Kapitel II Sphärische Geometrie

§1. Sphärische Dreiecke

Die 2-dimensionale (Einheit-)Sphäre ist die Fläche

$$S^2 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid |\overrightarrow{OP}| = 1\}.$$

Zwei Punkte $A, B \in S^2$, welche verschieden und nicht antipodal sind, bestimmen eine Ebene E durch 0. Der Schnitt von E mit S^2 ist ein *Grosskreis*. Der Grosskreisbogen ($< \pi$) zwischen A und B wird als *Seite* $\widehat{AB}$ definiert. Grosskreise sind "geodätische Linien", d.h. die Seite $\widehat{AB}$ ist der kürzeste Weg zwischen A und B, welcher ganz auf S^2 liegt. Drei Punkte A, B und C auf S^2 so, dass die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ linear unabhängig sind, bestimmen ein *sphärisches Dreieck*, dessen Seiten Grosskreisbogen sind. Das Dreieck $\triangle(ABC)$ hat drei Winkel

$$\alpha \quad (\text{ mit Spitze in } A), \quad \beta \quad (\text{ mit Spitze in } B), \quad \gamma \quad (\text{ mit Spitze in } C)$$

und drei Seiten

$$a \quad (\text{gegenüber } A), \quad b \quad (\text{gegenüber } B), \quad c \quad (\text{gegenüber } C)$$

Die Winkel und die Seiten werden in Bogenmass gemesssen. Nach Definition haben wir

$$a = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}), \quad b = \sphericalangle(\vec{c}, \vec{a}), \quad c = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Der Winkel α ist der Winkel zwischen den Ebenen E_1, erzeugt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und E_2, erzeugt durch $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Da $\vec{a} \times \vec{b} \perp E_1$ und $\vec{a} \times \vec{c} \perp E_2$ gilt

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b},\ \vec{a} \times \vec{c})$$

und analog

$$\beta = \sphericalangle(\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{b} \times \vec{c}), \quad \gamma = \sphericalangle(\vec{c} \times \vec{b},\ \vec{c} \times \vec{a}).$$

Es folgt

$$\begin{array}{llllllll}
\cos a & = & \vec{b} \cdot \vec{c}, & \sin a & = & |\vec{b} \times \vec{c}|, & \cos \alpha & = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}{|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{a} \times \vec{c}|} \\
\cos b & = & \vec{c} \cdot \vec{a}, & \sin b & = & |\vec{c} \times \vec{a}|, & \cos \beta & = \frac{(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{a}||\vec{b} \times \vec{c}|} \\
\cos c & = & \vec{a} \cdot \vec{b}, & \sin c & = & |\vec{a} \times \vec{b}|, & \cos \gamma & = \frac{(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}{|\vec{c} \times \vec{b}||\vec{c} \times \vec{a}|}
\end{array}$$

§2. Sphärische Trigonometrie

Ein sphärisches Dreieck wird durch 3 Grössen bestimmt. Das Ziel der sphärischen Trigonometrie ist es, Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen der Seiten und Winkel in einem sphärischen Dreieck zu finden. Frühere subtile geometrische Schlüsse können durch Verwendung der Vektorrechnung vermieden werden. Die Bezeichnungen sind diejenigen von § 1.

Satz: Sei $V = |[\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,]|$ das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipedes. Es gilt

$$\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma = V.$$

Beweis: Es gilt $(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{c} \times \vec{b}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{c}$ (siehe Abschnitt über mehrfache Produkte von Vektoren) somit

$$|(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{c} \times \vec{b})| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

andererseits:

$$|(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{c} \times \vec{b})| \;=\; |\vec{c} \times \vec{a}| \cdot |\vec{c} \times \vec{b}| \cdot \sin \gamma.$$

Da

$$|\vec{c} \times \vec{a}| = \sin b,\; |\vec{c} \times \vec{b}| = \sin a$$

folgt die Behauptung. □

Folgerung: $\frac{\sin \gamma}{\sin c} \;=\; \frac{V}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}$.

Da die rechte Seite in a, b und c symmetrisch ist, folgt der *Sinus-Satz:*

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}}$$

Seiten - Cosinus - Satz

$$\boxed{\begin{array}{rcccc} \cos a & = & \cos b \cdot \cos c & + & \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \\ \cos b & = & \cos c \cdot \cos a & + & \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta \\ \cos c & = & \cos a \cdot \cos b & + & \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \end{array}}$$

Beweis: Wir benützen die Lagrangesche Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Auf Grund der Definition des Skalarprodukts gilt

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) &= |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{a}\times\vec{c}|\cos\alpha \\ &= \sin c\cdot\sin b\cdot\cos\alpha.\end{aligned}$$

Anderseits ist

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \cos a-\cos b\cos c$$

und somit

$$\cos a = \cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha.$$

Die anderen Formeln folgen durch zyklische Vertauschung. $\square$

Anwendung: Entfernung auf der Erde.

Idealisiert ist die Erde eine Kugel mit Radius $r = 6371$ km. Ein Punkt P der Erdoberfläche kann durch zwei (geographische) Koordinaten festgelegt werden:

(1) die (westliche, bzw. östliche) *Länge* φ, gemessen aus dem Null-Meridian (Greenwich). Die Grösse φ ist der Winkel zwischen der vertikalen Ebene bestimmt durch $0, N =$ Nordpol und $G =$ Greenwich, und der vertikalen Ebene durch $0, N$ und den Punkt P.

(2) die (nördliche, bzw. südliche) *Breite* ϑ; sie ist bestimmt durch die Distanz zum *Äquator* (auf dem Grosskreis).

Länge und Breite werden im Winkelmass gemessen.

Beispiel: Paris: $(\varphi = 2.3^\circ\ E,\ \ \vartheta = 48.8^\circ\ N)$, Berlin: $(\varphi = 13.4^\circ\ E,\ \ \vartheta = 52.5^\circ\ N)$

Der Übergang zu den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned}x &= r\cos\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\cos\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\sin\vartheta\end{aligned}$$

Der Abstand ρ von P zur z-Achse ist gleich $r\cos\vartheta$. Seien jetzt P_1, resp. P_2, gegeben durch (φ_1,ϑ_1), resp. (φ_2,ϑ_2) (z.B., $P_1 =$ Paris, $P_2 =$ Berlin). Im sphärischen Dreieck N (= Nordpol), P_1, P_2 haben wir für die Seiten:

$$\overset{\frown}{NP_1} = 90^\circ-\vartheta_1, \quad \overset{\frown}{NP_2} = 90^\circ-\vartheta_2$$

und $\widehat{P_1P_2}$ ist zu berechnen. Der Winkel in N (gegenüber der Seite $\widehat{P_1P_2}$) ist gleich $\varphi_2 - \varphi_1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \cos \widehat{P_1P_2} &= \cos(90^\circ - \vartheta_1)\cos(90^\circ - \vartheta_2) \\ &+ \sin(90^\circ - \vartheta_1)\sin(90^\circ - \vartheta_2)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

oder

$$\boxed{\cos \widehat{P_1P_2} = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Bemerkung: Wir haben auch

$$\begin{aligned} \cos \widehat{P_1P_2} &= \cos \sphericalangle(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}) \\ &= \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} \end{aligned}$$

und die kartesischen Koordinaten von P_1, resp. P_2 lassen sich durch

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

berechnen. So bekommt man eine andere Herleitung der obigen Formel.

§3. Referenzsysteme in der Astronomie

Sei E der Beobachtungsort. Man interpretiere alle Himmelsrichtungen als Punkte auf einer Sphäre mit Zentrum E (Himmelskugel). Wir haben folgende Spezialrichtungen. (Figur!)

- Z: *Zenit* vertikale Richtung über E
- N_a: *Nadir* antipodale Richtung zu Z
- N, S, W, O: *Nord, Süd, West, Ost* in der horizontalen Ebene durch E (*Horizont*)
- P_N, P_S: *nördlicher* und *südlicher Himmelspol*
- φ: *Polhöhe*, Erhebung von P_N über Horizont.

Der *Äquator* ist die Ebene durch E senkrecht zur Polrichtung. Der *Meridian* ist die vertikale Ebene durch Z und P_N. (Figur!)

Die Lage eines Sternes St wird durch zwei Koordinaten bestimmt, welche der geometrischen Breite und der geometrischen Länge entsprechen. Es werden zwei Koordinatensysteme verwendet.

1. *Das Horizontsystem* (lokale Beobachtung).

   Das System wird durch das System der Vertikal- und Höhenkreise dargestellt.

   h: die *Höhe* (über Horizont) ist der Winkel zwischen St und Horizont gemessen auf dem Vertikalgrosskreis durch St.

   $z = 90° - h$ ist die *Zenitdistanz*.

   a: das *Azimut* ist der Winkel zwischen der vertikalen Ebene durch St und der vertikalen Ebene durch die Südrichtung S.

2. *Das Äquatorsystem* (astronomische Jahrbücher).

   Das System wird durch das System der Stunden- und Parallelkreise dargestellt. Der *Stundenkreis* geht durch die Achse $P_N - P_S$ und durch den Stern St. Parallelkreise sind parallel zum Äquator.

   δ: die *Deklination* ist die Höhe über dem Äquator, gemessen auf dem Stundenkreis.

   S: der *Stundenwinkel* stellt den Winkel zwischen dem Meridian und dem Stundenkreis dar. Er wird häufig in Stunden gemessen (1 Std. = 15°, 1° = 4 min).

Fast alle Probleme der astronomischen Ortsbestimmung finden ihre Lösung im sphärischen Dreieck Nordpol P_N, Zenith Z, Stern St, welches als *astronomisches* (oder *nautisches*) *Dreieck* bezeichnet wird. (Figur!)

Die Seiten und Winkel des Dreiecks $\triangle\,(P_N, Z, St)$ sind

$$\begin{array}{lcl}
S & = & \sphericalangle \text{ in } P_N \\
180° - a & = & \sphericalangle \text{ in } Z \\
\overset{\frown}{P_N Z} & = & 90° - \varphi \\
\overset{\frown}{P_N St} & = & 90° - \delta \\
\overset{\frown}{Z St} & = & 90° - h
\end{array}$$

Der Winkel in St, der sogenannte *parallaktische Winkel*, ist von geringerer Bedeutung, da er nicht gemessen werden kann.

Mit Hilfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie kann man von einem Koordinatensystem in das andere übergehen. z.B.

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - \delta) \\ &+ \sin(90^\circ - \varphi)\sin(90^\circ - \delta)\cos S\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos S.}$$

§4. Übergang zur ebenen Trigonometrie

Sei ABC ein sphärisches Dreieck auf S^2 mit Seiten a, b, c und Winkeln α, β, γ. Wir nehmen an, dass die Seitenlängen klein seien gegenüber 1, z.B. $\cong 0,01$. Eine solche Seite entspricht einer Distanz von ungefähr 60 km auf der Erde, da der Radius 6371 km beträgt.

Aus den *Taylorentwicklungen:*

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - + \cdots \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - + \cdots .\end{aligned}$$

ergeben sich folgende Approximationen

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$$

wenn man höhere Potenzen ($x^3 \approx 10^{-6}$) vernachlässigt. Aus dem Sinus-Satz

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}}$$

der sphärischen Trigonometrie folgt dann der Sinus-Satz

$$\boxed{\tfrac{\sin\alpha}{a} = \tfrac{\sin\beta}{b} = \tfrac{\sin\gamma}{c}}$$

der ebenen Trigonometrie. Aus dem Seiten-Cosinus-Satz

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$$

folgt

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc\cos\alpha$$

oder der Cosinus-Satz der ebenen Trigonometrie:

$$\boxed{a^2 \;=\; b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

da man b^2c^2 auch vernachlässigen kann. Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ so folgt aus dem Seiten-Cosinus-Satz

$$\boxed{\cos a \;=\; \cos b \cos c} \quad \text{(sphärischer Pythagoras), im Grenzfall:}$$

$$\boxed{a^2 \;=\; b^2 + c^2} \quad \text{(ebener Pythagoras).}$$

§5. Die Formel von Gauss-Bonnet für sphärische Dreiecke

Sei ABC ein sphärisches Dreieck auf der Sphäre S^2, vom Radius 1, und sei F_{ABC} sein Flächeninhalt.

Satz: $F_{ABC} \;=\; \alpha + \beta + \gamma - \pi.$

Beweis: Sei $\bar{A}$ (resp. $\bar{B}, \bar{C}$) der antipodale Punkt zu A, resp. B, C. Die Sphäre S^2 wird durch die 8 Dreiecke

$$\begin{array}{llll} \triangle(A,B,C), & \triangle(\bar{A},\bar{B},C), & \triangle(\bar{A},B,C), & \triangle(A,\bar{B},C) \\ \triangle(\bar{A},\bar{B},\bar{C}), & \triangle(A,B,\bar{C}), & \triangle(A,\bar{B},\bar{C}), & \triangle(\bar{A},B,\bar{C}) \end{array}$$

überdeckt (Figur!). Antipodale Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt. Es folgt:

$$F_{ABC} + F_{\bar{A}\bar{B}C} + F_{\bar{A}BC} + F_{A\bar{B}C} = F_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + F_{AB\bar{C}} + F_{A\bar{B}\bar{C}} + F_{\bar{A}B\bar{C}}.$$

Da die Gesamtoberfläche von S^2 gleich 4π ist, folgt

$$F_{ABC} + F_{\bar{A}\bar{B}C} + F_{\bar{A}BC} + F_{A\bar{B}C} = 2\pi.$$

Zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite schliessen sich zu einem 2-Eck mit antipodalen Punkten als Ecken, z.B.

$$\triangle(A,B,C) \cup \triangle(A,\bar{B},C)$$

ist das 2-Eck mit Öffnungswinkel β in B, resp. $\bar{B}$. Die Oberfläche eines solchen 2-Eckes ist proportional zu β und für $\beta = 2\pi$ erhält man die ganze Oberfläche von S^2, also 4π. Es folgt, dass

$$\begin{array}{lcccl} F_{ABC} & + & F_{A\bar{B}C} & = & 2\beta \\ F_{\bar{A}BC} & + & F_{ABC} & = & 2\alpha \\ F_{\bar{A}\bar{B}C} & + & F_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} & = & 2\gamma. \end{array}$$

Da $F_{ABC} = F_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ folgt durch Summieren der 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} 2(\alpha+\beta+\gamma) &= 3F_{ABC} + F_{A\bar{B}C} + F_{\bar{A}BC} + F_{\bar{A}\bar{B}C} \\ &= 3F_{ABC} + 2\pi - F_{ABC} \end{aligned}$$

so, dass

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma-\pi \;=\; F_{ABC}}$$

$\square$

Beispiel: Sei $\triangle(A,B,C)$ ein gleichseitiges Dreieck auf S^2 mit Seitenlänge $a = \dfrac{60}{6371}$ (entspricht eine Seite von 60 km auf der Erde). Aus dem Seiten-Cosinus-Satz (mit $a = b = c$) folgt

$$\cos\alpha \;=\; \tfrac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a} \;=\; \tfrac{\cos a}{1+\cos a}$$

so, dass $\alpha = 60{,}00073°$. Die entsprechende Fläche auf der Erde ist

$$F_{\text{Erde}} \;=\; (6371)^2(3\alpha - \pi) \;=\; 1558.863 \text{ km}^2.$$

Ein ebenes Dreieck mit Seitenlänge $a = 60$ km hat den Inhalt

$$F_{\text{Ebene}} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1558.846\text{km}^2.$$

Der Unterschied ist ungefähr $0{,}001\%$.

§6. Geographische Karten

Eine *Karte* für ein Flächenstück im Raum (z.B. ein Teil der Einheitssphäre S^2) ist eine bijektive Abbildung dieses Flächenstückes in die Ebene $\mathbb{R}^2$. Mit Hilfe dieser Abbildung werden *Koordinaten* auf der Fläche definiert. Die Abbildung soll *glatt* sein (genügend oft differenzierbar) und so wenig wie möglich verzerrend. Die "perfekte" Karte ist *längentreu*, *winkeltreu* und *flächentreu*. Man spricht dann von einer *isometrischen* Karte.

Beispiel: Ein Zylinder oder ein Kegel kann isometrisch in die Ebene abgebildet werden: man schneide die Fläche längs einer Mantellinie auf und rolle sie ab!

Satz: Auf S^2 (oder Teilen von S^2) gibt es *keine* isometrische Karte.

Beweis: Bei einer Isometrie gehen geodätische Linien auf geodätische Linien (kürzeste

Strecken!) über. Also ist das Bild eines sphärischen Dreieckes $\Delta(A,B,C)$ ein ebenes Dreieck $\Delta(A^*,B^*,C^*)$. Da die Winkel erhalten bleiben, gilt $\alpha^*+\beta^*+\gamma^* = \alpha+\beta+\gamma$. Auf S^2 gilt $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ (da $\alpha+\beta+\gamma-\pi = F_{ABC}$). In der Ebene gilt $\alpha^*+\beta^*+\gamma^* = \pi$. Aus diesem Widerspruch folgt, dass es *keine* Isometrie $S^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt. □

Eine Karte auf S^2 (oder auf einem Teil von S^2) weist Verzerrungen auf. Sie kann nicht gleichzeitig längentreu und winkeltreu sein. Wir diskutieren verschiedene berühmte Beispiele von kartographischen Projektionen.

1. Die Zylinderprojektion (Archimedes 287-212 v. Chr. / Lambert 1728-1777).
Die Erdkugel wird von der Polarachse aus waagrecht auf jenen Zylinder projiziert, welcher die Kugel längs dem Äquator berührt. Der Zylinder wird nach der Projektion längs einer Mantellinie aufgeschnitten und abgerollt. Die gesamte Kugeloberfläche wird auf ein Rechteck abgebildet. Breitenkreise gehen in waagrechte Strecken über, Meridiane (Längenkreise) in senkrechte Strecken. Längentreu wird nur der Äquator abgebildet. Die Verzerrung ist besonders deutlich in höheren Breiten (Pole!).

Verzerrung in senkrechter Richtung:
Seien r der Radius der Kugel und φ, ϑ die geographischen Koordinaten. Seien

$$P : (\varphi, \vartheta), \quad Q : (\varphi, \vartheta + \Delta\vartheta)$$

benachbarte Punkte auf demselben Längenkreis, so dass $|\overset{\frown}{PQ}| = r \cdot \Delta\vartheta$. Seien P^* und Q^* die Bilder; es gilt auf dem Zylinder: $|\overset{\frown}{P^*Q^*}| = r\cos\vartheta \cdot \Delta\vartheta$ (Figur!). Der Verzerrungsfaktor ist $\cos\vartheta$.

Verzerrung in waagrechter Richtung:
Seien

$$P : (\varphi, \vartheta), \quad R : (\varphi + \Delta\varphi, \vartheta)$$

benachbarte Punkte auf einem Breitenkreis so, dass: $|\overset{\frown}{PR}| = \rho \cdot \Delta\varphi = r\cos\vartheta \cdot \Delta\varphi$, wobei $\rho = r\cos\vartheta$ der Abstand zur Polarachse ist. Für die Projektion gilt $|\overset{\frown}{P^*R^*}| = r \cdot \Delta\varphi$ (Figur!). Der Verzerrungsfaktor ist $\frac{1}{\cos\vartheta}$.

Satz: Die Zylinderprojektion ist flächentreu.

1. Beweis: Man betrachte ein kleines sphärisches Rechteck $ABCD$ mit

$$A = (\varphi, \vartheta), \quad B = (\varphi, \vartheta + \Delta\vartheta), \quad C = (\varphi + \Delta\varphi, \vartheta + \Delta\vartheta), \quad D = (\varphi + \Delta\varphi, \vartheta).$$

Seine Fläche ist

$$F = |\overset{\frown}{AB}| \cdot |\overset{\frown}{AD}| = (r\Delta\vartheta)(r\cos\vartheta\Delta\varphi).$$

Das Bild $A^*B^*C^*D^*$ hat die Fläche

$$F^* = |\widehat{A^*B^*}| \cdot |\widehat{A^*D^*}| = (r\cos\vartheta \cdot \Delta\vartheta)(r\Delta\varphi) = F.$$

2. Beweis: Eine Kugelzone mit der Höhe h hat die Fläche $2\pi rh$ (Formelsammlung!). Ihr Bild ist ein Rechteck von der Länge $2\pi r$ und der Höhe h. Also sind beide Flächen gleich. $\square$

Bemerkung: Die Achse des Zylinders muss nicht notwendigerweise die Achse Nord-Süd sein. Man spricht dann von einer *schiefachsigen Zylinderprojektion*.

2. Die Mercator - Karte (Mercator = Gerhard Kremer 1512-1594)
Ziel: Man möchte eine Karte haben, welche winkeltreu ist (wichtige Eigenschaft für die Navigation!) und bei welcher Breitenkreise waagrechte und Längenkreise senkrechte Strecken sind.

Idee: Kombiniere die Zylinder-Projektion mit einer Streckung in senkrechter Richtung. Sei $x = r\varphi$ die waagrechte Komponente und $z = r\sin\vartheta$ die senkrechte Komponente bei der Zylinder-Projektion. Sei $v = f(\vartheta)$ die *gesuchte* neue senkrechte Komponente. Bei einer winkeltreuen Abbildung müssen Verzerrungen in waagrechter und senkrechter Richtung *gleich* sein (Figur!). Bei der Zylinder-Projektion ist der waagerechte Verzerrungsfaktor gleich $\frac{1}{\cos\vartheta}$ und der senkrechte gleich $\cos\vartheta$. Um den gleichen Faktor zu bekommen müssen wir mit $\frac{1}{\cos^2\vartheta}$ in senkrechter Richtung kompensieren. Es muss also

$$\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{1}{\cos^2\vartheta}$$

gelten (wir machen alles im Kleinen!). Es gilt

$$\frac{\Delta v}{\Delta\vartheta} = \frac{\Delta v}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta\vartheta} = \frac{1}{\cos^2\vartheta} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta\vartheta}$$

Aus $z = r\sin\vartheta$ folgt $\Delta z = r\cos\vartheta \cdot \Delta\vartheta$ ($\frac{\Delta z}{\Delta\vartheta}$ wird durch die Ableitung $z'(\vartheta)$ approximiert), somit $\frac{\Delta v}{\Delta\vartheta} = \frac{r}{\cos\vartheta}$ und für $\Delta\vartheta \to 0$

$$\lim_{\Delta\vartheta\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta\vartheta} = f'(\vartheta) = \frac{r}{\cos\vartheta}.$$

Eine Stammfunktion von $\frac{r}{\cos\vartheta}$ ist

$$\boxed{f(\vartheta) = r\log\tan(\vartheta/2 + \pi/4) + C.}$$

Aus der Bedingung $f(0) = 0$ (Bild vom Äquator soll die x-Achse sein) folgt $C = 0$.

Die Loxodrome: Fährt ein Schiff entlang eines Grosskreises, so muss es laufend den Kurs (Winkel) ändern. Praktisch setzt sich der Weg eines Schiffes aus Stücken zusammen, welche einen konstanten Winkel gegen die Meridiane (Nordrichtung!) haben. Eine Kurve des konstanten Kurswinkels heisst *Loxodrome.* In einer Mercator-Karte wird eine Loxodrome als Gerade abgebildet.

Bemerkung: Die Mercator-Projektion wird auch als *winkeltreue Zylinder-Projektion* bezeichnet. Die Landeskarten der Schweiz benützen eine *schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion.*

3. Kegel-Projektionen

Die Kugel soll von einem Kegel eingehüllt werden, dessen Achse die Polarachse ist und welcher die Kugel längs dem Breitenkreis $\vartheta = \vartheta_0$ (fest) berührt. Ein Meridian durch P_0 wird auf die Mantellinie durch P_0 abgebildet (Figur!). Ist $P : (\varphi, \vartheta)$ ein beliebiger Punkt auf der Kugel, so wird sein Bild P^* auf dem Kegel durch folgende Bedingungen festgelegt:
1) die Mantellinie ist durch den Meridian durch P bestimmt,
2) sein *Abstand* vom Bild des Berührungskreises längs der Mantellinie hat die Form $r \cdot f(\vartheta)$, wobei die Funktion $f(\vartheta)$ zur Wahl steht. Es muss jedoch $f(\vartheta_0) = 0$ gelten.
Schliesslich wird der Kegel längs einer Mantellinie geschnitten und abgerollt.

Beispiel: Der Entwurf von Ptolemäus (87-165). Hier ist $f(\vartheta) = \vartheta - \vartheta_0$. Dieser Entwurf ist längentreu auf Meridiane.

Übung: Es gibt ein $f(\vartheta)$, so dass die Karte winkeltreu ist.

$$\left[f(\vartheta) = \cot\vartheta_0 - \cot\vartheta_0 \; \frac{\tan^{\sin\vartheta_0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_0}{2}\right)}{\tan^{\sin\vartheta_0}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right)} \right]$$

Bei den Kegel-Projektionen gibt es zwei Extremfälle:

1) Für $\vartheta_0 = 0$ entartet der Kegel zum Zylinder.

2) Für $\vartheta_0 = 90^\circ$ entartet der Kegel zur Tangentialebene im Nordpol. Die entstehende Karte wird als *azimutaler Entwurf* bezeichnet.

Ein Beispiel eines azimutalen Entwurfes ist die *Stereographische Projektion:* vom Südpol S aus wird der Punkt $P : (\varphi, \vartheta)$ auf P^* auf die Tangentialebene im Nordpol projiziert. Diese Projektion wurde bereits von Hipparch von Mikaia (180-125) erwähnt. Die Bilder der Meridiane sind Geraden durch O und die Bilder der Breitenkreise sind Kreise mit Zentrum O.

Im rechtwinkligen Dreieck SNP^* (Figur!) sei α der Winkel in P^* und β der Winkel in S. Aus $2\beta + \vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ und $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ folgt $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\vartheta}{2}$. Es ergibt sich

$$\frac{|NP^*|}{|NS|} = \frac{rf(\vartheta)}{2r} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\boxed{f(\vartheta) = 2\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Das Bild von $P : (\varphi, \vartheta)$ hat also die Koordinaten

$$x = 2r\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)\cos\varphi \qquad y = 2r\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)\sin\varphi.$$

Satz: Die Stereographische Projektion ist winkeltreu.

Beweis: Der Winkel α in P sei gegeben als Zwischenwinkel von 2 Tangenten t_1, t_2. Sei E_1 die Ebene durch t_1 und $S =$ Südpol und E_2 diejenige durch t_2 und S. Seien t_1', bzw. t_2' die Schnittgeraden von E_1 bzw. E_2 mit der Tangentialebene T_S in S. Der Zwischenwinkel von t_1' und t_2' ist gleich α. Seien t_1^*, bzw. t_2^* die Projektionen von t_1, bzw. t_2 auf die Tangentialebene T_N in N und sei α^* ihr Zwischenwinkel. Da $t_1^*//t_1', t_2^*//t_2'$ folgt $\alpha^* = \alpha$. (Figur!). $\square$

Satz: Die stereographische Projektion ist kreistreu.

Beweis: Sei γ der gegebene Kreis auf der Kugel. Wir denken uns in jedem seiner Punkte Q die zu ihm senkrechte Kugeltangente t gezogen. Alle Geraden t bilden die Mantellinien eines Kegels, welcher die Kugel längs γ berührt (Figur!). Sei Z die Spitze dieses Kegels und sei Z^* die Projektion von Z auf T_N. Die Projektionen t^* der t sind Geraden, welche durch Z^* gehen. Die Projektion γ^* von γ schneidet alle t^* senkrecht, ist also ein Kreis mit Zentrum Z^*. $\square$

⚠ Es gibt Ausnahmen: Kreise durch S!; ihre Bilder sind Geraden. Wir wollen sie als Kreise mit unendlichem Radius betrachten.

Das Bild des Äquators heisst *Hauptkreis*. Stereographische Bilder der Grosskreise sind Kreise, welche den Hauptkreis in zwei Diametralpunkten schneiden.

Das Bild einer Loxodrome: Eine Loxodrome schneidet alle Breitenkreise unter einem festen Winkel β. Sei die Loxodrome in der Form $\rho = g(\varphi)$ (ρ, φ: Polarkoordinaten) gegeben. Wir betrachten ein kleines Dreieck $\Delta(A, B, C)$ auf der Karte, mit geographischen Koordinaten: (Figur!):

$$A : (\rho, \varphi) \quad B : (\rho, \varphi + \Delta\varphi) \quad C : (\rho + \Delta\rho,\ \varphi + \Delta\varphi)$$

Es gilt $\tan\beta = \dfrac{|\overset{\frown}{BC}|}{|\overset{\frown}{AB}|} \ = \ \dfrac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} =: b.$

Für $\Delta\varphi \to 0$ ergibt sich $\rho'(\varphi) = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{\Delta\rho}{\Delta\varphi} = b \cdot \rho.$

Die Lösungen der *Differentialgleichung*:

$$\rho' \ = \ b\rho$$

sind die Funktionen $\rho(\varphi) \ = \ c \cdot e^{b\varphi}$, wobei c eine Konstante ist. Verlangt man, dass die Kurve durch $P_0 : (\varphi_0, \vartheta_0)$ geht, so muss

$$\boxed{\rho(\varphi) \ = \ \rho_0 e^{b(\varphi - \varphi_0)}}$$

mit $\rho_0 = 2r\cot\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\vartheta_0}{2}\right)$ gelten.

4. Die orthodrome Projektion: (Grosskreiskarte)
Die Projektion erfolgt hier als Zentralprojektion vom Zentrum der Kugel auf eine Tangentialebene. Ist der Berührungspunkt B ein Erdpol, so heisst die Karte *polständig*. Liegt B auf dem Äquator, so bekommt man eine *äquatorständige Karte*. Diese Karten sind weder längen- noch flächentreu. Jeder Grosskreis wird als Gerade abgebildet. Die Karte eignet sich dabei bei der Auswertung der Funkpeilung. Punkte zwischen 2 Orten auf einer Grosskreisroute können mit dem Lineal gefunden werden. Loxodrome sind gekrümmte Kurven.

Bemerkung: Eine *Orthodrome* ist ein Grosskreis.

Übung: Die orthodrome Projektion ist nicht winkeltreu.