Kapitel V Räumliche Geometrie

§1. Drehungen

Punkte in $\mathbb{R}^3$ sind durch 3 Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bestimmt. Wir benützen die Matrix-Schreibweise

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Eine Drehung um die Koordinatenachse x_3 bewirkt eine Drehung in der (x_1, x_2)-Ebene und lässt die (x_3)-Richtung fest. Ist der Winkel der Drehung gleich α (positive Winkel sind nach der Kork-Zieher -Regel bestimmt), so ist das Bild $P^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ von $P = (x_1, x_2, x_3)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_2^* &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \\ x_3^* &= x_3 \end{aligned}$$

In Matrix-Form: $x^* = T_3(\alpha)x$ mit

$$T_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog, eine Drehung um die x_1-Achse (bzw. die x_2-Achse) hat die Matrix

$$T_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{bzw.} \quad T_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Sei jetzt die Drehachse eine beliebige Gerade g durch O, gegeben durch den Vektor $\vec{a}$, $|\vec{a}| = 1$. Der Drehwinkel sei α (Korkzieher-Regel!) Es ist möglich, die Drehung koordinatenfrei zu beschreiben:

Satz: Sei $\vec{x} = \vec{OP}$ und sei $\vec{x^*} = \vec{OP^*}$ das Bild durch die Drehung. Es gilt:

$$\vec{x^*} = \vec{x} + \sin\alpha(\vec{a} \times \vec{x}) + (1 - \cos\alpha)\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}).$$

Beweis: Ein direkter Beweis ist nicht ganz einfach. Einfacher wird es durch eine geschickte Wahl vom Koordinatensystem. Wir wählen das System so, dass $\vec{e}_3 = \vec{a}$. Es folgt

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 + \sin\alpha(-x_2) + (1-\cos\alpha)(-x_1) \\ x_2^* &= x_2 + \sin\alpha(x_1) + (1-\cos\alpha)(-x_2) \\ x_3^* &= x_3 + \sin\alpha(0) + (1-\cos\alpha)(0) \end{aligned}$$

oder, in Matrix-Form: $x^* = T_3(\alpha)x$. $\square$

Die Matrizen $T_1(\alpha), T_2(\alpha), T_3(\alpha)$ sind orthogonal, d.h. erfüllen die Bedingung

$$T^tT = E = TT^t.$$

Die Menge der orthogonalen (3×3)-Matrizen

$$O(3) = \big\{T \;\mid\; (3\times 3)\text{-Matrizen mit } T^tT = E\big\}$$

ist eine Gruppe für die Matrixmultiplikation. Für $T \in O(3)$ gilt $\det T = \pm 1$, da

$$1 = \det(E) = \det(T^tT) = \det(T)^2.$$

Die Gruppe $O(3)$ ist die *orthogonale Gruppe* des $\mathbb{R}^3$ und die Untergruppe

$$SO(3) = \big\{T \in O(3) \mid \det T = 1\big\}$$

ist die *spezielle orthogonale Gruppe*. Wie im $\mathbb{R}^2$ gilt:

Satz:

1) $O(3) = \big\{T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ linear} \mid (Tx, Ty) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3\big\}$, wobei $(x, y) = x^t y$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

2) Die Kolonnen (bzw. die Zeilen) einer orthogonalen Matrix haben Länge 1 und sind zueinander orthogonal.

Orthogonale Matrizen hängen eng mit *orthonormalen* Basen zusammen. Eine Basis (u_1, u_2, u_3) von $\mathbb{R}^3$ heisst *orthonormal*, falls

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3\ .$$

d.h. die u_i haben Länge eins und sind zueinander orthogonal. Die Standard-Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ist orthonormal. Jedes u_ℓ lässt sich als lineare Kombination der e_k schreiben:

$$u_\ell \;=\; \sum_{k=1}^{3} v_{k\ell}\; e_k.$$

Die Matrix $V = (v_{k\ell})$ hat als ℓ-te Kolonne die Komponenten von u_ℓ, somit ist sie orthogonal, $V \in O(3)$.

Übung: (u_1, u_2, u_3) ist ein Rechtssystem $\Leftrightarrow V \in SO(3)$.

Sei jetzt $T \in O(3)$. Die Matrix $T = (t_{ij})$ definiert eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$x \mapsto y = Tx, \quad y_i = \sum_{j=1}^{3}\; t_{ij} x_j$$

insbesondere gilt

$$Te_j = \sum_{i=1}^{3}\; t_{ij} e_i$$

(einsetzen!).

Die Abbildung T wird bezüglich der neuen Basis (u_1, u_2, u_3) eine andere Matrix $S = (s_{k\ell})$ haben; wir setzen:

$$Tu_\ell \;=\; \sum_{k=1}^{3}\; s_{k\ell} u_k.$$

Die Matrix S lässt sich mit Hilfe von T und V ausdrücken

$$\begin{aligned} Tu_\ell &= T(\sum_k v_{k\ell} e_k) &&= \sum_k v_{k\ell} T e_k \\ &= \sum_k v_{k\ell} \sum_i t_{ik} e_i &&= \sum_{i,k} t_{ik} v_{k\ell} e_i \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} Tu_\ell &= \sum_k s_{k\ell} u_k = \sum_k s_{k\ell} \sum_i v_{ik} e_i \\ &= \sum_{i,k} v_{ik} s_{k\ell} e_i. \end{aligned}$$

Es folgt $\sum_k t_{ik} v_{k\ell} = \sum_k v_{ik} s_{k\ell}$ oder $TV = VS$,

$$\boxed{S = V^{-1}\, TV\ .}$$

Es folgt:

$$T \text{ orthogonal} \Rightarrow S \text{ orthogonal und } \det S = \det T.$$

Sei A eine (3×3)-Matrix. Wir haben

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \quad \text{invertierbar.}$$

wie bei (2×2)-Matrizen. (Siehe Kap I: Anwendung des gemischten Produktes bei der Lösung von Systemen von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten). Insbesondere, falls $\det(A) = 0$, so hat die Abbildung $A : x \mapsto Ax$ einen nicht-trivialen *Kern.*

Satz: Sei $T \in SO(3)$. Dann ist $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto Tx$, eine Drehung um eine Achse durch 0 oder die Identität.

Beweis: Sei $S(\lambda) = T - \lambda E, \lambda \in \mathbb{R}$. Das Polynom

$$\det(T-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+(t_{11}+t_{22}+t_{33})\lambda^2+\cdots+\det(T)$$

ist ein Polynom vom Grad 3 mit reellen Koeffizienten. Es muss mindestens eine reelle Nullstelle λ_1 besitzen (Analysis!). Also hat die Abbildung $x \mapsto S(\lambda_1)x = (T - \lambda_1 E)x$ einen Kern verschieden von O. Sei v_1 im Kern, $v_1 \neq 0$. Wir nehmen an, dass $|v_1| = 1$. (Sonst normieren!). Es gilt

$$Tv_1 \ = \ \lambda_1 v_1$$

und v_1 heisst *Eigenvektor* von T zum *Eigenwert* λ_1. Da $T \in O(3)$, ist T längentreu und

$$1 = |v_1| = |Tv_1| = |\lambda_1 v_1| = |\lambda_1|\,|v_1| = |\lambda_1|\,.$$

Also gilt $\lambda_1 = \pm 1$ und $Tv_1 = \pm v_1$. Sei

$$\Pi = (\mathbb{R}v_1)^{\perp} \ = \ \left\{x \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ (x, v_1) = 0\right\}$$

die Ebene senkrecht zu v_1. Die Menge Π ist ein 2-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^3$. Da

$$\begin{aligned}(Tx, v_1) \ &= \ \Big(\frac{1}{\lambda_1}Tx, \lambda_1 v_1\Big) = \frac{1}{\lambda_1}(Tx, Tv_1) \\ &= \ \frac{1}{\lambda_1}(x, v_1) = 0\end{aligned}$$

für $x \in \Pi$, folgt, dass T die Ebene Π in sich abbildet. Wir wählen v_2, v_3 in $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ so, dass (v_1, v_2, v_3) eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und so, dass (v_1, v_2, v_3) ein Rechtssystem ist. Die Matrix S von T bezüglich der neuen Basis (v_1, v_2, v_3) hat die Block-Form

$$S = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \quad 0 \\ {\scriptstyle 0} & \multirow{2}{*}{S'} \\ {\scriptstyle 0} & \end{pmatrix}$$

Dabei ist S' die Matrix der Einschränkung von T auf Π, bezüglich der Basis (v_2, v_3) von Π. Die Matrix S ist orthogonal, da sie T beschreibt bezüglich einer orthonormalen Basis. Die Matrix S' ist auch orthogonal, weil die Einschränkung von T auf Π längentreu ist und (v_2, v_3) eine orthonormale Basis von Π ist. Da $T \in SO(3)$, gilt

$$\det S = \det T = 1.$$

Andererseits folgt aus

$$\det S = \lambda_1 \cdot \det S',$$

dass $\det S' = \det \lambda_1 = \pm 1$. Sei zuerst $\lambda_1 = 1$. Es folgt, dass $\det S' = 1$ und $S' \in SO(2)$ ist die Matrix einer Drehung:

$$S' = R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall hat T die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3) und T ist eine Drehung mit Achsenrichtung v_1. Falls $\lambda_1 = -1$, ist S' die Matrix einer Spiegelung an einer Achse g in der Ebene Π. Die Abbildung T in $\mathbb{R}^3$ ist dann eine Drehung um diese Achse um den Winkel 180°. (Bild!) $\square$

§ 2 Eulersche Winkel

Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt. Sei $T \in SO(3)$. Mit Hilfe der *Eulerschen Winkel* θ, φ, ψ können die Bilder $e'_1 = Te_1$, $e'_2 = Te_2$ und $e'_3 = Te_3$ bestimmt werden:

- θ ist der Winkel zwischen e_3 und e_3' $(0^o \leq \theta \leq 180^o)$.

- Falls $\theta \neq 0^o$, $\neq 180^o$, so definiert man die *Knotenlinie* als Schnitt der Ebene Π aufgespannt von e_1 und e_2 mit der Ebene Π' aufgespannt von e_1' und e_2'. Es gibt genau einen Vektor k, $|k| = 1$, auf der Knotenlinie, so dass e_3, e_3' und k eine orientierte Basis um $\mathbb{R}^3$ ist. Wir setzen (Bild!):

$$\begin{aligned} \varphi &= \sphericalangle(e_1, k) \ , \quad 0^o \leq \varphi < 360^o \\ \psi &= \sphericalangle(k, e_1') \ , \quad 0^o \leq \psi < 360^o \ . \end{aligned}$$

- Falls $\theta = 180^o$, so ist T eine Drehung um 180^o um eine Achse in Π. Diese Achse wird als Knotenlinie bezeichnet; auf dieser Achse wird k so gewählt, dass $\varphi = \sphericalangle(e_1, k) \leq 180^o$, und wir setzen $\psi = -\varphi$.

- Ist $\theta = 0^o$, so ist T eine Drehung um die Achse e_3 um den Winkel φ. Dann setzen wir $\psi = 0^o$.

Satz: Jede Matrix $T \in SO(3)$ lässt sich als Produkt $T = T_3(\varphi) \circ T_1(\theta) \circ T_3(\psi)$ von Drehungen um die Hauptachsen darstellen.

Beweis: Wir diskutieren den Fall $\theta \neq 0^o, \neq 180^o$. Die anderen Fälle sind einfach. Der Vektor $T_3(-\varphi)e_3'$ liegt in der Ebene senkrecht zu e_1 und bildet den Winkel θ mit e_3. Die Vektoren $T_3(-\varphi)e_2'$ und $T_3(-\varphi)e_1'$ liegen in der Ebene Π'' senkrecht zu $T_3(-\varphi)e_3'$. Diese Ebene enthält auch e_1. Der Winkel zwischen e_1 und $T_3(-\varphi)e_1'$ ist ψ. Dann ist $T_1(-\theta) \circ T_3(-\varphi)e_3' = e_3$, und die Vektoren $T_1(-\theta) \circ T_3(-\varphi)e_1'$ und $T_1(-\theta) \circ T_3(-\varphi)e_2'$ liegen in der Ebene Π und sind gegenüber e_1 bzw. e_2 um ψ gedreht. Folglich

$$T_3(-\psi) \circ T_1(-\theta) \circ T_3(-\varphi)e_j' \ = \ e_j \ .$$

Die Behauptung folgt dann aus $T_i(\alpha)^{-1} = T_i(-\alpha)$. $\square$

§ 3 Bewegungen

Sei $T \in O(3)$ und $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Die Abbildung

$$f_{T,a} \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \qquad x \longmapsto Tx + a$$

heisst *Bewegung* von $\mathbb{R}^3$. Die Bewegung heisst *eigentlich*, falls $T \in SO(3)$ (d.h. $\det T = 1$), sonst heisst T *uneigentlich.*

Beispiele:

1) Translationen $f_{E,a}$, $\quad E$ = Identität.

2) Drehungen $f_{T,0}$, $T \in SO(3)$ mit Achsen durch O.

3) *Spiegelungen:* Sei Π eine Ebene durch O und $a \neq 0$ ein Vektor senkrecht zu Π. Die *Spiegelung* S_a an Π ist bestimmt durch die Bedingungen

   - $S_a\Big|_{\Pi} = E \qquad$ Einschränkung von S_a auf Π ist die Identität,
   - $S_a : a \longmapsto -a$.

Sei (x, a) das Skalarprodukt von x mit a.

Behauptung: $\boxed{S_a x \;=\; x - 2\frac{(x,a)}{(a,a)} \cdot a\,.}$

Beweis: Die zwei Eigenschaften, welche S_a definieren, sind leicht zu verifizieren. □

Satz: $S_a \in O(3)$, $S_a^2 = E$, $\det S_a = -1$.

Beweis: Die Formel $S_a^2 = E$ folgt aus der Definition. Dann

$$(S_a x, y) \;=\; (x, y) - \frac{2(a,x)(a,y)}{(a,a)} \;=\; (x, S_a y)\,.$$

Folglich gilt

$$(S_a x, S_a y) \;=\; (x, S_a^2 y) \;=\; (x, y)$$

und $S_a \in O(3)$. Da

$$\det S_a \;=\; \det U S_a U^{-1}$$

für U die Matrix einer Basistransformation, ist die Behauptung $\det S_a = -1$ basisunabhängig. Weiter gilt $S_{\lambda a} = S_a$, $\lambda \neq 0$, so können wir a normieren, $|a| = 1$. Dann wählen wir die Basis, so dass $a = e_3$ und Π ist die (x_1, x_2)–Ebene. Es folgt

$$S_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so ist $\det S_a = -1$. □

Satz: Die Gruppe der Bewegungen wird *erzeugt* durch die Drehungen mit Achse durch O, die Spiegelungen an Ebenen durch O und die Translationen.

Beweis: Sei $f = f_{T,a}$. Ist f eigentlich, so ist $T \in SO(3)$ eine Drehung um eine Achse durch O, und f ist die Zusammensetzung dieser Drehung mit einer Translation. Ist f uneigentlich, so ist $\det T = -1$. Sei S_a eine beliebige Spiegelung an einer Ebene durch O. Dann ist $S_a \circ T$ eine Drehung um eine Achse durch O, da $S_a \circ T \in SO(3)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Spezielle Bewegungen

- *Schraubung:* Zusammensetzung einer Drehung mit einer Translation in Richtung der Drehachse.
- *Gleitspiegelung:* Zusammensetzung einer Spiegelung mit einer Translation in Richtung parallel zur Spiegelungsebene.
- *Drehspiegelung:* Zusammensetzung einer Spiegelung mit einer Drehung mit Drehachse senkrecht zur Spiegelungsebene.
- *Punktspiegelung:* Zentrale Spiegelung an einem Punkt Z [falls $Z = O$, $x \mapsto -x$].
- *Drehinversion:* Zusammensetzung einer Punktspiegelung mit einer Drehung mit Drehachse durch das Zentrum.

  Dann gilt (Übung), vergleiche Coxeter:

  1) f eigentliche Bewegung,
     f hat einen Fixpunkt $\Longleftrightarrow f$ ist eine Drehung,
     f hat keinen Fixpunkt $\Longleftrightarrow f$ ist eine Translation oder eine Schraubung.

2) f uneigentliche Bewegung,
f hat einen Fixpunkt $\Longleftrightarrow f$ ist eine Drehinversion,
f hat keinen Fixpunkt $\Longleftrightarrow f$ ist eine Gleitspiegelung.

§ 4 Quadriken

Sei

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ &\quad 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ &\quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c \\ &= (x, Ax) + (b, x) + c \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Die Menge

$$Q = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; f(x_1,x_2,x_3) = 0\}$$

heisst *Quadrik* in $\mathbb{R}^3$. Die Klassifikation der Quadriken ist ähnlich zur Klassifikation der Kegelschnitte. Durch eine geeignete Koordinatentransformation wird eine *Normalform* für f gesucht. Zuerst soll der *quadratische Teil*

$$q(x) = (x, Ax) = x^t Ax$$

reduziert werden.

Der Ausdruck $b(x,y) := (x, Ay) = x^t Ay$ ist *bilinear* (d.h. linear in x und in y) und *symmetrisch* ($b(x,y) = b(y,x)$). Man sagt, dass $b(x,y)$ eine *(symmetrische) Bilinearform* ist.

Satz: Sei A eine (3×3)–Matrix. Die Bilinearform $b(x,y) := x^t Ay$ ist symmetrisch genau dann, wenn die Matrix A symmetrisch ist (d.h. $A^t = A$).

Beweis: Sei $A = (a_{ij})$. Aus $b(x,y) = x^t Ay$ folgt

$$b(e_i, e_j) = a_{ij}$$

für die Standard–Basis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$. Also folgt $a_{ij} = a_{ji}$ aus $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$. Umgekehrt haben wir, da $x^t A y$ eine (1×1)–Matrix ist,

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x^t A y = (x^t A y)^t = y^t A^t x \\ b(y,x) &= y^t A x\,. \end{aligned}$$

Also $A = A^t$ impliziert $b(x,y) = b(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$. □

Sei $y = Tx$ eine Koordinatentransformation. Die quadratische Form $q(x) = x^t A x$ lässt sich als Funktion von y ausdrücken:

$$\begin{aligned} \widetilde{q}(y) = q(x) = q(Ty) &= (Ty, ATy) = (Ty)^t A T y = y^t T^t A T y \\ &= (y, \widetilde{A} y)\,, \end{aligned}$$

mit
$$\widetilde{A} = T^t A T\,.$$

Bemerkung: Zur einer (3×3)-Matrix A können wir eine (nicht notwendigerweise symmetrische Form $b(x', x) = x'^t A x$ oder eine lineare Abbildung $x \mapsto x^* = Ax$ zuordnen. Diese zwei Arten von Objekten verhalten sich ganz verschieden bezüglich einer Koordinatentransformation T, $x = Ty$. Die Matrix der Abbildung bez. der neuen Koordinaten ist $T^{-1} A T$ und die Matrix der Bilinearform bez. der neuen Koordinaten ist $T^t A T$. Falls die Koordinatentransformation durch ein orthogonale Matrix gegeben ist (d.h. falls beide Basen orthonormal sind), gibt es keine Differenz, da $T^{-1} = T^t$ für eine orthogonale Matrix T.

Satz: Sei A die Matrix einer symmetrischen Bilinearform. Es gibt $T \in SO(3)$, so dass $\widetilde{A} = T^t A T = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Beweis: Es muss $b(f_i, f_j) = \alpha_i \delta_{ij}$ gelten. Wir machen den

Ansatz:
$$A f_1 = \lambda f_1\,, f_1 \neq 0$$
d.h. f_1 soll Eigenvektor von A sein. Falls es so ein f_1 gibt, so wählen wir zuerst f_2', f_3', so dass (f_1, f_2', f_3') eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und gleichzeitig ein Rechtssystem. Dann gilt

$$\begin{aligned} b(f_1, f_1) &= (f_1, \lambda f_1) = \lambda (f_1, f_1) = \lambda\,, \\ b(f_2', f_1) &= \lambda (f_2', f_1) = 0 \\ b(f_3', f_1) &= \lambda (f_3', f_1) = 0\,, \end{aligned}$$

und die Matrix von b bezüglich (f_1, f_2', f_3') hat die Block–Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} ,$$

wobei $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ eine (2×2)–symmetrische Matrix ist. Aus dem 2–dimensionalen Fall (oder nach Induktion nach der Dimension) wissen wir, dass es f_2 und f_3 gibt, so dass B diagonal ist. Es gibt *genau* eine Abbildung T mit $Te_i = f_i$, $i = 1, 2, 3$. Da (e_1, e_2, e_3) und (f_1, f_2, f_3) orthonormale Basen sind, ist T orthogonal. Da (f_1, f_2, f_3) ein Rechtssystem ist, gilt $\det T = 1$.

Existenz von f_1 *:* Der Vektor f_1 muss im Kern der Abbildung $A - \lambda E$ liegen. Die Zahl λ muss also Nullstelle des Polynoms vom Grad 3

$$\det(A - \lambda E) \ = \ 0$$

sein. Das Polynom hat mindestens eine reelle Nullstelle α_1. Sei

$$f_1 \ = \ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

die Komponenten eines Eigenvektors zum Eigenwert α_1. Die Zahlen u_1, u_2, u_3 sind Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned} (a_{11} - \alpha_1)u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= 0 \\ a_{12}u_1 + (a_{22} - \alpha_1)u_2 + a_{23}u_3 &= 0 \\ a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + (a_{33} - \alpha_1)u_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Das System besitzt eine nichttriviale Lösung (da $\mathrm{Kern}(A - \alpha_1 E) \neq 0$). Eventuell muss man sie noch normieren (so dass $|f_1| = 1$). $\square$

Bemerkung: Die Tatsache, dass A einen *reellen* Eigenwert besitzt, hängt nicht von der Tatsache ab, dass die Dimension ungerade ist, sondern von der Tatsache, dass A reell *und* symmetrisch ist: Sei x ein komplexer Vektor und $\overline{x}$ der (komponentenweise) komplex-konjugierte Vektor. Sei

$$h(x) := (\overline{x}, Ax) \ = \ \overline{x}^t Ax \ = \ b(\overline{x}, x) \, .$$

Da b symmetrisch und A reell ist, gilt $b(y,x) = b(x,y)$, speziell

$$h(x) \;=\; b(\overline{x}, x) \;=\; b(x, \overline{x}) \;=\; x^t A \overline{x} \;=\; \overline{h(x)}\,,$$

somit hat $h(x)$ *reelle* Werte. Sei jetzt x Eigenvektor zu einem komplexen Eigenwert α_1:

$$Ax \;=\; \alpha_1 x \quad \text{mit} \quad \alpha_1 \in \mathbb{C}\,,\; x \in \mathbb{C}^3\,,\; x \neq 0\,.$$

Es folgt

$$h(x) = (\overline{x}, Ax) \;=\; (\overline{x}, \alpha_1 x) \;=\; \alpha_1(\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \overline{x}_3 x_3)\,.$$

Da $x \neq 0$, ist $\sum \overline{x}_i x_i \neq 0$ und $\sum \overline{x}_i x_i \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass

$$\alpha_1 \;=\; h(x) \left[\sum \overline{x}_i x_i\right]^{-1} \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel: $q(x) = 7x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$,

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\det(A - \lambda E) \;=\; -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 9 \quad \alpha_2 = 6 \quad \alpha_3 = 3 \\ \text{und } \widetilde{A} = \operatorname{diag}(9,6,3) \end{cases} . \end{aligned}$$

Bemerkung: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix sind automatisch zueinander orthogonal:

$$b(f_1, f_2) \;=\; (f_1, Af_2) \;=\; \alpha_2(f_1, f_2) \;=\; b(f_1, f_2) = \;(f_2, Af_1) \;=\; \alpha_1(f_1, f_2)\,.$$

Also $$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Longrightarrow (f_1, f_2) \;=\; 0\,.$$

Das Gleichungssystem für einen Eigenvektor zum Eigenwert 9 ist:

$$\begin{aligned} -2u_1 + 2u_2 \qquad\quad &= 0\;, \\ 2u_1 - 3u_2 + 2u_3 &= 0\;, \\ 2u_2 - 4u_3 &= 0\;. \end{aligned}$$

Eine normierte Lösung ist

$$f_1 \;=\; \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Analog bekommt man die anderen Eigenvektoren:

$$f_2 \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad f_3 \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \;.$$

Zurück zu den Quadriken:

$$f(x) \;=\; (x, Ax) + (b, x) + c \;=\; 0\,.$$

Nach einer geeigneten Wahl der Basis dürfen wir annehmen, dass A diagonal ist:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \;.$$

(1) Es sei $\det A = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0\,.$
Durch eine Translation

$$\begin{aligned} y_1 \;&=\; x_1 + \frac{b_1}{2a_1}\,, \\ y_2 \;&=\; x_2 + \frac{b_2}{2a_2}\,, \\ y_3 \;&=\; x_3 + \frac{b_3}{2a_3}\,, \end{aligned}$$

werden die linearen Glieder eliminiert und die Gleichung lautet

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 \;=\; d\;.$$

Ist $d \neq 0$, so normiert man die Formel (mit anderen a_i's) auf:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 \;=\; 1\;.$$

$a_1 > 0\,,\; a_2 > 0\,,\; a_3 > 0$	*Ellipsoid*
$a_1 > 0\,,\; a_2 > 0\,,\; a_3 < 0$	*einschaliges Hyperboloid*
$a_1 > 0\,,\; a_2 < 0\,,\; a_3 < 0$	*zweischaliges Hyperboloid*

Ist $d = 0$, so bleiben zwei Fälle (nach eventueller Koordinatenumnumerierung):

$a_1 > 0\,,\ a_2 > 0\,,\ a_3 > 0$ *Punkt*

$a_1 < 0\,,\ a_2 < 0\,,\ a_3 > 0$ *Kegel*

(2) $\alpha_1 > 0\,,\ \alpha_2 > 0\,,\ \alpha_3 = 0\,,\ c$ beliebig, $b_3 \neq 0\,.$

Die Gleichung reduziert sich auf

$x_3 \ = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ oder $-x_3 \ = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ *elliptisches Paraboloid*

(3) $\alpha_1 > 0\,,\ \alpha_2 < 0\,,\ \alpha_3 = 0\,,\ c$ beliebig, $b_3 \neq 0.$

Nach einer eventuellen Umnumerierung reduziert sich die Gleichung auf

$x_3 \ = \ a_1x_1^2 - a_2x_2^2$ *hyperbolisches Paraboloid*

(4) $\alpha_3 = 0\,,\ b_3 = 0\,.$

Die Variable x_3 fehlt. Es bleibt eine Gleichung $g(x_1, x_2) = 0$ als Gleichung einer Fläche in $\mathbb{R}^3$. Die Gleichung $g(x_1, x_2) = 0$ definiert einen Kegelschnitt (eventuell entartet) in der (x_1, x_2)-Ebene. Als Fläche im Raum kriegen wir ein *Zylinder* über diesem Kegelschnitt.

(5) $\alpha_1 \neq 0\,,\ \alpha_2 = 0\,,\ \alpha_3 = 0\,, c$ beliebig.

Durch eine geeignete Koordinatentransformation lässt sich eine der Variablen x_2 oder x_3 ganz eliminieren (z.B. x_3). Die Fläche ist ein Zylinder über einem Kegelschnitt.