktion mit genügend schnellem Abfall, dann müssen wir zeigen, dass  $f$  in  $\mathbb{H}$  holomorph ist. Da  $\hat{f}$  per Voraussetzung eine Hardy-Funktion ist, verschwindet  $f$  für  $x < 0$ . Also gilt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx.$$

Komplexifizieren wir  $\xi \mapsto \zeta := s + it$ , so sehen wir

$$\hat{f}(\zeta) = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\zeta x} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{isx} e^{-tx} dx$$

Für  $\zeta \in \mathbb{H}$ , also  $t > 0$ , sehen wir, dass der exponentielle Abfall die Funktion  $f$  für  $x > 0$  dominiert. Also ist der Integrand holomorph in der oberen Halbebene für  $x > 0$ . Integration über ein kompaktes Intervall gibt also eine holomorphe Funktion und wir müssen nur zeigen, dass der Rest des Integrals, also  $\int_{[M, \infty)} \dots$ , gleichmässig konvergiert um zu schliessen, dass  $\hat{f}$  in der oberen Halbebene holomorph ist. Wir haben als obere Schranke

$$\begin{aligned} \left| \int_M^{\infty} f(x) e^{ix\zeta} dx \right| &\leq \int_M^{\infty} |f(x)| e^{-tx} dx \\ &\leq \|f\|_2 \left( \int_M^{\infty} e^{-2tx} dx \right)^{1/2} \leq C \|f\|_2 e^{-tM}. \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck konvergiert klarerweise für  $t > 0$ . Also ist die Fourier-Transformierte holomorph in der oberen Halbebene und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$

Dieses Lemma gibt einen einfachen Weg um zu sehen, dass  $e_n$  eine Hardy-Funktion der oberen Halbebene für  $n \geq 0$  ist. Für jedes  $n$  ist  $e_n$  quadrat-integrierbar, denn

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |e_n|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

Für  $n \geq 0$  hat  $e_n$  einen Pol in  $-i$ , jedoch ansonsten keinen. Aus dem Lemma folgt damit  $e_n \in H^{2+}$ . Weiter ist die Familie  $\{e_n\}$  orthonormal, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n \overline{e_m} dx = \delta_{n,m}.$$

Um dies zu sehen, benutzen wir die im Grossen konforme Abbildung  $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$  (Cayley-Transformation). Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir die Abbildung

$$\exp i\phi(x) := \frac{1+ix}{1-ix} \text{ mit } \frac{d\phi}{dx} = \frac{2}{1+x^2}.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle_{L^2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n-m)\phi(x)}}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Nun könnte man noch zeigen, dass die Familie  $\{e_n\}$  für  $n \geq 0$  den Raum  $H^{2+}$  in der Tat aufspannt, d.h. die einzige Funktion  $h \in H^{2+}$ , welche orthogonal zu  $e_n$  ist, die Nullfunktion ist. Jedoch wollen wir dies hier nicht tun. Ähnlich spannt die Familie  $\{e_n\}_{n < 0}$  den Hardy-Raum der unteren Halbebene auf.

Nun beweisen wir zwei zentrale Sätze in der Theorie der Hardy-Funktionen:

**Satz 3.24.** Für jede Hardy-Funktion  $h$  der oberen Halbebene, welche nicht identisch verschwindet, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |h(k)| dk}{1+k^2} > -\infty.$$

Beachte, dass  $\log |h| \leq |h|$  und deshalb ist  $\frac{\log |h|}{1+k^2}$  von oben durch eine summierbare Funktion beschränkt. Deshalb kann das Integral höchstens nach  $-\infty$  divergieren.

*Beweis.* Dieser Satz wurde in der Vorlesung nicht bewiesen und aufgrund seiner Länge möchte ich ihn hier nicht präsentieren. Der interessierte Leser konsultiere Kapitel 3 in [9].  $\square$

Der nächste Satz ist eine Art "Umkehrung" des obigen:

**Satz 3.25.** Sei  $G \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $G \geq 0$  und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log G(k)}{1+k^2} dk > -\infty,$$

dann gibt es eine Hardy-Funktion  $h$  in der oberen Halbebene, so dass

$$G(k) = |h(k)| \text{ fast überall auf } \mathbb{R}$$

gilt.

*Beweis.* Wir definieren zunächst die Funktion

$$h(z) := \exp \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kz+1}{k-z} \frac{\log G(k)}{1+k^2} dk \right] \text{ mit } z \in \mathbb{H}.$$

Wegen der Bedingung  $\int |\log G|/(1+k^2) < \infty$  ist die Konvergenz gewährleistet und es handelt sich um einen in der oberen Halbebene analytischen Ausdruck. Sei nun  $z = a + ib \in \mathbb{H}$  fix. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( \frac{kz+1}{k-z} \right) &= \operatorname{Im} \left( \frac{(kz+1)(k-\bar{z})}{|k-z|^2} \right) \\ &= \frac{\operatorname{Im}(k^2z - \bar{z} + k - k|z|^2)}{(k-a)^2 + b^2} \\ &= \frac{(k^2+1)b}{(k-a)^2 + b^2} \\ \Rightarrow |h(z)|^2 &= \exp \int_{-\infty}^{\infty} \log(G(k)) \underbrace{\frac{b}{\pi(k-a)^2 + b^2}}_{=: \Delta(k)} dk \\ \Rightarrow \log |h(z)| &= \int_{-\infty}^{\infty} \log G(k) \Delta(k) dk. \end{aligned}$$

Nun gilt  $\Delta(k) \geq 0$  und wegen  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$  haben wir  $\int_{\mathbb{R}} \Delta(k) dk = 1$ . Wir benötigen noch:

**Satz 3.26.** (Jensen'sche Ungleichung)

Für jede konvexe Funktion  $f(x)$  und nicht-negative Konstanten  $\lambda_i$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  gilt:

$$f \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

*Beweis.* Verwende die übliche Definition von "konvex", also dass  $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$  für alle  $\lambda \in [0,1]$  gilt. Durch vollständige Induktion über die Stützstellen erhält man nun die Jensen'sche Ungleichung.  $\square$

Für konkave Funktionen, wie der natürliche Logarithmus, kehrt sich natürlich nur das Ungleichungszeichen um. Zerlegen wir das Integral  $\int_I f(k) \Delta(k) dk$  über das Intervall  $I$  in eine Riemann'sche Summe und verwenden die Jensen'sche Ungleichung so erhalten wir

$$\log \int_I f(k) \Delta(k) dk \geq \int_I \log[f(k)] \Delta(k) dk.$$

Damit folgt nun

$$|h(z)|^2 \leq \exp \left[ \log \int G^2(k) \Delta(k) dk \right] = \int G^2 \Delta = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^2(k) dk}{(k-a)^2 + b^2}.$$

Nun integrieren wir über den Realteil von  $z := a + ib$  und lassen  $b$  fix. Bemerke, dass wegen  $G \in L^2$  wir den Satz von Fubini benutzen dürfen.

$$\begin{aligned} \|h_b\|_2^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^2(k) dk}{(k-a)^2 + b^2} da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^2(k) \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{(k-a)^2 + b^2} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^2(k) dk = \|G\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist unabhängig von  $b > 0$  und dies beweist  $h \in H^{2+}$ . Im Speziellen existiert der Grenzwert  $\lim_{b \downarrow 0} h_b =: h_{0+}$  in  $L^2(\mathbb{R})$  und wir haben nur zu zeigen, dass fast überall  $|h_{0+}| = G$  gilt. Aufgrund der bekannten Abschätzung

$$\int |h_{0+}|^2 = \lim_{b \downarrow 0} \int |h_b|^2 \leq \int G^2$$

genügt es sogar nur  $G \leq |h_{0+}|$  f.ü. zu zeigen. Um dies zu sehen, betrachten wir eine nicht-negative Testfunktion  $\gamma \in C_c^0(\mathbb{R})$  und der Grenzwert  $\lim_{b \downarrow 0} h_b = h_{0+}$  soll fast überall gelten. Dann gilt wegen dem Lemma von Fatou

$$\liminf_{b \downarrow 0} \int \gamma \log^- |h_b| \geq \int \gamma \log^- |h_{0+}|$$

und

$$\lim_{b \downarrow 0} \int \gamma \log^+ |h_b| \geq \int \gamma \log^+ |h_{0+}|.$$

Deshalb gilt auch

$$\limsup_{b \downarrow 0} \int \gamma \log |h_b| \geq \int \gamma \log |h_{0+}|.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int \gamma(a) |h_b(a)| da &= \int \gamma(a) \frac{b}{\pi} \int \frac{\log G(k) dk}{(k-a)^2 + b^2} da \\ &= \int \log G(k) \frac{b}{\pi} \int \frac{\gamma(a)}{(k-a)^2 + b^2} dadk \\ &= \int \log G(k) \frac{1}{\pi} \int \frac{\gamma(k+ab)}{1+a^2} dadk. \end{aligned}$$

Da das innere Integral durch  $\frac{C}{1+k^2}$  beschränkt ist und  $\log G/(1+k^2)$  summierbar können wir den Satz der dominierend Konvergenz verwenden, weshalb das letzte Integral für  $b \downarrow 0$  gegen  $\int \gamma \log G$  konvergiert. Aber dann haben wir

$$\int \gamma \log |h_{0+}| \geq \limsup_{b \downarrow 0} \int \gamma \log |h_b| = \int \gamma \log G$$

und somit  $|h_{0+}| \geq G$ , wie gewünscht.  $\square$

### 3.3.3 Hardy-Funktionen auf der Einheitskreisscheibe

Hardy-Funktionen sind auch wichtig im Zusammenhang mit Fourier-Reihen. Wir betrachten den Einheitskreis  $S^1$  als Rand der Einheitskreisscheibe  $|z| < 1$ , welcher parametrisiert durch einen Winkel  $\phi \in [0, 2\pi)$  sein soll. Bekanntlich können wir eine Funktion  $f \in L^2(S^1)$  in eine Fourier-Reihe bezüglich der orthonormalen Basis  $e_n := e^{in\phi}$  entwickeln, also:

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\phi} = f^+(\phi) + f^-(\phi) \quad (3.43)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-in\phi} d\phi. \quad (3.44)$$

Wir für Laurent-Reihen haben wir die Summe  $f$  aufgespalten in einen "Nebenteil" ( $f^+$ ) mit  $n \geq 0$  und einen "Hauptteil" ( $f^-$ ) mit  $n < 0$ . Die Funktion  $f^+$  können wir auf  $\bar{\mathbb{E}}$  fortsetzen durch

$$f^+(z) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) z^n,$$

welche im Innern holomorph ist. Für  $R \in (0, 1)$  definieren wir die Abbildung

$$h_R(\phi) = h\left(Re^{i\phi}\right) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) R^n e^{in\phi}.$$

Für diese Funktion gilt

$$\int_0^{2\pi} |h_r(\phi)|^2 d\phi = 2\pi \sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)|^2 R^{2n}$$

und damit

$$\sup_{0 < R < 1} \int_0^{2\pi} |h_r(\phi)|^2 d\phi = \|f^+\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Nun machen wir eine analoge Definition wie für den Fall einer oberen Halbebene:

**Definition 3.11.** Eine Hardy-Funktion auf der Einheitskreisscheibe ist eine analytische Funktion auf  $\mathbb{E}$ , so dass

$$\sup_{R \in (0,1)} \|h_R\|_2 < \infty \text{ mit } \|h_R\|_2 := \left( \int_0^{2\pi} |h_R(\phi)|^2 d\phi \right)^{1/2}$$

Wir sprechen auch von einer Hardy-Funktion auf dem Einheitskreis  $S^1$ . Es gilt  $\lim_{R \rightarrow 1} \|h_R - f^+\|_2 = 0$ . Die Vorschrift  $h = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) z^n$  assoziiert also jeweils eine Hardy-Funktion mit einem  $f \in L^2(S^1)$ .

**Lemma 3.9.** Jede Hardy-Funktion auf der Einheitskreisscheibe hat die Form

$$h = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) z^n,$$

wobei  $f \in L^2(S^1)$ .

*Beweis.* Die eine Richtung haben wir bereits gezeigt. Für die andere entwickle man die Hardy-Funktion in eine Potenzreihe um  $z = 0$  und berechne  $\|h_R\|_2$ . Die Details überlassen wir dem Leser.  $\square$

Die Abbildung  $f^+ \mapsto h$  von Nebenteilen auf Hardy-Funktionen stellt nun ein Isomorphismus auf  $H^{2+}$  dar, wenn wir

$$\|h\|_2 := \sup_{0 < R < 1} \|h_R\|_2 = \|f\|_2$$

setzen. Wie im vorherigen Abschnitt identifizieren wir  $h$  mit  $f^+$  und bezeichnen auch  $f^+$  als "Hardy-Funktion". Die Abbildung

$$f \mapsto f^+ = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) e^{in\phi}$$

ist dann die Projektion von  $L^2(S^1)$  auf  $H^{2+}$ , welche surjektiv ist.

Vorbereitend für den nächsten Satz wollen wir das folgende Lemma beweisen:

**Lemma 3.10.** Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus S^1$  gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\phi} - z| d\phi = \begin{cases} \log |z|, & |z| > 1 \\ 0, & 0 \leq |z| < 1. \end{cases}$$

*Beweis.* Die Behauptung liegt nahe die folgende Fallunterscheidung zu machen, jedoch zuvor beobachten wir

$$\int_0^{2\pi} \log |e^{i\phi} - z| d\phi = \operatorname{Re} \left( \int_0^{2\pi} \log (e^{i\phi} - z) d\phi \right) \\ \stackrel{w(\phi) := e^{i\phi}}{=} \operatorname{Re} \left( -i \int_{S^1} \frac{\log(w - z) dw}{w} \right).$$

- (i)  $z = 0$ : Wir sehen anhand der obigen Formel, dass das Integral verschwindet.
- (ii)  $|z| > 1$ : Auch mit der obigen Formel und dem Residuensatz, sowie

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{\log(w - z)}{w}, 0 \right] = \log(-z)$$

erhalten wir die Aussage. Denn  $\log(w - z)$  ist analytisch im Innern von  $S^1$ .

(iii)  $0 < |z| < 1$  : Für diesen Fall können wir nicht oben vorgehen, da für eine eindeutige Definition des Logarithmus wäre der Schnitt durch die Integrationskontur. Aber aufgrund der Leibniz-Regel gilt ist der Integralausdruck in  $\mathbb{E}$  holomorph und es gilt mit dem Residuensatz:

$$\frac{dF}{dz}(z) := \frac{d}{dz} \int_{S^1} \frac{\log(w-z)dw}{w} = - \int_{S^1} \frac{dw}{(w-z)w} = 0.$$

In der Tat muss diese Konstante 0 sein, denn per Voraussetzung in  $F$  in  $\mathbb{E}$  holomorph.

□

**Satz 3.27.** Für jede nicht-triviale Funktion  $f \in L^2(S^1)$  ist  $\log|f|$  summierbar und es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(\phi)|d\phi \geq \log \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \right| = \log|\hat{f}(0)|. \quad (3.45)$$

*Bemerkung 3.2.* In der klassischen Jensen'sche Ungleichung ist  $g(\phi)$  eine reell-wertige, nicht-negative Funktion und für diese gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log g(\phi) d\phi \leq \log \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi.$$

Die Beweisstrategie ist, dass wir zuerst die Aussage für trigonometrische Polynome  $f$  beweisen und dann ein allgemeines  $f$  durch solche approximieren.

*Beweis des Satzes für trigonometrische Polynome.* Wir nehmen zuerst an, dass die nicht-triviale Hardy-Funktion die Form

$$f(\phi) = \hat{f}(0) + \hat{f}(1)e^{i\phi} + \dots + \hat{f}(n)e^{in\phi}$$

hat mit  $\hat{f}(0), \hat{f}(n) \neq 0$ . Die assoziierte in  $\mathbb{E}$  holomorphe Funktion  $h$  hat dann auch die Gestalt

$$h(z) = \sum_{k=0}^n \hat{f}(k) z^k \text{ mit } h(0) = \hat{f}(0) \neq 0, \hat{f}(n) \neq 0.$$

Wir wollen nun

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(\phi)|d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|h(e^{i\phi})|d\phi \geq \log|h(0)|$$

zeigen. Da  $\hat{f}(0) \neq 0$  wissen wir, dass  $z = 0$  keine Nullstelle aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt  $h(z) = \hat{f}(n) \prod_{i=1}^n (z - z_i)$  und wegen dem Satz von Vieta gilt  $\prod_{i=1}^n z_i =$

$(-1)^n \frac{\hat{f}(0)}{\hat{f}(n)}$  und deshalb

$$\begin{aligned} h(z) &= \hat{f}(n) \prod_{i=1}^n (z - z_i) \\ &= \hat{f}(n) \frac{(-1)^n \hat{f}(0)}{\hat{f}(n)} \prod_{i=1}^n \frac{(z - z_i)}{z_i} \\ &= \hat{f}(0) \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i z), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_i := 1/z_i$ . Klarerweise hat  $h$  keine Nullstelle auf dem Einheitskreis. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\phi)| d\phi &= \log |\hat{f}(0)| + \sum \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - \gamma_i e^{i\phi}| d\phi \\ &= \log |\hat{f}(0)| + \sum_{i=1}^n \log |\gamma_i| + \sum_{i=1}^n \begin{cases} -\log |\gamma_i|, & |\gamma_i| < 1 \\ 0, & |\gamma_i| > 1 \end{cases} \\ &\geq \log |\hat{f}(0)|. \end{aligned}$$

□

*Beweis des Satzes für den allgemeinen Fall.*

Seien nun  $h_n$  trigonometrische Polynome im Sinn des obigen Beweise, welche gegen eine Funktion  $h$  bezüglich der  $L^2$ -Norm konvergieren sollen, sowie keine Nullstellen auf dem Einheitskreis besitzen. Wegen dem Satz von Plancherel ist dann auch die Fourier-transformierte Folge  $\hat{h}_n$  bezüglich der  $L^2$ -Norm konvergent. Wie üblich (z.B. in der abstrakten Integrationstheorie) zerlegen wir den Logarithmus in einen positiven ( $\log^+$ ) und einen negativen ( $\log^-$ ) Teil, also  $\log = \log^+ - \log^-$ . Das konstante Glied bezeichnen wir wieder mit  $\hat{f}(0)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \log |\hat{f}(0)| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_n(\phi)| d\phi \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \log^+ |f_n(\phi)| d\phi - \int_0^{2\pi} \log^- |f_n(\phi)| d\phi \right] \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \log |f| + \log^+ |f_n| - \log |f| d\phi - \int_0^{2\pi} \log^+ |f_n| d\phi \right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[ \int \log^+ |f| d\phi + \underbrace{\limsup \int |h_n - f| d\phi}_{=: A} - \liminf \int \log^- |f_n| d\phi \right] \end{aligned}$$

Wir haben dabei ausgenutzt, dass der Logarithmus konvex ist, also  $|\log^+ x - \log^+ y| \leq |x - y|$ . Nun schätzen wir den zweiten und dritten Term ab:

- 2. Term: Wir wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an:

$$A \leq \sqrt{2\pi} \sqrt{\int |f_n - f|^2 d\phi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.46)$$

- 3. Term: Mit dem Lemma von Fatou finden wir sofort

$$\liminf \int \log^- |f_n| d\phi \geq \int \liminf \log^- |f_n| d\phi = \int \log^- |f| d\phi.$$

Damit erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned} \log |\hat{f}(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \int \log^+ |f| d\phi - \int \log^- |f| d\phi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \log |f| d\phi. \end{aligned}$$

□

### 3.3.4 Poisson-Kern und Herglotz Darstellung

Wir folgen sehr stark der Darstellung aus dem Buch [10], weshalb einige Beweise ausgelassen werden. Wir erinnern zuerst an die Definition des Poisson-Kerns:

**Definition 3.12.** Die Abbildung  $P : \mathbb{E} \times \partial\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , welche definiert ist durch

$$P(z, e^{it}) := \operatorname{Re} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}, \quad (3.47)$$

nennen wir **Poisson-Kern**.

*Bemerkung 3.3.* Wie aus der Vorlesung MMP I bekannt ist, lautet der Poisson-Kern in Polarkoordinaten

$$P(re^{i\theta}, e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}, \quad (3.48)$$

wobei die unendliche Reihe gleichmässig für  $\theta, t \in \mathbb{R}$  und  $r \in [0, R]$  ( $R \in (0, 1)$ ) konvergiert. Für jedes fixierte  $e^{it} \in \partial\mathbb{E}$  ist  $P(z, e^{it})$  eine harmonische Funktion auf der Einheitskreisscheibe. Allgemeiner gilt: Für jedes komplexe Borelmaß  $\mu$  auf  $\partial\mathbb{E}$  ist

$$h(z) = \int_{\partial\mathbb{E}} P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}) \quad \text{mit } z \in \mathbb{E} \quad (3.49)$$

eine harmonische Funktion auf der Einheitskreisscheibe.

Im Folgenden bezeichnet  $\sigma$  ein komplexes Borelmaß auf  $\partial\mathbb{E}$  für welches die Identität

$$\int_{\partial\mathbb{E}} f d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_c^{c+2\pi} f(e^{it}) dt \quad (3.50)$$

gilt, wenn  $f \in L^1(\sigma)$  und  $c \in \mathbb{R}$  beliebig ist.

Wir erinnern noch an das **Dirichlet-Problem** für die Einheitskreisscheibe: Ist eine Funktion  $f$  auf  $\partial\mathbb{E}$  gegeben, dann suchen wir eine stetige Funktion  $h$  auf  $\overline{\mathbb{E}}$ , so dass  $h|_{\mathbb{E}}$  harmonisch ist und  $h|_{\partial\mathbb{E}} = f$  gilt.

Der folgende Satz gibt die Lösung dieses Problems an:

**Satz 3.28.** Für jede stetige, komplex-wertige Funktion  $f$  auf  $\partial\mathbb{E}$  gibt es eine eindeutige stetige Funktion  $h$  auf  $\overline{\mathbb{E}}$ , so dass

- (1)  $h|_{\partial\mathbb{E}} = f$
- (2)  $h|_{\mathbb{E}}$  ist harmonisch.

Desweiteren ist die Funktion  $h$  auf  $\mathbb{E}$  gegeben durch

$$h(z) = \int_{\partial\mathbb{E}} P(z, e^{it}) f(e^{it}) d\sigma(e^{it}). \quad (3.51)$$

Ist im Speziellen  $h$  eine stetige Funktion auf  $\overline{\mathbb{E}}$ , deren Einschränkung auf das Innere harmonisch ist, dann hat  $h$  eine Integraldarstellung der Form 3.51, wobei  $f = h|_{\partial\mathbb{E}}$ .

Aus diesem Satz sehen wir sofort, dass eine stetige Abbildung  $h$  auf  $\overline{B}_R(z_0)$ , die im Innern harmonisch ist die Integral-Darstellung

$$h(z + z_0) = \int_{\partial\mathbb{E}} P(z/R, e^{it}) h(z_0 + Re^{it}) d\sigma(e^{it}) \quad \text{mit } |z| < R \quad (3.52)$$

hat.

Wir wollen nun eine Integraldarstellung für eine auf dem Einheitskreis analytische Funktion erhalten. Dazu benötigen wir den folgenden Satz:

**Satz 3.29.** Für jede nicht-negative harmonische Funktion  $h$  auf  $\mathbb{E}$  gibt es eine Integraldarstellung der Form

$$h(z) = \int_{\partial\mathbb{E}} P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}) \quad \text{für } z \in \mathbb{E}, \quad (3.53)$$

wobei  $\mu$  ein endliches nicht-negatives Borel-Mass auf dem Einheitskreis ist.

Mit diesem Resultat erhalten wir:

**Satz 3.30.** (Darstellungssatz von Herglotz und Riesz)

Sei  $f$  analytisch auf  $\mathbb{E}$  mit  $\operatorname{Re}(f) \geq 0$ , dann gilt

$$f(z) = \int_{\partial\mathbb{E}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(e^{i\theta}) + ic \text{ mit } z \in \mathbb{E} \quad (3.54)$$

für ein endliches nicht-negatives Borel-Mass  $\mu$  auf  $\partial\mathbb{E}$  und eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Wir wählen  $\mu$  für  $h = \operatorname{Re}(f)$  wie in Satz 3.29. Dann ist die Funktion

$$g(z) := f(z) - \int_{\partial\mathbb{E}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(e^{i\theta})$$

analytisch und es gilt  $\operatorname{Re}(g) = 0$  auf  $\mathbb{E}$ . Da der Realteil von  $g$  in  $z = 0$  verschwindet, gilt  $g(z) = ic$  für eine reelle Konstante  $c$ . Deshalb hat  $f$  die gewünschte Form.  $\square$

Ein ähnliches Resultat gilt für die oberen Halbebene. Wir führen dazu die folgende Sprechweise ein: Eine analytische, komplex-wertige Funktion  $f$  auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  mit nicht-negativem Imaginärteil heisst **Nevanlinna-Funktion**.

**Satz 3.31.** (Herglotz-Nevanlinna)

Jede Nevanlinna-Funktion  $f$  hat eine Darstellung der Form

$$f(z) = b + cz + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right] d\mu(t) \quad (3.55)$$

mit  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\mu$  ist ein Borelmass auf  $\mathbb{R}$ , welches die Wachstumsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$$

erfüllt.

Umgekehrt handelt es sich bei jeder Funktion der obigen Form in der Tat um eine Nevanlinna-Funktion. Die Konstanten erhält man durch die Formeln

$$b = \operatorname{Re}(f(i)) \text{ und } c = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(iy)}{iy}$$

und das Mass  $\mu$  ist durch  $f$  über die Stieltjes Umkehrformel bestimmt

$$\mu((t_1, t_2]) = \lim_{\delta, \epsilon \rightarrow 0} \int_{t_1+\delta}^{t_2+\delta} \operatorname{Im}(f(t+i\epsilon)) dt.$$

Für das folgende müssen wir ein paar neue Begrifflichkeiten einführen:

**Definition 3.13.** Sei  $h(z)$  eine komplex-wertige Funktion auf  $\mathbb{E}$  und  $s = e^{i\tau} \in \partial\mathbb{E}$  ein fixer Punkt. Wir schreiben

$$\lim_{z \rightarrow s} h(z) = A \text{ nicht tangential,}$$

wenn für jeden offenen Dreieckssektor  $S$  in  $\mathbb{E}$  mit Eckpunkt in  $s$ ,  $h(z) \rightarrow A$  für  $z \rightarrow s$  in  $S$  gilt. Wir sagen, dass  $\lim_{z \rightarrow s} h(z) = f(s)$  nicht-tangential a.e., wenn eine Borelmenge  $N \subset \partial\mathbb{E}$  mit  $\sigma(N) = 0$  existiert, so dass  $\lim_{z \rightarrow s} h(z) = f(s)$  nicht-tangential für jedes  $s \in \partial\mathbb{E} \setminus N$ .

Damit können wir nun den Satz von Fatou formulieren:

**Satz 3.32.** (Fatou)

Sei  $\mu$  ein komplexes Borel-Mass auf  $S^1$  mit Lebesgue-Zerlegung

$$d\mu = f d\sigma + d\mu_s, \quad (3.56)$$

wobei  $\mu_s$  ein singuläres Mass bezüglich  $\sigma$  ist. Wenn

$$h(z) = \int_{S^1} P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}), \quad (3.57)$$

dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow e^{it}} h(z) = f(e^{it}) \quad (3.58)$$

nicht-tangential a.e. auf  $\partial\mathbb{E}$  bezüglich des Masses  $\sigma$ .

Wir beweisen diesen Satz hier nicht.

### 3.3.5 Innere und äussere Funktionen

Sei  $1 \leq p < \infty$ , dann definieren wir den Funktionenraum

$$H^p := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \mid \|h\|_p < \infty\}$$

mit

$$\|h\|_p := \sup_{r \in (0,1)} \left( \int_0^{2\pi} |h(re^{it})|^p \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p}. \quad (3.59)$$

Wir für die  $L^p$ -Räume kann man auch noch den Raum  $H^\infty$  definieren, also ist die Norm

$$\|h\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{E}} |h(z)| \quad (3.60)$$

und  $H^\infty$  besteht dann aus den holomorphen und beschränkte Funktionen auf  $\mathbb{E}$ .

Wir bemerken, dass aufgrund des Satzes von Fatou jede holomorphe und beschränkte Funktion auf  $\mathbb{E}$ , d.h.  $f \in H^\infty$ , der nicht-tangentiale Grenzwert

$$f(e^{it}) = \lim_{z \rightarrow e^{it}} f(z)$$

fast überall auf  $S^1$  existiert bezüglich des Masses  $\sigma$ .

**Definition 3.14.** Eine **innere Funktion** ist eine holomorphe Abbildung  $A(z)$  mit  $|A(z)| \leq 1$  für  $z \in \mathbb{E}$ , so dass

$$|A(e^{i\theta})| = 1 \quad \sigma - \text{a.e. auf } S^1. \quad (3.61)$$

Eine **äussere Funktion** ist eine Funktion auf  $\mathbb{E}$  der Form

$$f(z) = \alpha \exp \left( \int_{S^1} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log w(e^{it}) d\sigma \right) \quad (3.62)$$

mit  $\alpha \in S^1$ ,  $w(e^{it}) > 0$   $\sigma$ -a.e. auf  $S^1$  und  $\log w \in L^1(\sigma)$ .

Nun wollen wir ein paar Tatsachen über innere und äussere Funktionen bemerken:

- Produkt von zwei inneren Funktionen ist wieder eine innere Funktion.
- Produkte und Quotienten von äusseren Funktionen sind wieder äussere Funktionen.
- Äussere Funktionen haben keine Nullstellen.
- Blaschke-Produkte  $b(z) = \prod_n b(z, d_n)$  mit

$$b(z, d) = \frac{|d|}{d} \frac{z - d}{\bar{d}z - 1}$$

und  $\sum_n (1 - |d_n|) < \infty$  sind innere Funktionen.

**Lemma 3.11.** Sei  $f(z)$  eine äussere Funktion und gegeben durch die Gleichung 3.62, wobei  $\log w \in L^1(\sigma)$  und  $|\alpha| = 1$ . Dann kann  $f$  als Quotient von zwei äusseren Funktionen geschrieben werden, wobei jede durch 1 in  $\mathbb{E}$  beschränkt ist. Desweiteren gilt:

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) \text{ existiert nicht-tang. a.e. auf } S^1, \quad (3.63)$$

$$|f(e^{i\theta})| = w(e^{i\theta}) \sigma - \text{a.e. auf } S^1. \quad (3.64)$$

Im Speziellen gilt  $\log |f(e^{i\theta})| \in L^1(\sigma)$  und

$$f(z) = \alpha \exp \left( \int_{S^1} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(e^{it})| d\sigma \right), \quad z \in \mathbb{E}. \quad (3.65)$$

*Beweis.* Aufgrund der Form von  $f$  haben wir

$$|f(z)| = \exp \left( \int_{S^1} P(z, e^{it}) \log w(e^{it}) \right)$$

und mit dem Satz von Fatou folgt

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} |f(z)| = w(e^{i\theta}) \quad (3.66)$$

nicht-tangential  $\sigma$ -a.e. auf  $S^1$ . Nun zerlegen wir  $f$  gemäss

$$f_{\pm}(z) = \exp \left( - \int_{S^1} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log^{\mp} w(e^{it}) d\sigma \right) \text{ für } z \in \mathbb{E},$$

wobei  $u^{\pm} := \max(\pm u, 0)$  für eine beliebige Funktion  $u$ . Dann gilt  $f = \alpha f_+ / f_-$ . Weiter sind diese zwei Funktionen durch 1 beschränkt in der Einheitskreisscheibe und die erste Behauptung folgt. Nach dem Korollar 1.19 in [10] existiert der Grenzwert

$$f_{\pm}(e^{i\theta}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f_{\pm}(z)$$

auf dem Einheitskreis. Da nun für fast alle  $\theta$

$$|f_-(e^{i\theta})| = \exp\left(-\log^+ w(e^{i\theta})\right) = \begin{cases} 1, & w \leq 1 \\ 1/w, & w > 1 \end{cases}$$

gilt, existiert der Grenzwert  $f(e^{i\theta}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$  fast überall. Die zweite Formel erhalten wir nun aus der Gleichung 3.66.  $\square$

**Satz 3.33.** Sei  $h \in H^1$ , dann gibt es eine (nicht-eindeutige) Faktorisierung

$$h = A \cdot f,$$

wobei  $A$  eine innere und  $f$  eine äussere Funktion ist.

*Beweis.* Nach dem letzten Lemma ist

$$f(z) := \exp\left(\int_{S^1} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |h(e^{it})| d\sigma\right)$$

eine äussere Funktion. Nun setzt man noch  $A := h/f$ .  $\square$

**Satz 3.34.** (Beurling)

Für jede nicht identisch verschwindende Hardy-Funktion  $h \in H^1$ , gibt es eine Faktorisierung der Form

$$h = b \cdot S \cdot f, \tag{3.67}$$

wobei  $b$  ein Blaschke-Produkt,  $f$  eine äussere Funktion und  $S$  eine singuläre, innere Funktion ist, d.h.  $S$  hat die Form

$$S(z) = \alpha \exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \frac{d\nu_s(e^{it})}{2\pi}\right], \tag{3.68}$$

wobei  $\nu_s$  ein singuläres Borelmass bezüglich dem Lebesgue-Mass ist.

Als einfaches Beispiel für ein singuläres Borelmass bzgl. einem Lebesgue-Mass denke man an ein Dirac-Mass.

*Beweisstrategie für den Satz von Beurling.*

- (1) Nullstellen von  $h$  ermöglichen es ein Blaschke-Produkt  $b$  zu bilden.
- (2) Dividiere die innere Funktion durch das Blaschke-Produkt und zeigen, dass eine singuläre innere Funktion entsteht.

$\square$

*Beweis.*

- (1) Die erste Aussage folgt aus dem folgenden Satz, wenn wir uns an den Abschnitt über Blaschke-Produkte erinnern:

**Satz 3.35.** (Satz von Szegö)

Sei eine nicht-triviale Hardy-Funktion  $h \in H^1$  gegeben, dann hat  $h$  höchstens abzählbar viele Nullstellen  $d_1, d_2, \dots$  in  $\mathbb{E}$  (mit Wiederholung) und für diese gilt

$$\sum_n (1 - |d_n|) < \infty.$$

Diesen Satz haben wir jedoch bereits bewiesen. (Jensen'sche Ungleichung)

- (2) Wir wissen, dass wir die Hardy-Funktion gemäss  $h = A \cdot f$  faktorisieren können, wobei  $A$  eine innere und  $f$  eine äussere Funktion ist. Nach dem Satz von Szegö gibt es nun ein Blaschke-Produkt  $b$  zu  $h$ . Da äussere Funktionen keine Nullstellen besitzen hat

$$S := \frac{A}{b}$$

keine Nullstellen und es gilt  $|A/b| = 1$ . Der folgende Satz zeigt nun, dass es sich bei  $S$  in der Tat um eine singuläre innere Funktion handelt:

**Satz 3.36.** Sei  $A$  eine innere Funktion ohne Nullstellen, dann gibt es ein singuläres Borel-Mass  $\mu_s$  bezüglich des Lebesgue-Masses auf  $S^1$ , so dass

$$A(z) = \alpha \exp \left( - \int_{S^1} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu_s(e^{it}) \right) \text{ mit } \alpha \in S^1. \quad (3.69)$$

*Beweis.* Da die Funktion  $A$  nullstellenfrei, holomorph und durch 1 beschränkt in  $\mathbb{E}$  ist, gibt es eine holomorphe Funktion  $f$  und eine komplexe Zahl  $\alpha \in S^1$ , so dass

$$g = \alpha e^{-f}.$$

Notwendigerweise muss  $f(0) > 0$  und damit  $\operatorname{Re}(f) \geq 0$  gelten. Damit können wir den Satz von Herglotz-Riesz anwenden. Also gibt es für  $f$  ein nicht-negatives Borel-Mass  $\mu$ , so dass

$$f(z) = \int_{S^1} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}).$$

Da nun  $g(e^{i\theta}) = 1$  fast überall auf  $S^1$ , haben wir

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \int_{S^1} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu = 0$$

nicht-tangential fast überall auf  $S^1$  und deshalb ist wegen dem Satz von Fatou  $\mu$  ein singuläres Mass. □

Damit haben wir alles bewiesen. □

## Literatur

- [1] R. Remmert, Funktionentheorie 1;
- [2] R. Remmert, Funktionentheorie 2;
- [3] K. Jänich, Funktionentheorie;
- [4] Carathéodory, C. Math. Ann. (1929);
- [5] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge Mathematical Library (2009);
- [6] M. Yoshida, Fuchsian Differential Equations (1987);
- [7] D. J. Newman und M. L. Slater, Waring's problem for the ring polynomials, J. Number Theory **11** (1979) 477-487;
- [8] V. I. Bogachev, Measure Theory, Volume I, Springer (2000);
- [9] H. Dym, H.P. McKean, Probability and mathematical statistics, Fourier series and integrals;
- [10] M. Rosenblum, J. Rovnyak, Topics in Hardy Classes and Univalent Functions, Birkhäuser Advanced Texts (1994);