Kapitel I (Vektorrechnung)

§1. Vektoren

Unser Raum ist 3-dimensional. Wir kennen drei Hauptrichtungen: rechts-links, vorne-hinten, oben-unten. Als *Modell* wählen wir:

- Ein Punkt O als Ursprung
- Drei zueinander senkrechte Richtungen nach der *rechten Hand-Regel*: legt man den Zeigefinger in x-Richtung und den Mittelfinger in y-Richtung, so zeigt der Daumen in z-Richtung
- Ein Längenmass in jeder Richtung.

Die Lage eines Punktes P ist dann durch 3 Zahlen x, y und z bestimmt. Diese Zahlen sind *reelle* Zahlen. Insbesondere können sie positiv, negativ oder null sein. Sie heissen *Koordinaten* von P.

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Als Modell des Raumes haben wir somit

$$\mathbb{R}^3 \;=\; \big\{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\big\}$$

Eine wichtige Grösse ist der *Abstand*. Der Abstand zwischen $O = (0,0,0)$ und P, mit Koordinaten (x, y, z), ist

$$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Der Abstand zwischen $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ ist

$$|AB| \;=\; \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\ .$$

Punkte sind eine erste Art von Objekten im Raum. Eine zweite wichtige Art sind Vektoren, *"Pfeile"*, oder *gerichtete Strecken*. Gegeben Punkte A, B in $\mathbb{R}^3$, betrachten wir die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ (A = Anfangspunkt, B = Endpunkt). Sie hat eine *Länge* oder *Betrag* $|\overrightarrow{AB}|$ und eine *Richtung*.

Wichtige Beispiele von Objekten welche einen Betrag und eine Richtung haben, kommen aus der Physik:

- *Kräfte* $\vec{K}$:

  · der Betrag gibt die Stärke der Kraft

  · die Richtung gibt die Richtung in welcher die Kraft ausgeübt wird.

- *Geschwindigkeiten* $\vec{v}$:

  · der Betrag ist die Geschwindigkeit z.B. in ms^{-1}.

  · die Richtung ist die momentane Richtung der Bewegung.

Es ist *zweckmässig* zwei gerichtete Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ als *gleich* (oder *äquivalent*) zu betrachten, falls sie *gleich lang* und *gleichsinnig parallel* sind.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} |AB| = |CD| \\ \text{gleichsinnig parallel.} \end{cases}$$

Sei $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$. Die *Koordinatendifferenzen*

$$b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3$$

nennen wir die *Komponenten* von $\overrightarrow{AB}$. Weil die Komponenten Koordinatendifferenzen sind, gilt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ und } \overrightarrow{CD} \quad \text{haben die gleichen Komponenten.}$$

Wir schreiben

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Wir haben $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$. Sowohl Punkte wie Vektoren werden also durch Tripel von Zahlen charakterisiert.Es gilt folgende Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} \textit{Punkt } P = (x, y, z) & \mapsto & \textit{Ortsvektor } \overrightarrow{OP} = \vec{r}_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \textit{Punkt } C & \leftarrow\!\shortmid & \text{Vektor } \overrightarrow{AB} = \vec{a} \end{array}$$

bestimmt durch

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}.$$

Also hat ein Tripel von Zahlen verschiedene Interpretationen:

- Punkt P

- Ortsvektor $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$

- Vektor $\vec{a}$ äquivalent zu $\vec{r}_P$.

Je nach Situation wird eine dieser Interpretationen benützt.

Operationen mit Vektoren:

- *Addition*
  Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CD}$. Wir definieren
  $$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AS}$$
  wobei S bestimmt wird durch $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BS}$, d.h. S ist der Endpunkt von $\vec{b}$, wenn $\vec{b}$ in B angeheftet wird. In Komponenten haben wir
  $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Regeln für die Addition

(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *Kommutativität*

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *Assoziativität*

(3) es gibt einen "Nullvektor" $\vec{0}$ mit $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(4) zu jedem $\vec{a}$ gibt es den entgegengesetzten Vektor $-\vec{a}$, d.h. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Aus (2) folgt, dass bei einer beliebigen Summe $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \cdots + \vec{a_n}$ keine Klammern nötig sind.
Subtraktion: $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$
wichtige Anwendung: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

Multiplikation mit einer Zahl

Sei $\vec{a}$ ein Vektor und λ eine reelle Zahl. Der Vektor $\lambda\vec{a}$ hat nach Definition die Länge
$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$
und ist gleichgesinnt wie $\vec{a}$ falls $\lambda > 0$, resp. entgegengesinnt falls $\lambda < 0$.

Anwendung: Haben zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ $(\neq \vec{0})$ dieselbe Richtung, so gibt es $\lambda \neq 0$ so dass $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Aus der Definition folgt, dass $\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$ falls $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Regeln:

$$
\begin{array}{ll}
0 & \cdot \vec{a} = \vec{0}, \ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \ (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} \\
\lambda & (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}, \ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}
\end{array}
$$

Ein Vektor $\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$ heisst *Einheitsvektor*. Die Menge der Punkte P mit $|OP| = 1$ ist die *Einheitssphäre* S^2 (S^1 ist der *Kreis* mit Radius 1).

Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so hat $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ die Länge 1 und heisst die Normierung von $\vec{a}$. Spezielle Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad x - \text{Richtung}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad y - \text{Richtung}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad z - \text{Richtung}$$

Jedes $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ lässt sich zerlegen als

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

Der Vektor $a_1 \vec{e}_1$ ist die *Komponente* von $\vec{a}$ in x-Richtung.

Anwendungen

(1) *Der Schwerpunkt*

Gegeben seien N Punktmassen $m_1, \ldots, m_N$ in den Punkten $A_1, \ldots, A_N$. Gesucht ist der *Schwerpunkt* dieses Systems. Der Schwerpunkt S ist definiert durch die *Momentenbedingung*

$$m_1 \overrightarrow{SA}_1 + m_2 \overrightarrow{SA}_2 + \cdots + m_N \overrightarrow{SA}_N = \vec{0}$$

$$\left[\text{Abkürzung} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{SA}_i = \vec{0}\right]$$

Wegen $\overrightarrow{SA}_i = \vec{a}_i - \vec{s}$ mit $\vec{a}_i = \overrightarrow{OA}_i$ und $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$ folgt

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{a}_i - \vec{s}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \vec{s}$$

somit

$$\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$$

In Komponenten, mit $S = (x_S, y_S, z_S)$, $A_i = (x_i, y_i, z_i)$,,

$$x_S = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\ , \quad y_S = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\ , \quad z_S = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Sind alle Massen gleich, so folgt $\vec{s} = \frac{1}{N} \sum \vec{a}_i$.

(2) *Parameterdarstellung einer Gerade*

Eine Gerade g wird durch 2 Punkte $A, B, A \neq B$, bestimmt. Sei P ein Punkt im Raum. Wir haben

$$P \in g \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

Der laufende Punkt von g hat somit den Ortsvektor

$$\begin{aligned} \vec{r}_P = \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A). \end{aligned}$$

⚠

Dieselbe Gerade kann verschiedene Parameterdarstellungen haben.

Beispiel: Sei g die Gerade durch $A = (1, 2, 1)$ und $B = (2, -1, -2)$. Gesucht ist der Schnittpunkt von g mit der (x, y)-Ebene.

Die Parameterdarstellung ist

$$x = 1 + t,\ y = 2 - 3t,\ z = 1 - 3t$$

Der Schnittpunkt Q ist gegeben durch die Bedingung $z = 0$, so dass $t = 1/3$ und $Q = (4/3, 1, 0)$.

(3) *Parameterdarstellung einer Ebene*

Die Ebene E sei durch 3 nicht-kollineare Punkte A, B, C gegeben. Die Ebene E wird erzeugt von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, also

$$P \in E \Longleftrightarrow \exists\ u, v \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$$

Der laufende Punkt von E hat somit den Ortsvektor.

$$\vec{r}_p = \vec{r}_A + u\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) + v\,(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \quad , u, v \in \mathbb{R}$$

Wir haben 2 Parameter: E ist ein "zweidimensionales" Gebilde. Entsprechend ist eine Gerade "eindimensional".

§2. Das Skalarprodukt

Wir geben eine *geometrische Definition* (d.h. *ohne* Koordinaten) und eine *analytische* Definition (*mit* Koordinaten). Sind 2 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ beide $\neq 0$, so ist der nichtorientierte Winkel $\varphi = \measuredangle\ (\vec{a}, \vec{b})$ wohldefiniert. Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die *Zahl*

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi} \qquad \text{(geometrische Definition)}$$

Wir haben

$$\begin{array}{lcll} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 & \Leftrightarrow & \varphi = \dfrac{\pi}{2} & (\vec{a} \perp \vec{b}), \quad \text{oder} \quad \vec{a} = \vec{0}, \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 & \Leftrightarrow & \varphi & \text{ist spitz} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 & \Leftrightarrow & \varphi & \text{ist stumpf .} \end{array}$$

Regeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} &= \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

Beweis: Die erste Regel ist klar. Bei der zweiten muss man die Fälle $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$ unterscheiden (benütze, dass $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$). Die dritte Regel ist weniger evident und wir geben einen Beweis. Wegen der 2. Regel können wir annehmen, dass $\vec{a} = \vec{e}$ ein Einheitsvektor ist. Jeder Vektor $\vec{x}$ besitzt eine wohlbestimmte *Orthogonalprojektion* in die Richtung von $\vec{e}$. Bezeichnen wir diesen Vektor mit $\vec{x}_{\vec{e}}$, so gilt (Figur!)

$$\vec{x}_{\vec{e}} = \big(|\vec{x}| \cdot \cos\varphi\big)\ \vec{e}\ , \quad \varphi = \not\sphericalangle\ (\vec{x}, \vec{e}).$$

Da $|\vec{e}| = 1$, folgt $\vec{x}_{\vec{e}} = (\vec{x} \cdot \vec{e})\vec{e}$.

Es ist klar (Figur!), dass $(\vec{x} + \vec{y})_{\vec{e}} = \vec{x}_{\vec{e}} + \vec{y}_{\vec{e}}$, d.h. die Projektion der Summe ist die Summe der Projektionen. Somit gilt

$$\big(\vec{e} \cdot (\vec{x} + \vec{y})\big)\vec{e} = (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e} + (\vec{e} \cdot \vec{y})\vec{e} = \big[(\vec{e} \cdot \vec{x}) + (\vec{e} \cdot \vec{y})\big]\vec{e}$$

und die Behauptung $\vec{e} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{e} \cdot \vec{x} + \vec{e} \cdot \vec{y}$ folgt durch Koeffizientenvergleich. $\Box$

Für die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gilt

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

Setzen wir $\qquad \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad$ "Kronecker-Delta"

so gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Für beliebige Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, folgt mit Hilfe der obigen Regeln, $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j\vec{e}_j$ und

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \Big(\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{3} b_j\vec{e}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdot a_3 b_3} \qquad \text{(analytische Definition)}$$

Kleine Anwendung: gegeben $\vec{a}, \vec{b}$; gesucht $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Speziell: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cos\varphi = \frac{-4-2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Wichtige Anwendung

Eine Ebene E kann durch eine normale Richtung und einen Punkt A gegeben werden (Figur!). Sei die normale Richtung durch einen Vektor $\vec{n}$ $(\neq \vec{0})$ bestimmt. Es gilt:

$$\begin{aligned} P \in E \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \\ &\Longleftrightarrow \quad \vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = n \cdot \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

In Koordinaten:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$$

Also bestimmt eine Ebene eine *lineare* Gleichung in x, y, z. Umgekehrt, jede solche Gleichung bestimmt eine Ebene: Sei $n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$ die Gleichung. Sei (a_1, a_2, a_3) irgendeine Lösung, d.h. $n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = d$ dann ist die Ebene bestimmt durch $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Abstand Punkt-Ebene

Sei die Ebene E durch den Punkt A und die Normale $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$ gegeben und sei P ein Punkt im Raum. Sei D der Schnittpunkt mit E der Gerade durch P in Richtung $\vec{n}$. Die Länge $|\overrightarrow{PD}|$ ist der *Abstand* zwischen P und E. Wir haben (Figur!)

$$\overrightarrow{PD} = (\overrightarrow{PA})_{\vec{n}} = (\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

und somit

$$d = |\overrightarrow{PD}| = |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|.$$

Ist $\vec{n}$ nicht normiert, so gilt $d = \dfrac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$.

Übung: Interpretiere das Vorzeichen von $\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}$.

Wir haben eine Ebene auf 2 Arten dargestellt:

1. durch eine Parameterdarstellung

2. durch eine lineare Gleichung. Aus den 3 Gleichungen einer Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u \cdot b_1 + v \cdot c_1 \\ y &= a_2 + u \cdot b_2 + v \cdot c_2 \\ z &= a_3 + u \cdot b_3 + v \cdot c_3 \end{aligned}$$

können wir u und v eliminieren. Es bleibt *eine* Gleichung in x, y und z. Umgekehrt, gegeben eine lineare Gleichung für die Ebene E, kann man 3 Punkte (nicht kollinear) auf E finden und eine entsprechende Parameterdarstellung aufstellen.

Physikalische Anwendung des Skalarproduktes. Die *Arbeit* einer konstanten Kraft K längs einem Weg parallel zur Kraft ist bekanntlich:

$$\boxed{\text{Arbeit} \;=\; \text{Kraft} \cdot \text{Weg}} \quad \text{oder} \quad W = K \cdot d$$

Ist die Richtung der Kraft nicht in Richtung des Weges und ist der Weg geradlinig von A nach B so gilt $W = K^1 \cdot |AB|$, wobei K^1 die Komponente von $\vec{K}$ in Richtung des Weges ist. Also

$$W = |\vec{K}_{\vec{e}}| \cdot |\overrightarrow{AB}|$$

wobei $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$. Da $|\vec{K}_{\vec{e}}| = |\vec{K} \cdot \vec{e}|$ folgt $W = |\vec{K} \cdot \overrightarrow{AB}|$. Will man das Vorzeichen berücksichtigen (positive, resp. negative Arbeit) so setzt man

$$W = \vec{K} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Beispiel: Segelboot im Wind! (Figur!)

§3. Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein *Vektor*. Es wird wie folgt definiert:

- Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, oder $\vec{a} = \vec{0}$, resp. $\vec{b} = \vec{0}$, so ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallel, so
  - $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \qquad \varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$
  - $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (rechte Hand-Regel!)

Folgerungen:

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *linear abhängig* (d.h. es gibt, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ nicht beide $= 0$ mit $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$.
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt F des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$F \;=\; \text{Basis} \cdot \text{Höhe} \;=\; |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \cdot \sin\varphi)$$

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\ ,\quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_{i+1} = \vec{e}_{i+2}$ (Index modulo 3)
- $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

  Der Beweis dieser Regeln folgt ziemlich unmittelbar aus der Definition. Die nächste Regel

- $\vec{a} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{y}$

  ist weniger evident. Zum Beweis dürfen wir annehmen, dass $\vec{a} \neq \vec{0}$ und, durch Normierung, dass $\vec{a} = \vec{e}$ ein Einheitsvektor ist. Sei E die Ebene senkrecht zu $\vec{e}$ durch O und sei D die Drehung um die Achse $\vec{e}$ um $\frac{\pi}{2}$. Sei weiter P die Orthogonalprojektion auf E (Figur!).

  Es gilt

$$\begin{aligned} D(\vec{x} + \vec{y}) &= D(\vec{x}) + D(\vec{y}) \\ P(\vec{x} + \vec{y}) &= P(\vec{x}) + P(\vec{y}) \\ |P(\vec{x})| &= |\vec{x}| \cdot \sin\varphi, \qquad \varphi = \measuredangle\,(\vec{x}, \vec{e}) \\ &= |\vec{x}||\vec{e}| \cdot \sin\varphi = |\vec{e} \times \vec{x}| \end{aligned}$$

Behauptung: $D\big(P(\vec{x})\big) = \vec{e} \times \vec{x}$.

Beweis: $|D\big(P(\vec{x})\big)| = |P(\vec{x})| = |\vec{e} \times \vec{x}|$. Also sind die Längen gleich.

Die Richtung stimmt auch (rechte Hand-Regel!). □

Es folgt nun

$$\begin{aligned} \vec{e} \times (\vec{x} + \vec{y}) &= D\big(P(\vec{x} + \vec{y})\big) = D\big(P(\vec{x}) + P(\vec{y})\big) \\ &= D\big(P(\vec{x})\big) + D\big(P(\vec{y})\big) = \vec{e} \times \vec{x} + \vec{e} \times \vec{y}\ . \end{aligned}$$

Somit ist die letzte Regel auch bewiesen.

Wir können jetzt das Vektorprodukt mit Koordinaten berechnen: Sei $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \Big(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i\Big) \times \Big(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \\
&= \big(a_2 b_3 - a_3 b_2\big)\vec{e}_1 + \big(a_3 b_1 - a_1 b_3\big)\vec{e}_2 + \big(a_1 b_2 - a_2 b_1\big)\vec{e}_3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \big(a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1\big)}$$

Die Koeffizienten sind 2-reihige *Determinanten*. Man schreibt sie auch als

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 =: \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

Anwendungen:

- *Fläche eines Dreiecks im Raum.* Sei das Dreieck durch die Ecken A, B und C gegeben. Es gilt
$$F = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

- *Schnitt von 2 Ebenen.* Der Schnitt ist eine Gerade. Wir suchen eine Parameterdarstellung dieser Gerade.

  $E_1 : n_1 x + n_2 y + n_3 z = d_1$

  $E_2 : m_1 x + m_2 y + m_3 z = d_2$

  E_1 ist senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. E_2 ist senkrecht zu $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$, somit ist die Schnittgerade parallel zu $\vec{n} \times \vec{m}$. (Figur!) Wir brauchen noch einen Punkt A um die Gerade festzulegen. Die Koordinaten a_1, a_2, a_3 von A sind Lösung der zwei Gleichungen für E_1 und E_2.

- *Abstand Punkt - Gerade.* Eine Gerade g sei durch zwei Punkte A, B gegeben. Gesucht ist der Abstand eines Punktes P zur Gerade g. Man betrachte das von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ aufgespannte Parallelogramm. Seine Höhe bezüglich der Basis $|\overrightarrow{AB}|$ ist die Distanz d von P zu g. Also bekommen wir für die Fläche F:

$$F = |\overrightarrow{AB}| \cdot d = |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|$$

so dass $d = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} \;=\; |\overrightarrow{AP} \times \vec{e}| \quad \text{falls} \quad \vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

- *Vektordarstellung einer Drehung.* Ein Körper dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $w > 0$ um die Achse g durch O. Sei $\vec{e}$ der durch die Korkzieherregel bestimmte Einheitsvektor auf g (Figur !). Der Vektor $\vec{w} = w\vec{e}$ heisst *Winkelgeschwindigkeitsvektor*. Sei $\vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Masseteilchen an der Stelle P und sei $v = |\vec{v}|$. Es gilt

  $$|\vec{v}| = w \cdot d\ , \quad d \quad \text{Abstand zwischen } g \text{ und } P$$

  somit $|\vec{v}| = w|\vec{e} \times \vec{r}_P| = |\vec{w} \times \vec{r}_P|$. Weiter gilt $\vec{v} \perp \vec{e},\ \vec{v} \perp \vec{r}_P$ und das Tripel $\vec{w}, \vec{r}_P, \vec{v}$ ist ein Rechtssystem. (Figur !) Es ergibt sich

  $$\boxed{\vec{v} \;=\; \vec{w} \times \vec{r}_P.}$$

- *Gleichung einer Ebene.* Ist die Ebene E durch 3 Punkte (A, B, C) gegeben, so ist $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ senkrecht zu E. Somit ist die Gleichung

  $$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \vec{r}_P = \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \vec{r}_A$$

  eine Gleichung für E.

§4. Das gemischte Produkt (oder Spatprodukt)

Gegeben drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, sie spannen ein Parallelepiped auf mit Volumen V. Wir definieren

$$[\,\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\,] \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } V = 0 \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar}) \\ V & \text{falls } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ein Rechtssystem bilden} \\ -V & \text{falls } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ein Linkssystem bilden} \end{cases}$$

Aus der Definition folgt sofort

$$\begin{aligned} [\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] &= [\,\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\,] = [\,\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\,] \\ &= -[\,\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\,] = -[\,\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\,] = -[\,\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\,] \end{aligned}$$

Das Volumen V lässt sich als Basis $\times$ Höhe berechnen. Nehmen wir als Basis das Parallelogramm aufgespannt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so gilt

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h$$

Eine Normale zur Ebene aufgespannt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Sei φ der Winkel zwischen $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}$. Dann gilt $h = |\vec{c}| \cdot |\cos\varphi|$, also

$$V \;=\; |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cdot \cos\varphi \;=\; |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ist ein Rechtssystem genau wenn φ spitz ist, d.h. $\cos\varphi > 0$ und ein Linkssystem genau dann wenn φ stumpf ist, d.h. $\cos\varphi < 0$. Es folgt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \;=\; (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Folgerung: Da $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \;=\; [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$ gilt,

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \;=\; (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}}$$

In Koordinaten ist $\left(\text{mit } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{aligned}
[\,\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\,] \quad &= \quad a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \quad a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&=: \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{“3-reihige” Determinante}
\end{aligned}$$

Anwendungen:

- *Volumen eines von 4 Punkten (A, B, C, D) aufgespannten Tetraeders T.* Das Parallelepiped aufgespannt von den 3 Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ enthält 6 Tetraeder mit Volumen T. Somit

$$V \;=\; \frac{1}{6}\,[\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\,]\,.$$

- *Abstand Gerade-Gerade.* Sei g durch A, B und h durch C, D gegeben. Sei P auf g und Q auf h so, dass $|\overrightarrow{PQ}|$ der gewünschte Abstand d ist. Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist senkrecht zu g und h. Sei

$$\vec{n} \;=\; \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|}$$

und damit $\overrightarrow{PQ} \;=\; (\overrightarrow{AC})_{\vec{n}}$. Es folgt

$$\begin{aligned} d \;&=\; |(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \cdot \vec{n}| \;=\; \Big|\, (\vec{r}_C - \vec{r}_A) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|} \right) \\ &=\; \frac{[\,\vec{r}_C - \vec{r}_A,\; \overrightarrow{AB},\; \overrightarrow{CD}\,]}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|} \end{aligned}$$

- *Lösung eines Systems von 3 linearen Gleichungen.* Das System

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 kann verktoriell geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} &= \vec{d} && |\times\vec{b} \\ x_1(\vec{a} \times \vec{b}) + x_3(\vec{c} \times \vec{b}) &= \vec{d} \times \vec{b} && |\cdot\vec{c} \\ x_1[\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] &= [\,\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}\,] \\ x_1 &= \frac{[\,\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}\,]}{[\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,]}\;. \end{aligned}$$

Es folgt analog:

$$x_2 = \frac{[\,\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}\,]}{[\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,]} \qquad x_3 = \frac{[\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\,]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}$$

Als unmittelbare Folgerung haben wir die Identität

$$[\,\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}\,]\;\vec{a} + [\,\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}\,]\;\vec{b} + [\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\,]\;\vec{c} = [\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,]\;\vec{d}\;.$$

Diese Formeln (Cramer) lassen sich für Systemen von n Gleichungen mit n Unbekannten verallgemeinern.

§5. Mehrfache Produkte

Wir haben bis jetzt 3 Produkte definiert

- das Sklarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$
- das gemischte Produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Es gibt weitere Kombinationen: z.B.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}),\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}),\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) \ldots$$

Eine Formel für $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$: Zuerst muss man merken, dass (im allgemeinen)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

d.h. das Vektorprodukt ist *nicht* assoziativ. Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &&= -\vec{e}_2 \\ (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 &= \vec{0} \times \vec{e}_2 &&= \vec{0}\ . \end{aligned}$$

Man hat die *Grassmannsche Identität*:

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

Wir beweisen nur die erste. Ein (langer) Beweis ist mit Koordinaten links und rechts zu rechnen. Ein geschickter Beweis ist die Koordinaten anzupassen: Wir wählen:
- $\vec{e}_1$ in Richtung von $\vec{a}$.
- $\vec{e}_2$ so, dass $\vec{b}$ in der Ebene liegt, welche von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ erzeugt und
- $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$.

Dann haben wir $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Es folgt: $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -a_1 b_2 c_2 \\ a_1 b_2 c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{und} \quad (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1c_1b_1 \\ a_1c_1b_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (b_1c_1+b_2c_2)a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1b_2c_2 \\ a_1b_2c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Folgerung bekommen wir die *Jacobische Identität*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{0}$$

Beweis: $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} + (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} = \vec{0}$.

Bemerkung: Ein Vektorraum V mit Produkt “$\star$” so, dass
(1) $a\star b = -b\star a$
(2) $(a\star b)\star c + (b\star c)\star a + (c\star a)\star b = 0$
heisst *Lie-Algebra.*

Weitere Identitäten:

Behauptung:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \quad \textit{(Lagrange)}\\ &= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}\,] = [\,\vec{b},\vec{c}\times\vec{d},\vec{a}\,]\\ &= \vec{a}\cdot\big(\,\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})\,\big)\\ &= \vec{a}\cdot\big\{\,(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}\,\big\}\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

□

Spezialfall: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 \;=\; |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \;-\; (\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$

Bemerkung: In $\mathbb{R}^n$ haben wir das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$ und die Norm $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. Ein Vektorprodukt $\times$ in $\mathbb{R}^n$ mit $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ gibt es nur für $n = 3$ und $n = 7$!

Behauptung:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\,\vec{a},\vec{b},\vec{d}\,]\,\vec{c} \;-\; [\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,]\,\vec{d}\\ &= [\,\vec{a},\vec{c},\vec{d}\,]\,\vec{b} \;-\; [\,\vec{b},\vec{c},\vec{d}\,]\,\vec{a}.\end{aligned}$$

Beweis: Sei $\vec{u} = \vec{a}\times\vec{b}$. Dann

$$\vec{u}\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{u}\cdot\vec{d})\,\vec{c} - (\vec{u}\cdot\vec{c})\,\vec{d} = [\,\vec{a},\vec{b},\vec{d}\,]\,\vec{c} - [\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,]\,\vec{d}$$

□

Spezialfall: $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = [\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,]\,\vec{c}.$