Kapitel III Ebene Geometrie

§1. Translationen, Rotationen, Spiegelungen

Wir betrachten folgende Grundtypen von Bewegungen:

1) Translationen: Eine Translation T wird durch ihren *Translationsvektor* $\vec{a}$ beschrieben: die Richtung von $\vec{a}$ gibt die Richtung der Translation und der Betrag von $\vec{a}$ gibt die Länge der Translation. Sei P^* das Bild von P unter T. Es gilt $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + \vec{a}$.
In Koordinaten haben wir, mit $P = (x_1, x_2)$, $P^* = (x_1^*, x_2^*)$ und $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{rcl} x_1^* & = & x_1 + a_1 \\ x_2^* & = & x_2 + a_2 \end{array}$$

oder mit Matrizen: $x^* = T_a(x) = x + a$, mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$, und $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Es gilt :

$$\begin{array}{lcl} T_{a+b} & = & T_a \circ T_b = T_b \circ T_a \\ (T_a)^{-1} & = & T_{-a} \\ T_0 & = & E \end{array}$$

Dabei bezeichnet $T_1 \circ T_2$ die *Zusammensetzung* (zuerst T_2 und dann T_1), T^{-1} die *inverse* Abbildung und E die *Identität*, $E : x \mapsto x$. Eine Translation $T \neq E$ hat keine Fixpunkte.

Bemerkung: Eine Sammlung G von bijektiven Transformationen einer Menge M in sich heisst *Gruppe von Transformationen* falls:

(1) $T_1, T_2 \in G \Longrightarrow T_1 \circ T_2 \in G$,

(2) $E \in G$.

(3) $T \in G \Longrightarrow T^{-1} \in G$,

Bei der Definition einer abstrakten *Gruppe* wird zusätzlich zu den Eigenschaften (1), (2) und (3) die Assoziativität des Kompositionsgesetzes verlangt:

$$T_1, T_1, T_3 \in G \Longrightarrow T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3.$$

Die Zusammensetzung von Transformationen ist automatisch assoziativ.

Die Menge der Translationen in $\mathbb{R}^2$ ist eine Gruppe von Transformationen.

2) Drehungen: Eine Drehung wird durch ihr Zentrum Z und ihren Drehwinkel α bestimmet. Sei zuerst $Z = O$. Wir benützen *Polarkoordinaten* ρ und φ; der Betrag ρ von $P \in \mathbb{R}^2$ ist der Abstand $\rho = |\overrightarrow{OP}|$ und φ ist der *orientierte Winkel* von der x-Achse zum Strahl OP. Der Gegenuhrzeigersinn wird als positiver Drehsinn angesehen. Der Winkel φ heisst *Polarwinkel* oder *Argument* von P. Für $P = (x_1, x_2)$ gilt:

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 &=& \rho\cos\varphi & \qquad & x_2 &=& \rho\sin\varphi \\ \rho &=& \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & & \varphi &=& \operatorname{Arg} P = \begin{cases} \arctan\frac{x_2}{x_1} & (x_1 > 0) \\ -\arctan\frac{x_2}{x_1} & (x_1 < 0) \end{cases} \end{array}$$

Sei P^* das Bild von P unter der Drehung um O um den Winkel α. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Arg} P^* &=& \operatorname{Arg} P + \alpha \\ |OP^*| &=& |OP|. \end{array}$$

Folglich sind die Koordinaten (x_1^*, x_2^*) von P^* gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} x_1^* &=& \rho\cos(\varphi + \alpha) = \cos\alpha\rho\cos\varphi - \sin\alpha\rho\sin\varphi \\ x_2^* &=& \rho\sin(\varphi + \alpha) = \cos\alpha\rho\sin\varphi + \sin\alpha\rho\cos\varphi \end{array}$$

oder

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1^* &=& \cos\alpha x_1 - \sin\alpha x_2 \\ x_2^* &=& \sin\alpha x_1 + \cos\alpha x_2 \end{array}}$$

In Matrix-Form haben wir

$$x^* = R(\alpha)x$$

mit

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Zusammensetzung von Drehungen um O mit Winkeln α und β ist gegeben durch das Produkt der Matrizen $R(\alpha)$ und $R(\beta)$. Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} R(\alpha)R(\beta) &=& R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha + \beta) \\ R(\alpha)^{-1} &=& R(-\alpha) \\ R(0) &=& E. \end{array}$$

Insbesondere bilden die Drehungen um O eine Gruppe.

Bemerkung: Der Winkel α liegt im Intervall $[0, 2\pi[$, die Addition der Winkel wird “modulo” 2π ausgeübt, d.h. die Winkel α und $\alpha + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, werden als gleich betrachtet.

3. Spiegelungen: Eine Spiegelung wird durch ihre *Achse* g bestimmt. Sei P^* das Bild von P durch die Spiegelung an g. Sei h die Gerade durch P senkrecht zu g und sei $Q = g \cap h$. Es gilt (Figur!)

$$\overrightarrow{QP^*} = -\overrightarrow{QP}.$$

Wir betrachten zuerst den Fall, wo die Achse g durch O geht und die x_1-Achse unter dem Winkel $\beta/2$ schneidet (Figur!). Sei $P = (x_1, x_2)$, $\varphi = \operatorname{Arg} P$, $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Das Bild P^* von P hat Betrag $\rho^* = \rho$ und Argument

$$\varphi^* = \operatorname{Arg} P + 2(\beta/2 - \operatorname{Arg} P) = \beta - \operatorname{Arg} P = \beta - \varphi \text{ (Figur!)}$$

Es ergibt sich, da $x_1 = \rho \cos\varphi$, $x_2 = \rho \sin\varphi$,

$$\begin{array}{lllllll} x_1^* & = & \rho^* \cos\varphi^* & = & \rho\cos(\beta - \varphi) & = & \cos\beta x_1 + \sin\beta x_2 \\ x_2^* & = & \rho^* \sin\varphi^* & = & \rho\sin(\beta - \varphi) & = & \sin\beta x_1 - \cos\beta x_2. \end{array}$$

In Matrix-Form:

$$x^* = S(\beta)x$$

mit

$$S(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Übung: $S(\beta)^2 = E$, $S(\beta)S(\gamma) = R(\beta - \gamma)$.

§2. Orthogonale Matrizen

Für jede $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, bezeichnen wir mit A^t die *transponierte Matrix*:

$$(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Übung:

1) $(AB)^t = B^t A^t$
2) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ falls A invertierbar ist
3) $R(\alpha)^t = R(-\alpha)$, $\quad S(\beta)^t = S(\beta)$
4) $PP^t = E = P^t P$ für $P = R(\alpha)$ oder $= S(\beta)$.

Definition: Eine $(n \times n)$- Matrix P heisst *orthogonal* falls

$$PP^t = P^t P = E.$$

Insbesondere ist eine orthogonale Matrix P invertierbar: $P^{-1} = P^t$. Die Matrix E ist offenbar orthogonal. Sei $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; es ergibt sich

$$P^t P = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Also:

$$P \text{ orthogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0. \end{cases}$$

In Worten: die Spalten von P (als Vektoren in $\mathbb{R}^2$) haben Länge 1 und sind zueinander orthogonal.

Bemerkung: Aus $PP^t = E$ folgt die entsprechende Eigenschaft für die Zeilen: sie haben Länge 1 und sind zueinander orthogonal.

Satz: Sind P und Q orthogonal, so gilt

1) PQ ist orthogonal, 2) P^{-1} ist orthogonal.

Insbesondere bildet die Menge der orthogonalen (2×2)-Matrizen eine Gruppe. Sie heisst *orthogonale Gruppe* und wird mit $O(2)$ bezeichnet.

Beweis: Aus $(PQ)^t = Q^t P^t$ folgt $(PQ)(PQ)^t = PQQ^tP^t = E$. Die Behauptung 2) folgt aus $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$. $\square$

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei $\det(A) := \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$.

Übung:
1) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$; $\det(E) = 1$, $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
2) A ist invertierbar dann und nur dann wenn $\det(A) \neq 0$; insbesondere

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Satz: 1) P orthogonal $\Longrightarrow \det(P) = \pm 1$.
2) P orthogonal und $\det(P) = 1 \Longleftrightarrow P = R(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3) P orthogonal und $\det(P) = -1 \Longleftrightarrow P = S(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: 1) Aus $PP^t = E$ folgt $\det(P)^2 = \det(E) = 1$.

Bei 2) und 3) sind die Implikationen "$\Longleftarrow$" klar. Sei $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ orthogonal. Aus

$a^2 + c^2 = 1$ folgt $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$ für $\alpha \in [0, 2\pi[$. Die Bedingung $ab + cd = 0$ bedeutet $-b/c = d/a$ oder

$$\frac{-b}{\sin\alpha} = \frac{d}{\cos\alpha} =: \lambda.$$

Also gilt $b = -\lambda \sin\alpha$, $d = \lambda\cos\alpha$ für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $\det(P) = ad - bc = \lambda$. Also aus $\det(P) = 1$ folgt $\lambda = 1$ und $P = R(\alpha)$. Ist $\det(P) = -1$ so ist $P = S(\alpha)$. $\square$

Die Menge der (2×2)-orthogonalen Matrizen mit Determinante gleich 1 ist eine Untergruppe von $O(2)$. Sie heisst die *spezielle orthogonale Gruppe* und wird mit $SO(2)$ bezeichnet.

Jede Matrix $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definiert eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$A : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto y = Ax, \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

Die Abbildung ist *linear*, d.h.,

$$\begin{aligned} A(x + x') &= Ax + Ax' \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned}$$

und *jede* lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lässt sich so darstellen (Lineare Algebra !).
Bemerkung: Rotationen um O und Spiegelungen an Geraden durch O sind lineare
⚠ Abbildungen. Translationen sind keine.

Satz: Sei $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Die Matrix P ist orthogonal dann und nur dann wenn die Abbildung P längentreu ist.

Beweis: In Matrix-Form wird das Skalarprodukt $(x, y) \mapsto x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2$ geschrieben als

$$x \cdot y = x^t y = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

(Wir notieren Vektoren als Spalten-Matrizen). Insbesondere ist $|x|^2 = x^t x$. Ist P längentreu, dass heisst

$$|Px| = |x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

so folgt aus

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2(x \cdot y)$$

dass P das Skalarprodukt invariant lässt:

$$Px \cdot Py = x \cdot y$$

Also gilt $(Px)^tPy = x^tP^tPy = x^ty$ für alle x und $y \in \mathbb{R}^2$. Wählt man $x = e_i$ und $y = e_j$ (standard Basisvektoren), $i = 1,2$ und $j = 1,2$, so folgt

$$(P^tP)_{ij} = \delta_{ij}.$$

Also $P^tP = E$ und P ist orthogonal. Umgekehrt, aus $P^tP = E$ folgt

$$Px \cdot Py = x^tP^tPy = x^tEy = x^ty = x \cdot y$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere gilt $|Px|^2 = |x|^2$ und P ist längetreu. $\square$

Bemerkung: Aus dem obigen Beweis folgt, dass das Skalarprodukt invariant ist, falls die Abbildung längentreu ist. Insbesondere gilt für eine linear Abbildung P:

$$P \quad \text{längentreu} \quad \Longrightarrow \quad P \quad \text{winkeltreu.}$$

Die Umkehrung gilt nicht: die Abbildung $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \neq \pm 1$, ist linear, winkeltreu, jedoch nicht längentreu.

§3 Bewegungen

Definition Sei P eine orthogonale (2×2)-Matrix und $a \in \mathbb{R}^2$ eine fester Vektor. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$x^* = f(x) = Px + a$$

heisst *Bewegung* in $\mathbb{R}^2$. Sie wird mit $f_{P,a}$ bezeichnet. Die Bewegung heisst *eigentlich* falls $\det(P) = 1$ und *uneigentlich* falls $\det(P) = -1$.

Beispiele:
1) $f_{E,a}$ ist die Translation um a.
2) $f_{R(\alpha),0}$ ist die Drehung um O mit dem Winkel α.
3) $f_{S(\beta),0}$ ist die Spiegelung an der Geraden durch O mit Steigung $\tan(\beta/2)$.

Satz 1: Es gilt:
1) $f_{Q,b} \circ f_{P,a} = f_{QP,Qa+b}$, 2) $f_{P,a}^{-1} = f_{P^{-1},-P^{-1}a}$.
Insbesondere bilden die Bewegungen eine Gruppe und die eigentlichen eine Untergruppe davon.

Beweis: Für 1) haben wir

$$(f_{Q,b} \circ f_{P,a})(x) = Q(Px + a) + b = QPx + Qa + b.$$

2) folgt unmittelbar aus 1). $\square$

Satz 2: 1) Jede Bewegung ist die Zusammensetzung von Rotationen durch O, Spiegelungen an Geraden durch O und Translationen.
2) Beliebige Rotationen, Spiegelungen und Translationen sind Bewegeungen.

Beweis: Behauptung 1) ist nicht neu (§2), da $f_{P,a} = f_{E,a} \circ f_{P,0}$ und da jede orthogonale (2×2)-Matrix P von der Form $R(\alpha)$ $(\det(P) = 1)$ ist, b.z.w. von der Form $S(\beta)$ $(\det(P) = -1)$.
2) Eine Rotation f mit Zentrum Z und Winkel α lässt sich als

$$f = f_{E,z} \circ f_{R(\alpha),0} \circ f_{E,-z} = f_{R(\alpha),z-R(\alpha)z}$$

schreiben, wobei z der Ortsvektor von Z ist. Analog sei U der Schnittpunkt der Spiegelungsachse mit der x_1-Achse (wir nehmen an, dass g nicht parallel zur x_1-Achse ist). Dann lässt sich die Spiegelung an g als Zusammensetzung

$$f = f_{E,u} \circ f_{S(\beta),0} \circ f_{E,-u} = f_{S(\beta),u-S(\beta)u}$$

darstellen. $\square$

Es gibt eine 4. Art von Bewegungen, welche wir berücksichtigen müssen: Die Zusammensetzung einer Spiegelung mit einer Translation um einen Vektor $a \neq 0$ parallel zur Spiegelungsachse heisst eine *Gleitspiegelung.* Eine Gleitspiegelung ist eine uneigentliche Bewegung ohne Fixpunkt.

Satz 3: 1) Sei f eine eigentliche Bewegung von $\mathbb{R}^2$. Dann

f ist eine Translation	$\iff$	f hat keine Fixpunkte
f ist eine Drehung	$\iff$	f hat genau einen Fixpunkt
f ist die Identität	$\iff$	f hat mehr als einen Fixpunkt.

2) Sei f uneigentlich. Dann

f ist eine Spiegelung	$\iff$	f hat Fixpunkte
f ist eine Gleitspiegelung	$\iff$	f hat keine Fixpunkte.

Beweis: Die Implikationen in Richtung $\Longrightarrow$ sind alle klar. Für die Umkehrungen sei zuerst f eigentlich, $f(x) = Px + a$, $\det(P) = 1$, $P = R(\alpha)$ und $f \neq E$. Hat f einen Fixpunkt z, so folgt aus

$$R(\alpha)z + a = z$$

dass $a = z - R(\alpha)z$ und

$$f = f_{R(\alpha),z-R(\alpha)z} = f_{E,z} \circ f_{R(\alpha),0} \circ f_{E,-z}$$

und somit ist f eine Drehung mit Zentrum Z, $\overrightarrow{OZ} = z$. Ist $P = E$, so ist f eine Translation und hat keine Fixpunkte. Es genügt also zu zeigen, dass

$$P \neq E,\ f \text{ eigentlich}, \Longrightarrow f \text{ hat einen Fixpunkt.}$$

Die Existenz eines Fixpunkt z ist äquivalent mit der Lösbarkeit der Gleichung

$$(P-E)z = -a$$

da $Pz + a = z$. Es genügt also zu zeigen, dass $\det(P-E) \neq 0$ falls $R(\alpha) \neq E$: dann ist $P - E$ invertierbar und $z = -(P-E)^{-1}a$. Es gilt

$$\det(P-E) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1 \end{pmatrix} = 2(1-\cos\alpha).$$

Für $0 \leq \alpha < 2\pi$ ist $\cos\alpha = 1$ genau dann wenn $\alpha = 0$, d.h. $P = E$.

Um Behauptung 2) zu beweisen, brauchen wir zusätzliche Eigenschaften von Gleitspiegelungen:

Satz 4: 1) Sei f eine Spiegelung (Achse beliebig) und sei f_1 eine Drehung um $180°$ (Zentrum beliebig). Dann ist $f_2 = f_1 \circ f$ eine Gleitspiegelung.
2) Sei f eine Gleitspiegelung und sei $z = \frac{u+f(u)}{2}$ für ein beliebiges (aber festes) u. Sei f_1 die Drehung mit Zentrum z und Winkel $180°$. Dann ist $f_2 = f_1 \circ f$ eine Spiegelung.

Beweis: 1) Wir wählen die Koordinaten so, dass die Achse der Spiegelung f die x_1-Achse ist. Es gilt dann für $y = f(x)$,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

Ist $Z = (r_1, r_2)$ das Zentrum der Drehung f_1, so gilt für $x^* = f_1(y)$:

$$\begin{aligned} x_1^* &= -y_1 + 2r_1 \\ x_2^* &= -y_2 + 2r_2. \end{aligned}$$

Es folgt für $x^* = (f_1 \circ f)(x)$:

$$\begin{aligned} x_1^* &= -x_1 + 2r_1 \\ x_2^* &= x_2 + 2r_2. \end{aligned}$$

Diese Formeln beschreiben eine Gleitspiegelung mit Achse $x_1 = r_1$ und Verschiebungsvektor $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2r_2 \end{pmatrix}$.

2) Wir wählen die Koordinaten so, dass die Achse der Gleitspiegelung f die x_1-Achse ist. Mit $x^* = f(x)$ und $a = \begin{pmatrix} 2r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 + 2r_1 \\ x_2^* &= -x_2. \end{aligned}$$

Es folgt für $z = \frac{u+f(u)}{2} = \frac{u+u^*}{2}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 + r_1 \\ z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Sei $x^* \mapsto y = f_1(x^*)$ die Drehung mit Zentrum $Z = (z_1, z_2)$ und Winkel $180°$. Es gilt

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1^* + 2(u_1 + r_1) \\ y_2 &= -x_2^* \end{aligned}$$

somit für $x \mapsto y = (f_1 \circ f)(x)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 + 2u_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

und $f_1 \circ f$ ist eine Spiegelung mit Achse $x_1 = u_1$. □

Wir beweisen nun den zweiten Teil vom Satz 3:

Sei $f = f_{P,a}$ eine uneigentliche Bewegung, $P = S(\beta)$. Hat f einen Fixpunkt Z, so gilt $a = z - S(\beta)z$ und

$$f = f_{S(\beta),z-S(\beta)z} = f_{E,z} \circ f_{S(\beta),0} \circ f_{E,-z}$$

ist eine Spiegelung mit Achse durch Z. Hat f keinen Fixpunkt und ist u beliebig, so hat $f_1 \circ f$, wobei f_1 eine Drehung ist mit Winkel $180°$ und Zentrum $\frac{u+f(u)}{2}$, den Fixpunkt u. Da f_1 eigentlich ist, ist $f_1 \circ f$ uneigentlich. Da $f_1 \circ f$ den Fixpunkt u hat, ist nach 1) $f_1 \circ f$ eine Spiegelung. Es folgt aus Satz 4 dass $f = f_1 \circ (f_1 \circ f)$ eine Gleitspiegelung ist. □

Beispiele:
1) Die Zusammensetzung $f_{R,a}$ einer Drehung R mit einer Translation $T_{\vec{a}}$ ist wieder eine Drehung. Um das Zentrum zu bekommen, genügt es einen Fixpunkt zu konstruieren. Sei Z das Zentrum der Drehung R. Sei g die Gerade durch Z senkrecht zum Translationsvektor $\vec{a}$. Es gibt zwei Punkte P und Q so, dass der orientierte Winkel $\sphericalangle(ZP, ZQ)$ gleich dem Drehwinkel α, g die Winkelhalbierende und $\overrightarrow{PQ} = -\vec{a}$ ist. Nach Konstruktion ist P Fixpunkt von f.
2) Die Zusammensetzung von zwei Drehungen R_1 (Winkel α_1, Zentrum Z_1) und R_2 (Winkel α_2, Zentrum Z_2) ist wieder eine Drehung. Wir konstruieren ihr Zentrum. Sei l die Gerade durch Z_1 und Z_2. Seien g_1 und h_1 Geraden durch Z_1 so dass l die Winkelhalbierende ist und h_1 das Bild von g_1 durch die Drehung R_1. Seien g_2 und h_2 durch Z_2 analog definiert (bez. R_2). Der Schnittpunkt $g_1 \cap h_2$ ist Fixpunkt der Zusammensetzung $R_2 \circ R_1$.

3) Die Zusammensetzung $f_{S,a}$ einer Spiegelung S mit einer Translation $T_{\vec{a}}$ ist entweder eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung. Sei $a = b + c$ so zerlegt, dass b senkrecht zur Spiegelungsachse von S ist und c ist parallel zu dieser Achse. Sei g' die Verschiebung von g um den Vektor $b/2$. Ist $c = 0$ so ist f eine Spiegelung an g'; ist $c \neq 0$, so ist f eine Gleitspiegelung mit Achse g' und Vektor c.

§4. Kegelschnitte

Sei K ein Rotationskegel in $\mathbb{R}^3$. Der Kegel wird durch die *Spitze* S, die *Achse* g und den *Halböffnungswinkel* α bestimmt. Der Schnitt von K mit einer Ebene E definiert eine Kurve γ im Raum. Die Kurve γ kann verschiedene Gestalten haben:

- *Punkt* (E schneidet K nur in S)
- *Gerade* (E ist tangential an einer Mantellinie)
- *Paar von Geraden*, welche sich schneiden (2 Mantellinien)
- *Parabel* (E ist parallel zu einer Mantellinie)
- *Ellipse*
- *Hyperbel*

Gleichung eines Kegels: Die Richtung der Achse g sei durch den Vektor $\vec{a}$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} P \in \quad \text{Kegel} \quad K \quad &\iff \quad \omega := \sphericalangle\,(\overrightarrow{SP}, \vec{a}) = \begin{cases} \alpha \\ \pi - \alpha \end{cases} \\ &\iff \quad \cos^2\omega = \cos^2\alpha \\ &\iff \quad \left[(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS}) \cdot \vec{a}\right]^2 \ = \ |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS}|^2 \ |\vec{a}|^2 \cos^2\alpha \end{aligned}$$

Beispiel: Sei $S = O$ und g die x_3-Achse. Es folgt mit $\vec{a} = \vec{e}_3$

$$x_3^2 \ = \ \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \cdot b^2, \quad b = \cos\alpha.$$

Wir wählen für E verschiedene Ebenen:

E:	$x_3 = 0$	Schnitt:	Punkt O	
	$x_3 = 1$		$x_1^2 + x_2^2 = (1 - \cos^2\alpha)/\cos^2\alpha^2$	Kreis
	$x_2 = 0$		$x_1^2 \cos^2\alpha - x_3^2(1 - \cos^2\alpha) =$	
			$(x_1\cos\alpha + x_3\sin\alpha)(x_1\cos\alpha - x_3\sin\alpha) = 0$	2 Geraden
	$x_2 = 1$		$x_1^2\cos^2\alpha - x_3^2(1-\cos^2\alpha) = -\cos^2\alpha$	
			$x_3^2\tan^2\alpha - x_1^2 = 1$	Hyperbel.

Allgemein ist die Gleichung vom Kegel K:

$$\big[(x_1-s_1)a_1+(x_2-s_2)a_2+(x_3-s_3)a_3\big]^2 = \big[(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2+(x_3-s_2)^2\big]\big[a_1^2+a_2^2+a_3^2\big]\cdot\cos^2\alpha.$$

Die Ebene E wird durch eine lineare Gleichung gegeben

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich eine Variable aus den anderen ausdrücken, z.B., falls $b_3 \neq 0$,

$$x_3 = \frac{d - b_1x_1 - b_2x_2}{b_3} = h(x_1, x_2).$$

Durch Einsetzen von x_3 in die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ des Kegels ergibt sich eine Gleichung

$$g(x_1, x_2) = f\big(x_1, x_2, h(x_1, x_2)\big) = 0$$

in den Variablen x_1, x_2. Diese Gleichung stellt eine Kurve $\overline{\gamma}$ in der (x_1, x_2)-Ebene dar.

Beh.: Die Kurve $\overline{\gamma}$ ist die Projektion (parallel zur x_3-Richtung) der Schnittkurve $\gamma = E \cap K$ auf die Ebene (x_1, x_2).

Beweis: Sei $P = (x_1, x_2, x_3) \in \gamma$. Die Projektion $\overline{P}$ hat die Koordinaten $(x_1, x_2, 0)$. Da $P \in \gamma = K \cap E$ gilt

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = h(x_1, x_2).$$

Also erfüllen die zwei ersten Koordinaten x_1, x_2 die Gleichung $g(x_1, x_2) = 0$, d.h. $\overline{P} \in \overline{\gamma}$. Umgekehrt, sei $\overline{P} = (x_1, x_2) \in \overline{\gamma}$. Dann gilt $g(x_1, x_2) = 0$. Sei $P = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_3 = h(x_1, x_2)$; dann liegt P auf der Ebene E. Aus der Bedingung $g(x_1, x_2) = 0$ folgt $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, da $g(x_1, x_2) = f\big(x_1, x_2, h(x_1, x_2)\big)$. Somit ist P auf dem Kegel und $P \in \gamma$. $\square$

Die Kurven γ und $\overline{\gamma}$ haben denselben Typ (wobei Kreis und Ellipsen nicht unterschieden werden). Die Gleichung für $\overline{\gamma}$ ist eine Gleichung in x_1, x_2 vom *Grad* 2, d.h.

der *Gesamtgrad* der einzelnen Monome ist höchstens gleich 2. Die *allgemeine Form* von f ist gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

und die Bedingung $f(x_1, x_2) = 0$ ist die *allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes.* Der Typ des Kegelschnittes (z.B. Parabel oder Ellipse) ist aus der Gleichung nicht ersichtlich. Die Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ hängt vom Koordinatensystem ab. In einem anderen Koordinatensystem, mit Koordinaten y_1, y_2 wird die gleiche Kurve $\overline{\Gamma}$ durch eine andere Gleichung gegeben.

Beispiel: Kreis mit Radius r und Zentrum $A = (a_1, a_2)$ in einem System mit Koordinaten x_1, x_2:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 + a_1^2 + a_2^2 = r^2.$$

Wählt man neue Koordinaten (mit Ursprung in A):

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - a_1 \\ y_2 &= x_2 - a_2 \end{aligned}$$

so ist die Gleichung des Kreises

$$y_1^2 + y_2^2 = r^2.$$

Das *neue* System (y_1, y_2) ist durch eine Verschiebung des *alten* Systems um den Vektor $\overrightarrow{OA}$ entstanden.

Allgemein wollen wir die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems (Bewegung des Koordinatensystems) so vereinfachen, dass der Typ der Kurve sofort ersichtlich wird.

Wir untersuchen zuerst den *quadratischen* Teil der Gleichung:

$$q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Die *quadratische* Form q lässt sich auch in Matrix-Form darstellen

$$q(x_1, x_2) = x^tAx \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Notiere, dass die Matrix A *symmetrisch* ist: $A^t = A$.

Ziel: Das "gemischte" Glied $2a_{12}x_1x_2$ mit "besseren" Koordinaten eliminieren. Die neuen Koordinaten seien y_1 und y_2. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{11}y_1 + p_{12}y_2 \\ x_2 &= p_{21}y_1 + p_{22}y_2 \end{aligned}$$

oder $x = Py$ in Matrix-Form. Die Koordinatentransformation muss umkehrbar sein, d.h. P ist invertierbar. Da $x = Py$, ist die quadratische Form im neuen System durch den Ausdruck

$$\tilde{q}(y_1, y_2) = (Py)^t APy = y^t P^t APy = y^t \tilde{A} y$$

gegeben, wobei $\tilde{A} = P^t AP$. Das Glied $2a_{12}x_1x_2$ "eliminieren" heisst ein P zu finden, so dass

$$\tilde{A} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

d.h. $\tilde{A}$ soll diagonal sein.

Satz: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ symmetrisch. Es gibt $P = R(\alpha)$ so, dass $\tilde{A} = P^t AP$ diagonal ist.

Beweis: Sei $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, α zuerst beliebig. Es ergibt sich, für die Koeffizienten von $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha \\ 2\tilde{a}_{12} &= (a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha \\ \tilde{a}_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha \end{aligned}$$

Wir wollen, dass $\tilde{a}_{12} = 0$. Also:

- falls $a_{22} - a_{11} \neq 0$, so wählt man α so, dass $\tan 2\alpha = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$
- falls $a_{11} = a_{22}$, so wählt man $\alpha = \frac{\pi}{4}$, so dass $\cos 2\alpha = 0$ $\square$

Bei einem Koordinatenwechsel $x = Py$ sind i.A. die 2 Matrizen A und $\tilde{A} = P^t AP$ verschieden. Jedoch:

Satz: Falls $P \in O(2)$, so gilt $\det(A) = \det(\tilde{A})$.

Beweis: $\det(\tilde{A}) = \det(P)^2 \det(A) = \det(A)$, da $(\det P)^2 = 1$ für $P \in O(2)$. $\square$

Die Zahl

$$D(q) := \det(A)$$

ist also *unabhängig* vom speziellen Koordinatensystem, falls wir uns auf Koordinatentransformationen $P \in O(2)$ einschränken. Sie heisst *Diskriminante von q*.

Satz: Sei $q(x_1, x_2) = x^t Ax$ eine quadratische Form in 2 Variablen x_1, x_2.

(1) Falls $D(q) = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, so gibt es eine Drehung $P = R(\alpha)$ so, dass für $x = Py$,

$$\tilde{q}(y_1, y_2) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2,\ a_1 \cdot a_2 \neq 0.$$

(2) Falls $D(q) = 0$, so gibt es eine Drehung $P = R(\alpha)$ so, dass

$$\tilde{q}(y_1, y_2) = a_1 y_1^2.$$

Beweis: Sei P so, dass $\tilde{A} = P^t A P = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right)$ diagonal wird. Falls $D(q) \neq 0$, so sind a_1 und $a_2 \neq 0$ und Fall (1) folgt. Falls $D(q) = 0$, so muss a_1 oder $a_2 = 0$. Durch eine weitere Drehung, können wir erreichen, dass $a_2 = 0$.

Korollar: Sei $q(x_1, x_2) = x^t A x$. Falls $D(q) = 0$, so lässt sich $q(x_1, x_2)$ schreiben als

$$q(x_1, x_2) = c \cdot (ax_1 + bx_2)^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Beweis vom Korollar: Falls $x = Py$ die Koordinatentransformation ist, so folgt $y = P^{-1}x = P^t x$ (da $P^{-1} = P^t$) insbesondere

$$\begin{aligned} y_1 &= p_{11}x_1 + p_{21}x_2 \\ y_2 &= p_{12}x_1 + p_{22}x_2. \end{aligned}$$

Also $\tilde{q}(y_1, y_2) = a_1(p_{11}x_1 + p_{21}x_2)^2 = q(x_1, x_2)$. $\square$

Es lässt sich noch mehr aus der Diskriminante holen; falls $D(q) \neq 0$, so ist entweder

- $D(q) > 0$: da $D(q) = a_1 \cdot a_2$ sind beide positiv oder beide negativ.
  Es folgt aus $\tilde{q}(y_1, y_2) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2$
  $\tilde{q}(y_1, y_2) = 0 \Longleftrightarrow (y_1, y_2) = (0, 0)$
  also
  $q(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Die Form heisst *positiv-definit*, falls a_1 und $a_2 > 0$ und *negativ-definit*, falls a_1 und $a_2 < 0$.

- $D(q) < 0$: Sei z.B. $a_1 > 0$ und $a_2 < 0, a_1 = b_1^2, a_2 = -b_2^2$.
  Es folgt:
  $\tilde{q}(y_1, y_2) = b_1^2 y_1^2 - b_2^2 y_2^2 = (b_1 y_1 + b_2 y_2)(b_1 y_1 - b_2 y_2)$
  und zurück:

$$\boxed{q(x_1, x_2) \ = \ (c_1 x_1 + c_2 x_2)(d_1 x_1 + d_2 x_2)}$$

Wir gehen zur allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte zurück:

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0.$$

Durch eine geeignete Koordinatentransformation lässt sich das Glied $2a_{12}x_1x_2$ eliminieren. Wir dürfen also annehmen, dass $a_{12} = 0$, somit (mit anderen Koeffizienten b_1, b_2)

$$f(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0.$$

Fall (1) : $D(q) \neq 0$, d.h. $a_1 \cdot a_2 \neq 0$. Sei

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 &- \frac{b_1}{2a_1} \\ x_2 = y_2 &- \frac{b_2}{2a_2}. \end{aligned}$$

Die Koordinatentransformation ist eine *Translation*. Es folgt ("Quadrate vervollständigen"):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_1\Big(y_1 - \frac{b_1}{2a_1}\Big)^2 + b_1\Big(y_1 - \frac{b_1}{2a_1}\Big) + a_2\Big(y_2 - \frac{b_2}{2a_2}\Big)^2 + b_2\Big(y_2 - \frac{b_2}{2a_2}\Big) + c \\ &= a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + c + \frac{b_1^2}{4a_1} - \frac{b_1^2}{2a_1} + \frac{b_2^2}{4a_2} - \frac{b_2^2}{2a_2} \\ \tilde{f}(y_1, y_2) &= a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + d, \quad \text{mit} \quad d = c - \frac{b_1^2}{4a_1} - \frac{b_2^2}{4a_2}. \end{aligned}$$

Fall (1), 1) : Es sei $d \neq 0$ und $D(q) > 0$. Wir schreiben die Gleichung $\tilde{f}(y_1, y_2) = 0$ als

$$-\Big(\frac{a_1}{d}y_1^2 + \frac{a_2}{d}y_2^2\Big) = 1.$$

Da $D(q) = a_1 \cdot a_2 > 0$, haben $\frac{a_1}{d}$ und $\frac{a_2}{d}$ das gleiche Vorzeichen.

- $\frac{a_1}{d}$ und $\frac{a_2}{d} > 0$: Die Kurve besitzt *keine* (reelle) Punkte.
- $\frac{a_1}{d}$ und $\frac{a_2}{d} < 0$. Wir setzen $b_1 = \sqrt{\frac{-d}{a_1}}$ und $b_2 = \sqrt{\frac{-d}{a_2}}$, dann

$$\boxed{\frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{y_2^2}{b_2^2} = 1}$$

Die Kurve ist eine *Ellipse* mit Halbachsen b_1 und b_2.

Fall (1), 2) : Es sei $d \neq 0$ und $D(q) < 0$. Nehmen wir an, dass $\frac{a_1}{d} < 0$ und $\frac{a_2}{d} > 0$. Dann gilt

$$\boxed{\frac{y_1^2}{b_1^2} - \frac{y_2^2}{b_2^2} = 1}$$

mit $b_1 = \sqrt{\frac{-d}{a_1}}$ und $b_2 = \sqrt{\frac{d}{a_2}}$. Die Kurve ist eine *Hyperbel* mit *Asymptoten*

$$\boxed{y_2 = \pm\frac{b_2}{b_1}\, y_1}$$

Fall (1), 3) : Es sei $D(q) \neq 0$ und $d = 0$. Die Gleichung der Kurve lautet:

$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 = 0.$$

Ist $D(q) > 0$, so reduziert sich die Kurve auf den Punkt O. Ist $D(q) < 0$, z.B. $a_1 > 0$ und $a_2 < 0$, so setzen wir $a_1 = b_1^2$, $a_2 = -b_2^2$. Es folgt

$$\tilde{f}(y_1, y_2) = b_1^2 y_1^2 - b_2^2 y_2^2 = (b_1 y_1 + b_2 y_2)(b_1 y_1 - b_2 y_2)$$

und die Kurve besteht aus einem *Paar von Geraden*, welche sich in 0 schneiden.

Fall (2) : $D(q) = 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$. Die Gleichung lautet

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0.$$

Durch eine Translation wie vorher, erreichen wir, dass $b_1 = 0$. Wir müssen die Fälle $b_2 \neq 0$ und $b_2 = 0$ unterscheiden:

Fall $b_2 \neq 0$: Wir setzen

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - \frac{c}{b_2}. \end{cases}$$

Es folgt

$$a_1 y_1^2 + b_2 y_2 = 0$$

oder $\boxed{y_2 = -\frac{a_1}{b_2}\, y_1^2}$

Die Kurve ist eine *Parabel.*

Fall $b_2 = 0$: Es folgt $a_1 x_1^2 + c = 0$ oder.

$$\boxed{x_1^2 = -c/a_1.}$$

Ist $\quad -c/a_1 > 0,\;$ so besteht die Kurve aus 2 *vertikalen Geraden.*
Ist $\quad -c/a_1 = 0,\;$ so reduziert sich die Kurve auf die x_2-Achse.
Ist $\quad -c/a_1 < 0,\;$ so hat die Kurve *keine* (reelle) Punkte.

Fall (2), 1) : $\quad D(q) = 0 \quad a_1 = a_2 = 0$. Die Gleichung

$$f(x_1, x_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0$$

ist linear, also nicht mehr quadratisch. Wir sprechen nicht mehr von einem Kegelschnitt.

§5. Konstruktion der Kegelschnitte

Ellipse: Die Ellipse Γ sei durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \;=\; 1, \quad a_1 \geq a_2 > 0$$

gegeben. Sei $c = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$. Die Punkte $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ heissen *Brennpunkte* der Ellipse.

Satz: (Fadenkonstruktion der Ellipse)

$$\Gamma \;=\; \Big\{ P \in \mathbb{R}^2 | \; |F_1 P| \;+\; |F_2 P| = 2a_1 \Big\}.$$

Beweis: (Dandelin) Sei K ein Kegel und E eine Ebene, die K längs einer Ellipse schneidet. Es gibt genau zwei Kugeln S_1 und S_2, die K längs eines Kreises tangential treffen und die Ebene E tangential berühren. Es seien F_1 und F_2 die Berührungspunkte von S_1, bzw. S_2 mit E. Sei P ein Punkt auf der Ellipse.

Behauptung: $|F_1 P| \;+\; |F_2 P| \;=\;$ konstant.

Beweis der Behauptung: Die Mantellinie durch P trifft S_1, bzw. S_2 in einem Punkt, den wir R_1, bzw. R_2 nennen. Die Strecken PF_1 und PR_1 sind beide Tangenten von P aus an die Kugel S_1. Daraus folgt

$$|F_1 P| \;=\; |R_1 P|$$

Analog gilt $|F_2 P| \;=\; |R_2 P|$, somit

$$|F_1 P| + |F_2 P| \;=\; |R_1 P| + |R_2 P| \;=\; |R_1 R_2|$$

ist unabhängig von P. Jede Ellipse lässt sich als Schnitt $E \cap K$ realisieren (Übung!). Also gibt es für die gegebene Ellipse Γ Punkte F_1 und F_2, so dass

$$\Gamma \;=\; \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \; |F_1P| + |F_2P| \;=\; \text{konstant}\}.$$

Eine einfache Überlegung zeigt, dass die Konstante gleich $2a_1$ sein muss und dass F_1, F_2 die Brennpunkte sind. □

Bei der Hyperbel Γ

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \;=\; 1$$

gibt es, ganz analog, Punkte F_1, F_2 so dass

$$\Gamma = \Big\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \; |PF_1| - |PF_2| = 2a_1\Big\}$$

Übung: Die Parabel lässt sich als Ort der Punkte beschreiben, welche den gleichen Abstand zu einem festen Punkt F und einer festen Gerade g haben.

Anhang: Ellipsen in Parameterdarstellung

Der Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten

$$x_1 = r\cos t \qquad x_2 = r\sin t$$

hat Polarkoordinaten r und t; es folgt, dass der Kreis mit Zentrum O und Radius r die Parameterdarstellung:

$$t \in [0, 2\pi[\quad \longmapsto \quad \begin{matrix} x_1 = r\cos t \\ x_2 = r\sin t \end{matrix}$$

besitzt. Allgemein, zwei Funktionen $t \mapsto f(t),\ t \mapsto g(t)$, welche auf dem gleichen Intervall I gegeben sind, definieren eine Kurve γ *in Parameterdarstellung:*

$$t \in I \longmapsto P \quad : \quad \begin{matrix} x_1 = f(t) \\ x_2 = g(t) \end{matrix}$$

Kann man t aus den 2 Gleichungen $x_1 = f(t),\ x_2 = g(t)$ eliminieren, so bekommt man eine "implizite" Gleichung

$$f(x_1, x_2) \;=\; 0$$

zwischen x_1 und x_2. Zum Beispiel folgt die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$$

aus den Gleichungen $x_1 = r\cos t,\ x_2 = r\sin t$, da $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

⚠ Es ist nicht unbedingt zweckmässig eine Parameterdarstellung durch eine implizite Gleichung zu ersetzen.

Die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \;=\; 1, \qquad a_1 \geq a_2$$

der Ellipse führt zwangsmässig zur Parameterdarstellung

$$x_1 = a_1 \cos t \quad x_2 = a_2 \sin t.$$

Um eine geometrische Interpretation des Parameters t zu bekommen, betrachten wir die zwei konzentrischen Kreise S_1 bzw. S_2 mit Zentrum O und Radius a_1, bzw. a_2. Der Strahl aus O mit festem Winkel t mit der x_1-Achse schneidet S_1 in $P_1 = (a_1\cos t, a_1 \sin t)$ und S_2 in $P_2 = (a_2 \cos t, a_2 \sin t)$. Der Punkt $P = (a_1 \cos t, a_2 \sin t)$ auf der Ellipse ist der Schnittpunkt der vertikalen Geraden $x_1 = a_1 \cos t$ mit der horizontalen Geraden $x_2 = a_2 \sin t$. (Figur!) Diese Interpretation vom Parameter t liefert eine einfache punktweise Konstruktion der Ellipse.

Bemerkung: Man kann die Ellipse auch rational parametrisieren: Die Gerade

$$x_2 \;=\; t(x_1 + a)$$

schneidet die Ellipse $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ in 2 Punkten: der Punkt $(-a, 0)$ und der Punkt $P = (x_1, x_2)$ mit

$$x_1 = a\,\frac{b^2 - a^2t^2}{b^2 + a^2t^2}, \quad x_2 = b\,\frac{2abt}{b^2 + a^2t^2}.$$

Es folgt, dass

$$t \mapsto x_1 = a\,\frac{b^2 - a^2t^2}{b^2 + a^2t^2}, \quad x_2 = b\,\frac{2abt}{b^2 + a^2t^2},\ t \in \mathbb{R}$$

auch eine Parameterdarstellung der Ellipse (ohne $(-a, 0)$) ist.

Bemerkung: In der Analysis führt man die *hyperbolischen Funktionen* ein

$$t \mapsto \sinh t, \quad t \mapsto \cosh t.$$

Sie erfüllen die Identität $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und liefern somit eine Parameterdarstellung der Hyperbel

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

nämlich

$$x_1 = a_1 \cosh t \qquad x_2 = a_2 \sinh t.$$

Der Parameter t lässt sich als Fläche interpretieren (Analysis!)