

Académie des sciences (France). Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1982/05/24.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — *Les familles stables de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 admettant quatre fibres singulières.* Note (*) de **Arnaud Beauville**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Une famille stable de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 admet au moins quatre fibres singulières. On donne une liste complète de celles de ces familles qui ont exactement quatre fibres singulières.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — *The Stable Families of Elliptic Curves on \mathbf{P}^1 with Four Singular Fibres.*

A stable family of elliptic curves on \mathbf{P}^1 has at least four singular fibres. We give a complete list of those families which have exactly four singular fibres.

Une famille stable de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 est un morphisme plat $g : Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ dont les fibres sont des courbes intègres de genre 1, admettant au plus un point double ordinaire. Si elle n'est pas triviale, une telle famille admet au moins quatre fibres singulières [1]. Le but de cette Note est de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de ces familles admettant quatre fibres singulières, et de les décrire explicitement.

En résolvant les singularités de Y , on obtient une *fibration semi-stable* $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, où X est une surface lisse et où les fibres singulières de f sont du type I_c (polygone à c côtés formé de courbes rationnelles). Il revient au même de classifier les familles stables ou les familles semi-stables.

Un exemple de fibration semi-stable est fourni par certaines *familles modulaires*. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, possédant la propriété suivante :

(SS) Γ ne contient aucun élément de trace $-2, -1, 0$ ou 1 .

Alors Γ opère librement sur le demi-plan de Poincaré \mathbf{H} ; le produit semi-direct de Γ par \mathbf{Z}^2 opère librement et proprement sur $\mathbf{H} \times \mathbf{C}$ par la formule :

$$(\gamma, p, q) \cdot (\tau, z) = (\gamma\tau, (c\tau + d)^{-1}(z + p\tau + q))$$

pour :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad (p, q) \in \mathbf{Z}^2, \quad \tau \in \mathbf{H}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Notons X_Γ^0 la surface quotient, et B_Γ^0 la courbe \mathbf{H}/Γ . D'après [2], la fibration elliptique lisse $X_\Gamma^0 \rightarrow B_\Gamma^0$ se prolonge de manière unique en une fibration semi-stable $X_\Gamma \rightarrow B_\Gamma$: c'est la *famille modulaire* associée à Γ .

Nous considérerons les sous-groupes suivants de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$:

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid b \equiv c \equiv 0, a \equiv 1 \pmod{n} \right\},$$

$$\Gamma_0^0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0, a \equiv 1 \pmod{n} \right\},$$

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

Considérons d'autre part un pinceau de cubiques dans \mathbf{P}^2 , tel que les seules singularités des courbes du pinceau soient des points doubles ordinaires. Après éclatement des neuf

points-base du pinceau (qui peuvent être infiniment voisins), on obtient une famille semi-stable de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 , dite famille déduite du pinceau de cubiques.

THÉORÈME. — Soit $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ une famille semi-stable de courbes elliptiques admettant quatre fibres singulières. Alors f est isomorphe à la famille modulaire associée à l'un des six sous-groupes Γ ci-dessous; celle-ci s'identifie à la famille déduite du pinceau de cubiques correspondant à Γ dans la liste suivante :

TABLEAU

Γ	Équation du pinceau	Nombre de composantes des fibres singulières
$\Gamma(3)$	$X^3 + Y^3 + Z^3 + tXYZ = 0$	3, 3, 3, 3
$\Gamma_0^0(4) \cap \Gamma(2)$	$X(X^2 + Z^2 + 2ZY) + tZ(X^2 - Y^2) = 0$	4, 4, 2, 2
$\Gamma_0^0(5)$	$X(X - Z)(Y - Z) + tZY(X - Y) = 0$	5, 5, 1, 1
$\Gamma_0^0(6)$	$(X + Y)(Y + Z)(Z + X) + tXYZ = 0$	6, 3, 2, 1
$\Gamma_0(8) \cap \Gamma_0^0(4)$	$(X + Y)(XY - Z^2) + tXYZ = 0$	8, 2, 1, 1
$\Gamma_0(9) \cap \Gamma_0^0(3)$	$X^2Y + Y^2Z + Z^2X + tXYZ = 0$	9, 1, 1, 1

(On donne à la fin de cette Note une description géométrique des pinceaux de cubiques considérés.)

Démonstration. — Notons B la base de la fibration f , B^0 le plus grand ouvert de B au-dessus duquel f est lisse, et \tilde{B}^0 le revêtement universel de B^0 . En choisissant une trivialisatoin de $R^1 f_*(\mathbf{Z})$ au-dessus de \tilde{B}^0 , on définit une application classifiante $\tau: \tilde{B}^0 \rightarrow H$. Il résulte de [1] que l'orthogonal d'une fibre dans $H^2(X, \mathbf{Q})$ est engendré par les classes des composantes des fibres singulières; d'après [3], prop. 3. 20, ceci entraîne que τ est un *isomorphisme*. On en déduit que la famille $X \rightarrow B$ est isomorphe à une famille modulaire $X_\Gamma \rightarrow B_\Gamma$, où Γ est un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifiant (SS). L'application modulaire $j: B \rightarrow \mathbf{P}^1$ possède les propriétés de ramifications suivantes :

- j est étale au-dessus de $\mathbf{P}^1 - \{0, 12^3, \infty\}$;
- l'indice de ramification de j est 2 (resp. 3) en tout point de $j^{-1}(0)$ [resp. $j^{-1}(12^3)$].

La formule de Riemann-Hurwitz permet alors de calculer le degré n de j :

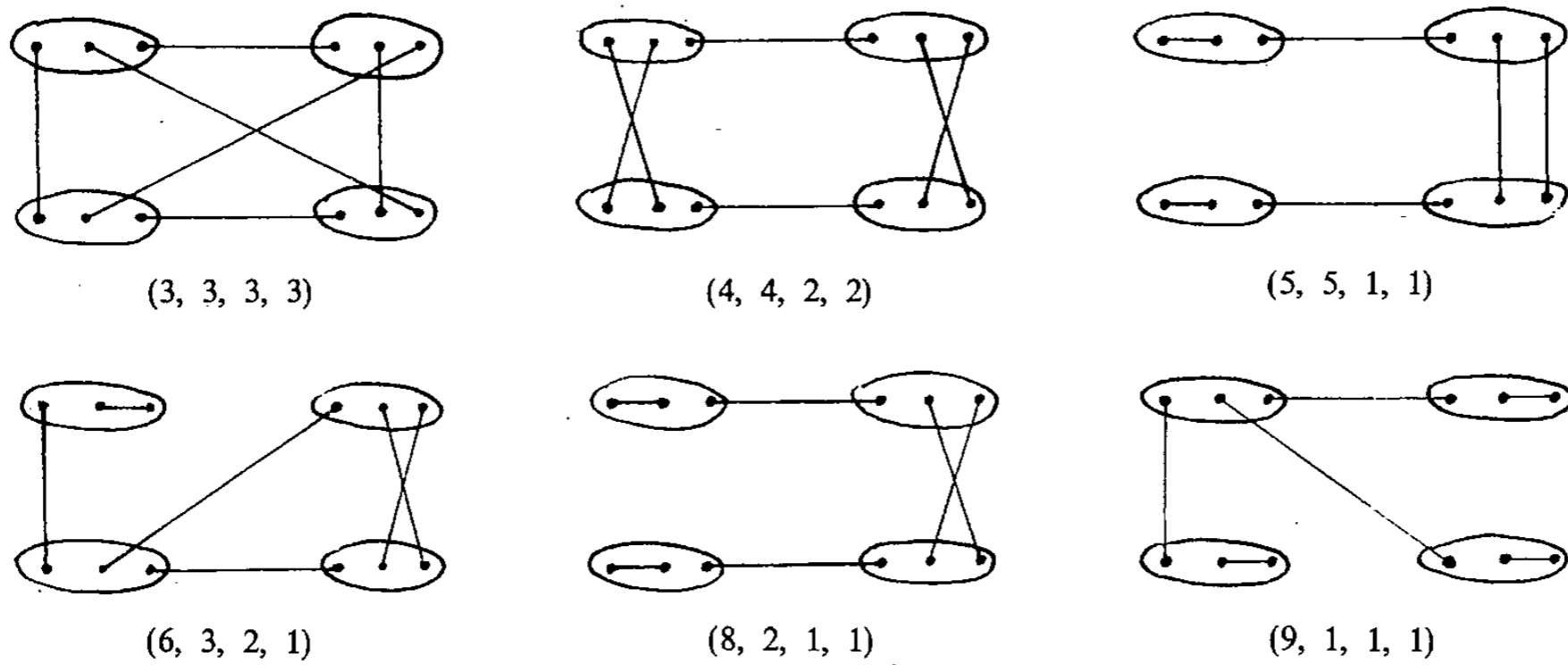
$$-2 = -2n + \frac{n}{2} + \frac{2n}{3} + n - 4, \quad \text{d'où } n = 12.$$

Ainsi l'indice de Γ dans $SL_2(\mathbf{Z})$ est 24; l'image Γ' de Γ dans $PSL_2(\mathbf{Z})$ est d'indice 12. Remarquons qu'étant donné $\Gamma' \subset PSL_2(\mathbf{Z})$, il existe au plus un relèvement Γ de Γ' dans $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifiant (SS). Nous allons déterminer à conjugaison près, les sous-groupes Γ' de $PSL_2(\mathbf{Z})$.

Notons Π le groupe fondamental de $\mathbf{P}^1 - \{0, 12^3, \infty\}$; il est engendré par trois lacets s, r, t , autour de 0, 12^3 et ∞ respectivement, soumis à la relation $srt = 1$. Le revêtement $j: B \rightarrow \mathbf{P}^1$ correspond à un homomorphisme $\varphi: \Pi \rightarrow \mathfrak{S}_{12}$, pour lequel $\varphi(s)$ est de type $(2, \dots, 2)$, $\varphi(r)$ de type $(3, \dots, 3)$ et $\varphi(t)$ de type (c_1, \dots, c_4) [on dit qu'une permutation est de type (c_1, \dots, c_r) si elle est égale au produit de r cycles disjoints de longueurs c_1, \dots, c_r]; de plus le sous-groupe $\varphi(\Pi)$ de \mathfrak{S}_{12} est transitif. Le quotient de Π par la relation $s^2 = r^3 = 1$ s'identifie à $PSL_2(\mathbf{Z})$, de sorte que φ se factorise à travers $\psi: PSL_2(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathfrak{S}_{12}$; le sous-groupe Γ' est l'image réciproque par ψ du fixateur d'un point.

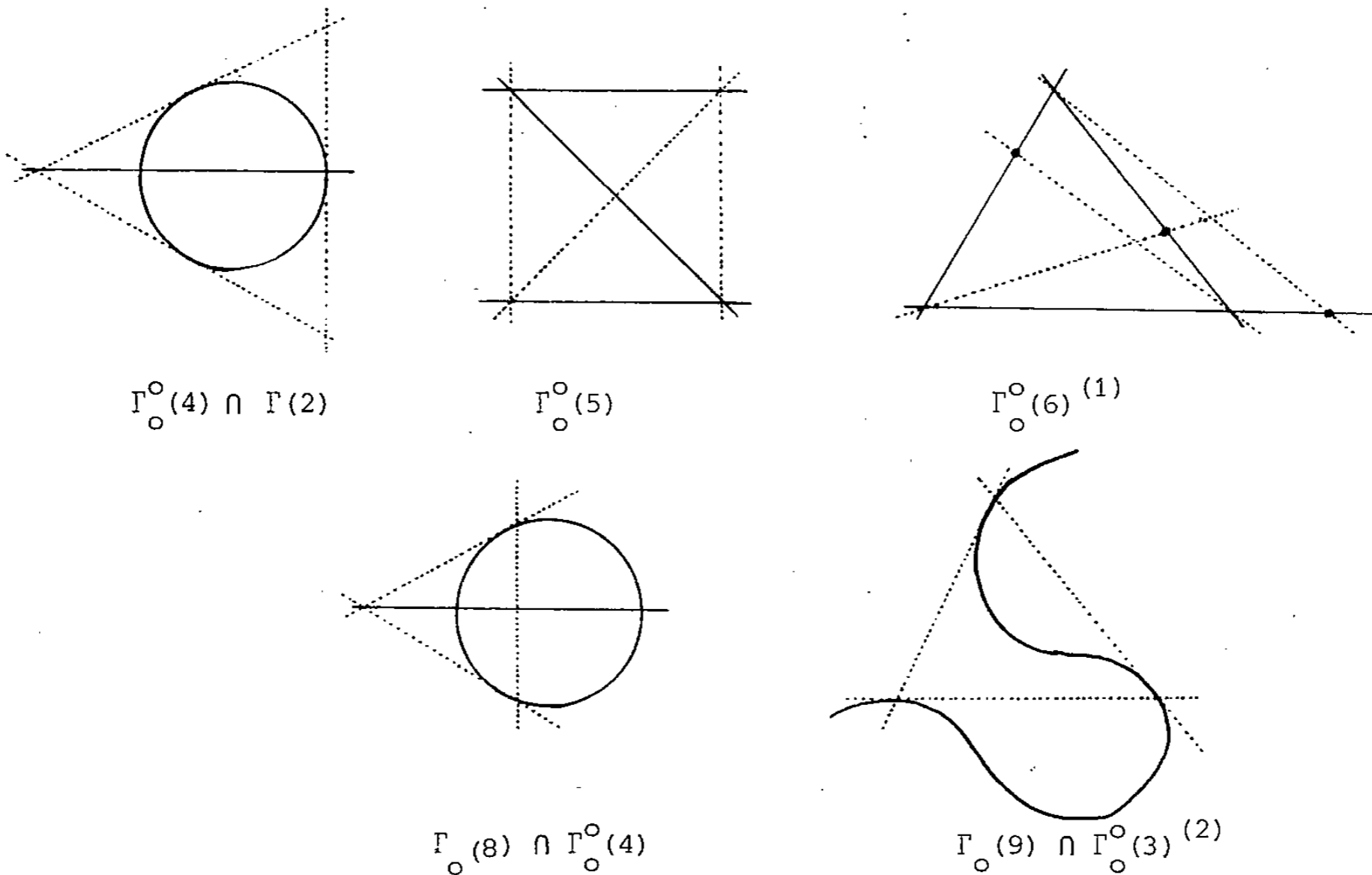
Il s'agit donc de classifier, à conjugaison près, les paires d'éléments (σ, ρ) de \mathfrak{S}_{12} telles que σ soit de type $(2, \dots, 2)$, ρ de type $(3, \dots, 3)$ et $\sigma\rho$ de type (c_1, \dots, c_4) . On associe à une telle paire un diagramme dont les points sont les entiers de 1 à 12; on note les orbites de σ par un trait : $\bullet \text{---} \bullet$ et celles de ρ par un ovale : $\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$.

Un argument combinatoire facile montre que les diagrammes possibles sont les suivants (on indique sous le diagramme le type de $\sigma\rho$) :



Il y a donc au plus six sous-groupes de $SL_2(\mathbf{Z})$ (à conjugaison près) possédant les propriétés requises. Or on vérifie facilement que les six sous-groupes décrits dans le théorème conviennent. Dans chaque cas, l'étude des pointes permet de déterminer le type de $\sigma\rho$, c'est-à-dire le nombre de composantes des fibres singulières (cf. [2]).

On a montré dans [1] que le genre géométrique $p_g(X)$ est nul. Pour une surface elliptique sans fibres multiples, ceci entraîne que la surface est rationnelle, et plus précisément que la fibration elliptique est déduite d'un pinceau de cubiques dans \mathbf{P}^2 . Pour démontrer la



dernière partie du théorème, il suffit de décrire, pour chaque quadruplet (c_1, \dots, c_4) de la liste, un pinceau de cubiques admettant (après éclatement des points-base) quatre fibres de type I_{c_1}, \dots, I_{c_4} : il résulte en effet du calcul de [1], § 4, A qu'un tel pinceau n'a pas d'autres fibres singulières. Le pinceau associé à $\Gamma(3)$ est bien connu : il est engendré par une cubique lisse C et un triangle contenant les neuf points d'inflexion de C . On décrit ci-dessus cinq autres pincesaux de cubiques, en schématisant une cubique du pinceau en traits pleins et une autre en pointillés; il est facile de vérifier que ces pincesaux conviennent.

(¹) Les trois points marqués sur la figure sont alignés.

(²) Cette configuration m'a été signalée par R. Miranda.

(*) Remise le 24 mai 1982.

[1] A. BEAUVILLE, *Astérisque*, n° 86, 1981, p. 97-108.

[2] K. KODAIRA, *Annals of Math.*, 77, 1963, p. 563-626.

[3] D. COX et S. ZUCKER, *Inventiones Math.*, 53, 1979, p. 1-44.

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — Points périodiques de longues périodes au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de \mathbb{R}^2 . Note (*) de **Alain Chenciner** présentée par René Thom.

Dès la codimension deux, l'existence de points périodiques de nombre de rotation p/q dans les déformations d'un germe de difféomorphisme de \mathbb{R}^2 ayant un point fixe elliptique de valeurs propres $e^{\pm 2\pi i \omega_0}$ n'est conséquence du théorème des fonctions implicites que si q est assez petit par rapport à $|\omega_0 - (p/q)|^{-1}$ (au moins pour les valeurs des paramètres pour lesquelles ces points périodiques n'appartiennent pas *a priori* à une courbe fermée invariante normalement hyperbolique [3]); le cas où q est grand est étudié ici à l'aide de la version dissipative du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff que nous avons donnée dans [4].

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Periodic Points of Long Periods in the Neighborhood of a Degenerate Hopf Bifurcation of Diffeomorphisms of \mathbb{R}^2 .

We consider deformations of germs of diffeomorphisms of \mathbb{R}^2 around an elliptic fixed point of eigenvalues $e^{\pm 2\pi i \omega_0}$. As soon as the formal codimension is higher than one, the existence in a deformation of periodic points of rotation number p/q is a consequence of the implicit function theorem only for those q which are not too big with respect to $|\omega_0 - (p/q)|^{-1}$ (at least for values of the parameters for which these periodic points do not a priori lie on a normally hyperbolic invariant closed curve [3]); the case where q is big is settled here thanks to the dissipative version of the Poincaré-Birkhoff geometric theorem given by the author in [4].

Soit $H_{\mu, a} : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ une famille à deux paramètres « générique » de difféomorphismes locaux de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ du type de celles étudiées dans [2] et [3], c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{aligned} H_{\mu, a}(z) &= N_{\mu, a}(z) + O(|z|^{2n+2}), \\ N_{\mu, a}(z) &= z[1 + f(\mu, a, |z|^2)] e^{2\pi i g(\mu, a, |z|^2)}, \\ f(\mu, a, X) &= \mu + aX + a_2(\mu, a)X^2 + \dots + a_n(\mu, a)X^n, \\ g(\mu, a, X) &= \omega(\mu, a) + b_1(\mu, a)X + \dots + b_n(\mu, a)X^n, \\ \omega(0, 0) &= \omega_0, \quad a_2(0, 0) < 0, \quad b_1(0, 0) > 0, \quad 1 - 2 \frac{a_2(0, 0)}{b_1(0, 0)} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial a}(0, 0) > 0. \end{aligned} \right.$$

(les signes ne sont choisis qu'à titre d'exemple pour l'exposé).

Si $\omega > \omega_0$ est assez proche de ω_0 et vérifie une certaine condition diophantienne, on a montré dans [2] que l'ensemble des valeurs de (μ, a) voisines de 0 pour lesquelles $H_{\mu, a}$ possède une courbe fermée invariante lisse $\tilde{\mathcal{C}}_\omega$, sur laquelle elle induise un difféomorphisme conjugué à la rotation d'angle $2\pi\omega$, contient une courbe lisse $\tilde{\mathcal{C}}_\omega$ [représentée sur la figure 1 dans le cas où $\partial\omega/\partial a(0, 0) > 0$].

Si p/q est un rationnel assez proche de ω_0 , il est naturel d'appeler $\tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$ l'ensemble des valeurs de (μ, a) pour lesquelles $H_{\mu, a}$ possède au moins deux orbites périodiques de nombre de rotation p/q [on se réfère ici au relèvement $\tilde{H}_{\mu, a}$ de la famille au revêtement universel de $\mathbb{R}^2 - 0$ obtenu par continuité à partir de celui qui relève la rotation d'angle $2\pi\omega_0$ en la translation de ω_0 : un point périodique de nombre de rotation p/q est par définition la classe d'un point x tel que $\tilde{H}_{\mu, a}^q(x) = x + p$].

La figure 2 de [3] donne l'allure de $\tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$ lorsque $\partial\omega/\partial a(0, 0) > 0$, à condition que q ne soit pas trop grand par rapport à $|\omega_0 - (p/q)|^{-1}$: on peut dans ce cas appliquer le théorème des fonctions implicites usuel à la recherche d'une courbe fermée transformée « radialement » par $H_{\mu, a}^q$ et intersectant son image. Cette méthode ne donne rien si q est trop grand, car $H_{\mu, a}^q$ diffère trop de $N_{\mu, a}^q$, mais nous allons montrer cependant le :

THÉORÈME 1. — Si p/q est assez proche de ω , il existe un point (μ_0, a_0) appartenant à $\tilde{\mathcal{C}}_\omega \cap \tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$. Si $p/q < \omega$ (resp. $p/q > \omega$) les orbites périodiques dont on prouve l'existence sont à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du disque $\tilde{\mathcal{D}}_\omega$ bordé par la courbe $\tilde{\mathcal{C}}_\omega$. \square