Kapitel IV Projektive Geometrie

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die projektive Geometrie gegeben. Es sollen unendlich ferne Punkte mit Hilfe von *homogene Koordinaten* eingeführt werden und das Verhalten der Kegelschnitte im Unendlichen diskutiert werden.

Wir betrachten die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^3$, welche durch O gehen. Eine solche Gerade wird durch einen weiteren Punkt $P = (z_1, z_2, z_3) \neq 0$ bestimmt. Eine solche Gerade hat die Parameterdarstellung

$$t \mapsto (z_1 t, z_2 t, z_3 t).$$

Ihr Schnitt mit der horizontalen Ebene $E : x_3 = 1$ hat die Koordinaten $\left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3}, 1\right)$ falls $z_3 \neq 0$. Umgekehrt, zu jedem Punkt aus E mit Koordinaten $(x_1, x_2, 1)$ gehört die Gerade mit Parameterdarstellung

$$t \mapsto (x_1 t, x_2 t, t)$$

Die Zuordnung, Punkt in $E \leftrightarrow$ Geraden durch O, ist fast ein-eindeutig: die horizontalen Geraden

$$t \mapsto (z_1 t, z_2 t, 0)$$

sind parallel zu E. Sie schneiden E “im Unendlichen”. Sie sollen die “∞-fernen” Punkte von E darstellen. Also:

$$\boxed{\text{Geraden } t \mapsto \big(z_1 t, z_2 t, z_3 t\big) \text{ mit } z_3 \neq 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\text{endliche Punkte } \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3}, 1\right) \text{ von } E}$$

$$\boxed{\text{Geraden } t \mapsto (z_1 t, z_2 t, z_3 t) \text{ mit } z_3 = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\text{unendlich ferne Punkte } (z_1, z_2, 0) \text{ von } E}$$

Zwei Tripel $(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)$ und $(z_1', z_2', z_3') \neq (0, 0, 0)$ definieren dieselbe Gerade durch O falls es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$z_1' = \lambda z_1, \quad z_2' = \lambda z_2, \quad z_3' = \lambda z_3.$$

Also (z_1, z_2, z_3) und $\lambda(z_1, z_2, z_3)$ entsprechen demselben Punkt von E.

Wir sind soweit folgende Definition zu geben: Die *projektive Ebene* $\mathbb{P}^2$ besteht aus $\mathbb{R}^2$ und aus unendlichfernen Punkten. Ein Punkt von $\mathbb{P}^2$ wird durch 3 *homogene Koordinaten* (z_1, z_2, z_3) gegeben, welche nicht alle gleich 0 sein dürfen. Die Koordinaten (z_1, z_2, z_3) und $(\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3), \lambda \neq 0$ *definieren* denselben Punkt in $\mathbb{P}^2$. Die Punkte mit $z_3 \neq 0$ sind die endlichen Punkte; die Punkte mit $z_3 = 0$ sind die unendlichen Punkte.

Die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 1)$ ist eine Einbettung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{P}^2$ (als Mengen). Punkte mit $z_3 \neq 0$ sind "endliche" Punkte mit inhomogenen Koordinaten $\left(x_1 = \frac{z_1}{z_3},\ x_2 = \frac{z_2}{z_3}\right)$. Die unendlich fernen Punkte haben Koordinaten $(z_1, z_2, 0)$. Also erfüllen ihre homogenen Koordinaten die Gleichung

$$z_3 = 0 \qquad \text{"unendlich ferne" Gerade.}$$

Eine *Gleichung* $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ definiert eine Kurve in $\mathbb{P}^2$, falls

$$f(z_1, z_2, z_3) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sie muss "homogen" sein.

Beispiel: Die lineare Gleichung $a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 = 0$, $(a_1, a_2,) \neq (0, 0)$. Für endliche Punkte $\left(x_1 = \dfrac{z_1}{z_3},\ x_2 = \dfrac{z_2}{z_3}, 1\right)$ gilt

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0.$$

Die endlichen Punkte liegen also auf einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ und der unendlich ferne Punkt ist der Punkt $(-a_2, a_1, 0)$. Parallele Geraden sind gegeben durch Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3' = 0.$$

Sie haben alle den gleichen unendlich fernen Punkt. Allgemein, definiert jede homogene Gleichung $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ eine Gleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$f^*(x_1, x_2) := f(x_1, x_2, 1).$$

Typische homogene Gleichungen sind algebraische Ausdrücke

$$\sum a_{i_1 i_2 i_3}\ z_1^{i_1} z_2^{i_2} z_3^{i_3} = 0$$

wo der Totalgrad $i_1 + i_2 + i_3$ jedes Monoms $z_1^{i_1} z_2^{i_2} z_3^{i_3}$ konstant ist. Umgekehrt lässt sich jede algebraische Gleichung

$$\sum b_{ij} x_1^i x_2^j = 0$$

"homogenisieren": man ersetzt x_1 durch z_1, x_2 durch z_2 und "füllt Löcher" mit Potenzen von z_3.

Beispiele:

1. Die *Parabel* $x_2 = x_1^2$. Die homogene Gleichung ist $z_1^2 - z_2 z_3 = 0$. Die Kurve hat einen (doppelten) Schnittpunkt mit der ∞-fernen Geraden: setzt man $z_3 = 0$, so muss $z_1^2 = 0$, also ist der Schnittpunkt der Punkt $(0, 1, 0)$.

2. Die *Hyperbel* $\dfrac{x_1^2}{b_1^2} - \dfrac{x_2^2}{b_2^2} = 1$ hat die homogene Gleichung

$$\frac{z_1^2}{b_1^2} - \frac{z_2^2}{b_2^2} - z_3^2 = 0.$$

Sie hat zwei ∞-ferne Punkte:

$$P_1 = (b_1, b_2, 0) \quad P_2 = (b_1, -b_2, 0).$$

Die Asymptoten

$$z_2 = \pm \frac{b_2}{b_1}\, z_1$$

sind *Tangenten* an die Hyperbel in diesen Punkten.

Bemerkung: Im Allgemeinen schneidet eine Gerade einen Kegelschnitt in zwei Punkten. Fallen beide Punkte zusammen, so ist die Gerade eine Tangente. Insbesondere hat die Asymptote $z_2 = +\dfrac{b_2}{b_1} z_1$ den "doppelten" Schnittpunkt $(b_1, b_2, 0)$ mit der Hyperbel.

3. Die *Ellipse* $\dfrac{x_1^2}{b_1^2} + \dfrac{x_2^2}{b_2^2} = 1$ hat die homogene Gleichung

$$\frac{z_1^2}{b_1^2} + \frac{z_2^2}{b_2^2} - z_3^2 = 0.$$

Der Schnitt mit der ∞-fernen Gerade $z_3 = 0$ ist gegeben durch

$$\frac{z_1^2}{b_1^2} + \frac{z_2^2}{b_2^2} = 0$$

Die einzige *reelle* Lösung ist $z_1 = 0, z_2 = 0$. Jedoch dürfen nicht alle drei homogene Koordinaten gleich Null sein. Also hat die Ellipse *keine* reellen unendlichen Punkte. Andererseits, wenn man *komplexe* Zahlen zulässt, so bekommt man die zwei komplex-konjugierten Punkte

$$P_1 = (b_1, ib_2, 0) \quad P_2 = (b_1, -ib_2, 0).$$

Insbesondere gehen *alle* Kreise durch die Punkte $(1, \pm\, i, 0)$.

Dualität: Eine (projektive) Gerade ist durch eine homogene Gleichung vom Grad 1 gegeben:

$$a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 = 0, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$$

Zwei Tripel (a_1, a_2, a_3) und (a'_1, a'_2, a'_3) definieren die gleiche Gerade falls

$$a'_1 = \lambda a_1,\ a'_2 = \lambda a_2,\ a'_3 = \lambda a_3$$

für ein $\lambda \neq 0$ in $\mathbb{R}$. Wir haben also eine Symmetrie zwischen Punkten und Geraden:

$$\text{Punkt} \quad (a_1, a_2, a_3) \mapsto \quad \text{Gerade} \quad a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 = 0,$$

$$\text{Gerade} \quad b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 = 0 \mapsto \quad \text{Punkt} \quad (b_1, b_2, b_3).$$

Diese Symmetrie wird in der projektiven Geometrie als *Dualität* bezeichnet.

Satz:

(1) Durch je zwei verschiedene Punkte P, Q geht genau eine Gerade $g_{P,Q}$.

(2) Je zwei verschiedene Geraden g, h schneiden sich in genau einem Punkt $g \cap h$.

(3) Durch Dualität gehen verbindende Geraden in Schnittpunkte über und umgekehrt.

Beweis: (1) Sei $P = (u_1, u_2, u_3)$ und $Q = (v_1, v_2, v_3)$. Das System von 2 Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 &= 0 \\ a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \end{aligned}$$

für die Koeffizienten (a_1, a_2, a_3) der gesuchten Geraden hat Rang 2, da die Tripel (v_1, v_2, v_3) und (u_1, u_2, u_3) linear unabhängig sind ($P \neq Q$!). Also ist die Lösungsmenge eindimensional und definiert eine Gerade. Der Beweis von (2) ist analog (Dualität!). Wir beweisen (3):

Zu $P = (u_1, u_2, u_3)$ gehört die Gerade

$$g_P : u_1z_1 + u_2z_2 + u_3z_3 = 0$$

und zu $Q = (v_1, v_2, v_3)$ die Gerade

$$g_Q : v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 = 0.$$

Die Gerade durch P und Q hat Koeffizienten (a_1, a_2, a_3) für welche gilt

$$\begin{aligned} u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 &= 0 \\ v_1a_1 + v_2a_2 + v_3u_3 &= 0 \end{aligned}$$

und der Schnittpunkt $(z_1, z_2, z_3) = g_P \cap g_Q$ muss die Bedingungen

$$\begin{aligned} u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 &= 0 \\ v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Die Koeffizienten der Geraden durch P und Q sind also die Koordinaten des Schnittpunktes $g_P \cap g_Q$. $\square$