# DEUX THÉORÈMES DE NON-ANNULATION POUR LES FONCTIONS $L$ DE FORMES MODULAIRES

E. KOWALSKI AND P. MICHEL

Table des matières



## 1. Introduction

Merel [Mer], en étudiant les corps de définition possibles des points de $p$-torsion des courbes elliptiques ($p$ premier), a rencontré le problème de non-annulation de valeurs critiques de fonctions $L$ suivant:

**Question 1** Pour tout caractère de Dirichlet primitif $\chi$ modulo $p$ qui n'est pas quadratique pair, existe-t-il une forme modulaire primitive[1] (parabolique) $f$ de poids 2 et de niveau $p$ telle que

$$L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}) \neq 0$$

(où $\frac{1}{2}$ est le centre de la bande critique, dans la normalisation "analytique" des fonctions $L$).

Merel a obtenu de nombreux résultats partiels par des techniques basées sur les symboles modulaires et des études de congruences, et a découvert l'énoncé élémentaire équivalent suivant:

**Question 2** Soit $p$ et $\chi$ comme ci-dessus. Existe-t-il $u$ mod $p$, $u \neq 0$, tel que

$$\sum_{x=u+1}^{-1-\frac{1}{u}} \Big( \chi(x) - \overline{\chi}(x)\chi(-1) \Big) \neq 0$$

(où la somme est entre des représentants entiers quelconques)?

Dans un appendice à [Mer] nous avons établi que la réponse à ces questions est "Oui", pour $p$ assez grand, en démontrant cet énoncé élémentaire.

Ici, en utilisant des méthodes désormais classiques de théorie analytique des nombres, nous fournissons une seconde preuve directe de l'énoncé de non-annulation de valeurs critiques, qui est plus précise, et nous étudions le problème correspondant pour $\chi$ quadratique pair, pour une valeur spéciale d'une dérivée d'une fonction $L$.

**Théorème 1.** *Avec les notations précédentes, supposons $\chi$ non quadratique pair. Alors pour $p$ assez grand, $p > P$ pour une certaine constante absolue et effectivement calculable $P$ (ne dépendant pas de $\chi$), il existe une forme $f$ parabolique primitive de poids 2 et niveau $p$ telle que*

$$L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}) \neq 0.$$

[1] Aussi appelée une forme nouvelle.

*Plus précisément, on a la minoration*

$$|\{f \in S_2(p)^* \mid L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}) \neq 0\}| \gg_\varepsilon p^{1-1/2\sqrt{e}-\varepsilon} \tag{1.1}$$

*pour tout $\varepsilon > 0$.*

Ce théorème est un corollaire de la proposition suivante calculant asymptotiquement la moyenne des valeurs critiques $L(f \otimes \chi, \frac{1}{2})$ pour $f$ dans l'ensemble décrit. Rappelons d'abord quelques notations usuelles ([KM1], [KM2]). Pour tout entier $q \geq 1$, $S_2(q)^*$ est l'ensemble (fini, de cardinal $\sim \frac{\varphi(q)}{12}$) des formes primitives de poids 2 et de niveau $q$. Pour $f \in S_2(q)^*$, on note

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{1/2} e(nz), \quad L(f, s) = \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{-s} \tag{1.2}$$

le développement de Fourier et la fonction $L$ de Hecke associée. Notant $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire de Petersson, on écrit

$$\sum_{f\in S_2(q)^*}^{h} \alpha_f = \sum_{f\in S_2(q)^*} \frac{\alpha_f}{4\pi(f, f)}.$$

**Proposition 1.** *Soit $\chi$ un caractère primitif modulo $p$ et $\ell \geq 1$ un entier. Alors*

$$\sum_{f\in S_2(p)^*}^{h} L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}) \lambda_f(\ell) = \frac{\chi(\ell)(1 - W(\chi)^2 \overline{\chi}^2(\ell))}{\sqrt{\ell}} + O(\sqrt{\frac{\ell}{p}})$$

*où $W(\chi)$ est le "root-number" associé à $\chi$, c'est à dire $W(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{p^{1/2}}$, $\tau(\chi)$ étant la somme de Gauss*

$$\tau(\chi) = \sum_{x \bmod p} \chi(x) e\Big(\frac{x}{p}\Big).$$

*La constante implicite dans le $O()$ est absolue et effective.*

**Remarques.**

(1) Le calcul du signe de la somme de Gauss quadratique montre que $W(\chi)^2 = 1$ si $\chi$ est quadratique pair, confirmant que ce cas doit être mis à part. Réciproquement, si $\chi$ ne l'est pas, on a $W(\chi)^2 \neq 1$.

(2) On peut sans grande difficulté expliciter une valeur de $P$ telle que la proposition implique que le Théorème 1 soit vraie pour $p > P$. Les auteurs ont vérifié que $P > 10^{25}$ convient, mais il ne semble pas aisé, par les méthodes suivies, de ramener cela à une valeur "petite", disons $P$ ayant moins de 6 chiffres.

(3) L'exposant $1 - 1/2\sqrt{e}$ n'est pas significatif: il n'est que le reflet des méthodes élémentaires que nous avons choisi d'utiliser: si $\chi$ est quadratique impair la preuve fournit $1 - \varepsilon$ trivialement , alors que l'inégalité de Burgess [B] en place de celle de Polya-Vinogradov fournirait $1-1/4\sqrt{e}$, enfin des techniques nettement plus sophistiquées (mais tout a fait abordable par la technologie actuelle) permettent d'obtenir la non-annulation d'une proportion positive de $L(f \otimes \chi, \frac{1}{2})$.

Le Théorème 1 étant acquis, il est naturel de se demander ce qui se passe lorsque $\chi$ est quadratique pair. On verra (Proposition 3) que dans ce cas on a bel et bien $L(f \otimes \chi, \frac{1}{2}) = 0$ pour toute forme $f \in S_2(p)^*$, et la question naturelle (également soulevée par Merel) est la suivante:

**Question 3.** Soit $\chi$ un caractère quadratique pair modulo $p$ premier. Existe-t-il une forme modulaire $f$ primitive de poids 2 et niveau $p$ telle que

$$\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(f, s) L(f \otimes \chi, s) = 1\,?$$

Notre second résultat affirme que la réponse est "Oui", pour $p$ assez grand; c'est encore une conséquence du calcul asymptotique de la valeur moyenne de la dérivée du produit $L(f,s)L(f\otimes\chi,s)$ en $\frac{1}{2}$.

**Proposition 2.** *Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet primitif quadratique pair. Alors on a pour tout $\varepsilon>0$*

$$\sum_{f\in S_2(p)^*}^{h} L(f,\tfrac{1}{2})L'(f\otimes\chi,\tfrac{1}{2}) = 2L(1,\chi)\log\Bigl(\frac{e^{2\gamma}p}{4\pi^2}\Bigr)+4L'(1,\chi)+O_\varepsilon(p^{-1/4+\varepsilon}).$$

Comme $L(f\otimes\chi,\frac{1}{2})=0$, l'expression considérée est bien la dérivée de $L(f,s)L(f\otimes\chi,s)$ en $s=\frac{1}{2}$.

Il est bien connu que l'une des quantités $L(1,\chi)$ et $L'(1,\chi)$ n'est pas "petite", de manière effective (il existe $c>0$ effectif tel que $L(s,\chi)$ a au plus un zéro dans la région $\mathrm{Re}(s)>1-c/(\log q)$). Précisément on a par exemple (nous tirons cette inégalité de notes d'Iwaniec, mais le principe est bien connu):

**Lemme 1.** *Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet primitif quadratique de conducteur $q$. On a*

$$\frac{4}{10}L(1,\chi)(\log q)+L'(1,\chi)\geq\zeta(2)+O((\log q)^{-1}).$$

Par conséquent, le terme principal de la Proposition 2 est $\gg 1$ de manière effective, prouvant qu'il existe $f$ telle que $\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}L(f,s)L(f\otimes\chi,s)=1$.

Pour prouver le lemme, on peut par exemple montrer, par intégration le long d'un contour et en utilisant la majoration de Burgess [B] de $L(s,\chi)$ sur la droite critique, que pour tout $\varepsilon>0$ et tout $x>1$,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\tau_\chi(n)}{n}V\Bigl(\frac{n}{x}\Bigr)=L(1,\chi)\log(\eta x)+L'(1,\chi)+O_\varepsilon(q^{3/16+\varepsilon}x^{-1/2})$$

où

$$V(y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(3/4)}\Gamma(s+1)y^{-s}\frac{ds}{s}=e^{-y}\geq 0,$$

$\tau_\chi(n)$ est défini en (4.3) et $\eta>0$ est une constante absolue. L'interprétation de $\tau_\chi(n)$ comme nombre d'idéaux de norme $n$ dans le corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{\chi(-1)q})$ fournit la borne inférieure en considérant la sous-somme sur $n=m^2$ et en prenant $x=\eta^{-1}q^{4/10}$.

Iwaniec et Sarnak nous ont informé qu'une partie des résultats de leur étaient connus, et qu'ils avaient montré (ce que nous ne faisons pas ici) que quand $\chi$ quadratique pair et $p$ est assez grand, $L(f,1/2)L'(f\otimes\chi,1/2)\neq 0$ pour une proportion positive de $f$.

Comme la rédaction de [IS] n'est pas terminée et qu'il n'est pas certain que cette variante y soit incluse, la note présente ne semble pas inutile. L'apparition du terme principal dans la Proposition 2 (cf. Section 4.3, juste après le Lemme 10) mérite d'être vue...

**Remerciements.** Nous remercions Loïc Merel d'avoir soumis ces problèmes à notre attention, David Rohrlich pour des discussions utiles concernant le "signe" de l'équation fonctionnelle et enfin le rapporteur pour sa lecture attentive du manuscrit et pour avoir détecté d'embarrassantes erreurs.

P.M. bénéficie d'un soutien de l'Institut Universitaire de France.

## 2. Préliminaires et notations

Soit $q\geq 1$ un entier sans facteurs carrés et $f\in S_2(q)^*$. L'équation fonctionnelle de la fonction $L$ associée (1.2) prend la forme suivante: soit

$$\Lambda(f,s)=\Bigl(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\Bigr)^s\Gamma(s+\tfrac{1}{2})L(f,s)$$

alors on a pour tout $s \in \mathbf{C}$

$$\Lambda(f,s) = \varepsilon_f \Lambda(f, 1-s) \tag{2.1}$$

où $\varepsilon_f \in \{\pm 1\}$ peut-être calculé dans ce cas par la formule

$$\varepsilon_f = -\mu(q)\sqrt{q}\lambda_f(q). \tag{2.2}$$

Nous étudions maintenant l'équation fonctionnelle et le "signe"[2] (ou "root-number") pour la fonction $L$ tordue par un caractère $\chi$ primitif modulo $q$. Comme le conducteur de $\chi$ et le niveau de $f$ sont identiques, ce calcul est plus subtil que le cas ou le niveau et le conducteur sont premiers entre eux qui est généralement présenté dans les livres disponibles; ironiquement, il va s'avérer que le résultat est plus simple. En effet, le signe pour $L(f \otimes \chi, s)$ est indépendant de $f$.

Notons

$$(f \otimes \chi)(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n)\chi(n)n^{1/2}e(nz);$$

il est bien connu ([Iw3] par exemple) que $f$ est modulaire de niveau $q^2$ et de caractère ("nebentypus") $\chi^2$.

**Proposition 3.** *Avec les hypothèses précédentes, $f \otimes \chi$ est primitive de niveau $q^2$. De plus, l'équation fonctionnelle satisfaite par*

$$L(f \otimes \chi, s) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n)\chi(n)n^{-s}$$

*prend la forme*

$$\Lambda(f \otimes \chi, s) = -W(\chi)^2 \Lambda(f \otimes \bar{\chi}, 1-s) \tag{2.3}$$

*avec*

$$\Lambda(f \otimes \chi, s) = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^s \Gamma(s + \tfrac{1}{2}) L(f \otimes \chi, s).$$

*En particulier, le signe est indépendant de $f$.*

*Démonstration.* Il est plus aisé de raisonner en termes de représentations automorphes (voir [JL] et [Go]): soit $\pi_f$ la représentation automorphe cuspidale de $GL(2, \mathbf{A_Q})$ correspondant à $f$. On a la factorisation

$$\pi_f = \bigotimes_v \pi_v$$

où $v$ parcourt les places de $\mathbf{Q}$ (finies et infinie). De même, $\chi$ correspondant naturellement à un caractère de Hecke des idèles $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^\times = GL(1, \mathbf{A_Q})$ de $\mathbf{Q}$, encore noté $\chi$, qui se décompose aussi en

$$\chi = \bigotimes_v \chi_v.$$

La représentation automorphe associée à la forme modulaire $f \otimes \chi$ est

$$\pi_{f \otimes \chi} = \pi_f \otimes \chi = \bigotimes_v \pi_v \otimes \chi_v.$$

Soit $p \mid q$; $\pi_f$ est ramifiée en $p$, ainsi que $\chi$, donc $\chi_p$ est un caractère ramifié de $\mathbf{Q}_p^\times$, tandis que la classification de Jacquet-Langlands implique que $\pi_p$ est une représentation spéciale

$$\pi_p = \sigma(|\cdot|^{1/2}, |\cdot|^{-1/2}) \otimes \eta$$

du fait que le conducteur de $\pi_p$ est exactement $p$ ($q$ étant sans facteurs carrés); le caractère $\eta = \eta_f$ est soit le caractère trivial, soit l'unique caractère quadratique non-ramifié et non-trivial de $\mathbf{Q}_p^\times$, cela parce que le caractère central de $\pi_p$ est lui-même trivial.

[2] Pas vraiment un signe en général, puisqu'il peut être complexe, mais nous utiliserons cet abus de langage.

On en déduit que $\pi_p \otimes \chi_p$ est encore une représentation spéciale, $\pi_p \otimes \chi_p = \sigma(|\cdot|^{1/2}, |\cdot|^{-1/2}) \otimes \eta\chi_p$. Le calcul du conducteur d'une représentation spéciale implique dores et déjà que $\pi_p \otimes \chi_p$ a pour conducteur $p^2$ exactement. Cela confirme que $f \otimes \chi$ est une forme primitive de niveau $q^2$ (et non d'un diviseur $q^* \mid q^2$), donc a une équation fonctionnelle de la forme décrite, avec un signe $\varepsilon_{f\otimes\chi} = \varepsilon(\pi_f \otimes \chi)$ égal à celui associé à $\pi_f \otimes \chi$ par la théorie de Jacquet-Langlands. Celle-ci dit que le signe admet une décomposition en produit

$$\varepsilon(\pi_f \otimes \chi) = \prod_v \varepsilon(\pi_v \otimes \chi_v).$$

Pour $v = \infty$, le signe est $\varepsilon(\pi_\infty \otimes \chi_\infty) = -1$ car le poids est 2. Pour $v = p$ avec $p \mid q$ il faut calculer

$$\varepsilon(\sigma(|\cdot|^{1/2}, |\cdot|^{-1/2}) \otimes \eta\chi_p).$$

Ceci est implicite dans Jacquet-Langlands et explicite dans Godement [Go, 1.49, (224)]: soit $\mu_+ = |\cdot|^{1/2}\eta$, $\mu_- = |\cdot|^{-1/2}\eta$, alors

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma(|\cdot|^{1/2}, |\cdot|^{-1/2}) \otimes \eta\chi_p) &= \varepsilon(\sigma(\mu_+, \mu_-) \otimes \chi_p) \\ &= \varepsilon(\mu_+\chi_p)\varepsilon(\mu_-\chi_p)\frac{L(\mu_+\chi_p)}{L(\mu_-\chi_p)}\end{aligned}$$

où les derniers $\varepsilon$ et $L$ sont les facteurs epsilon et les facteurs $L$ locaux de la thèse de Tate. Comme $\chi_p$ est ramifié, on a $L(\mu_\pm\chi_p) = 1$, et comme $\mu_\pm\eta$ ne l'est pas on a

$$\varepsilon(\mu_\pm\chi_p) = \varepsilon(\chi_p)(\mu_\pm\eta)(\varpi)$$

($\varpi$ étant une uniformisante), donc finalement

$$\varepsilon(\sigma(|\cdot|^{1/2}, |\cdot|^{-1/2}) \otimes \eta\chi_p) = (\varepsilon(\chi_p)\eta(\varpi))^2 = \varepsilon(\chi_p)^2$$

et la proposition en découle maintenant puisque $\prod_p \varepsilon(\chi_p) = W(\chi)$.

$\diamond$

**Remarque.** Ce calcul peut également être effectué du côté de Galois en utilisant la correspondance de Langlands locale; il suffit alors de citer, par exemple, [Roh, Cor. page 146].

## 3. Le premier théorème de non-annulation

Le calcul du signe de l'équation fonctionnelle de $L(f \otimes \chi, s)$ est l'élément essentiel de la preuve de la Proposition 1. La suite est plus ou moins un exercice simple basé sur la formule de Petersson (voir [Du], [KM2] pour d'autres cas).

Soit $p$ premier, $\chi$ un caractère primitif modulo $p$, $f \in S_2(p)^*$. Considérons

$$I_\chi = \frac{1}{2i\pi}\int_{(3)} \Lambda(f \otimes \chi, s + \tfrac{1}{2})G(s)\frac{ds}{s}$$

où $G$ est un polynôme réel, pair, tel que $G(0) = 1$ et

$$G(-1) = G(-2) = 0.$$

On peut amener le contour d'intégration à la droite $\mathrm{Re}(s) = -2$, passant par un pôle simple en $s = 0$ de résidu égal à

$$\Lambda(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}) = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/2} L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}).$$

Faisant alors le changement de variable $s \mapsto -s$ et appliquant l'équation fonctionnelle (2.3), on trouve

$$I_\chi - W(\chi)^2 I_{\bar\chi} = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/2} L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}).$$

Développant maintenant plutôt $L(f\otimes\chi,s)$ en série de Dirichlet dans les intégrales $I_\chi$ et $I_{\overline{\chi}}$, et échangeant somme et intégrale, on trouve donc en comparant

$$L(f\otimes\chi,\tfrac12)=\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)\chi(n)}{\sqrt{n}}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)-W(\chi)^2\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)\bar{\chi}(n)}{\sqrt{n}}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big) \tag{3.1}$$

où

$$W(y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(3)}y^{-s}\Gamma(s+1)G(s)\frac{ds}{s};$$

cette fonction vérifie, comme on s'en assure aussitôt

$$W(y) = 1+O(y^{5/2}),\quad y\to 0 \tag{3.2}$$

$$W(y) = O(y^{-2}),\quad y\to+\infty. \tag{3.3}$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}\sum_{f\in S_2(p)^*}^{h}L(f\otimes\chi,\tfrac12)\lambda_f(\ell)= &\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)\Delta(\ell,n)\\ &-W(\chi)^2\sum_{n\geq 1}\frac{\bar{\chi}(n)}{\sqrt{n}}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)\Delta(\ell,n)\end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\Delta(m,n)$ est le "symbole diagonal" associé aux formes modulaires, défini pour $m$, $n\geq 1$ par

$$\Delta(m,n)=\sum_{f\in S_2(p)^*}^{h}\lambda_f(m)\lambda_f(n).$$

La formule de Petersson justifie cette appellation:

**Lemme 2.** *Avec les notations précédentes, on a la formule*

$$\Delta(m,n)=\delta(m,n)-\mathcal{J}(m,n)$$

*où*

$$\mathcal{J}(m,n)=\frac{2\pi}{p}\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r}S(m,n;pr)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{pr}\Big),$$

*$J_1$ étant la fonction de Bessel et $S(m,n;pr)$ la somme de Kloosterman.*

**Remarque.** La formule de Petersson générale exprime

$$\sum_{f\in\mathcal{F}}\lambda_f(m)\lambda_f(n)$$

en termes de sommes de Kloosterman, où $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de l'espace $S_k(q)$ des formes paraboliques de poids $k$ et niveau $q$; dans le cas présent, les formes primitives forment une base orthogonale de $S_2(p)$ car il n'y a pas de formes anciennes, puisque $S_2(1)=0$. La normalisation de $S_2(p)^*$ en base orthonormée occasionne l'apparition du produit scalaire de Petersson implicite dans $\sum^h$.

Le lemme suivant estime $\mathcal{J}(m,n)$ de la façon habituelle.

**Lemme 3.** *Pour tout $m,n\geq 1$, on a*

$$|\mathcal{J}(m,n)|\leq C\frac{\sqrt{mn}}{p^{3/2}}$$

*où $C=8\pi^2\zeta(\frac32)^2=538.8413...$*

*Démonstration.* On applique la borne $J_1(x) \leq x/2$ et la borne de Weil

$$S(m,n;c) \leq \tau(c)(m,n,c)^{1/2}\sqrt{c}$$

ce qui donne bien

$$|\mathcal{J}(m,n)| \leq \frac{2\pi}{p}\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r}\tau(pr)\sqrt{pr}\frac{2\pi\sqrt{mn}}{pr} \leq 8\pi^2\frac{\sqrt{mn}}{p^{3/2}}\zeta(3/2)^2.$$

$\diamond$

Appliquant la formule de Petersson à (3.4), il vient

$$\sum_{f\in S_2(p)^*}^{h} L(f\otimes\chi,\tfrac{1}{2})\lambda_f(\ell) = \frac{(\chi(\ell)-W(\chi)^2\bar{\chi}(\ell))}{\sqrt{\ell}}W\Big(\frac{2\pi}{p}\Big) \tag{3.5}$$

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)-W(\chi)^2\bar{\chi}(n)}{\sqrt{n}}\mathcal{J}(\ell,n)W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)$$

$$= \frac{(\chi(\ell)-W(\chi)^2\bar{\chi}(\ell))}{\sqrt{\ell}} + O(\frac{1}{\sqrt{\ell p^5}}) \tag{3.6}$$

$$+O\Big(\frac{\ell^{1/2}}{p^{3/2}}\sum_n\Big|W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)\Big|\Big) \tag{3.7}$$

par (3.2) et le lemme. Pour conclure, il suffit maintenant d'observer que

$$\sum_n\Big|W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)\Big| = \sum_{n\leq p}|\dots| + \sum_{n>p}|\dots| \ll p$$

en appliquant (3.2) pour la première somme et (3.3) pour la seconde. Ainsi (3.7) démontre la Proposition 1.

3.1. **Preuve du Théorème 1.** On commence par montrer le lemme élémentaire suivant qui est un variante simple du Théorème de Vinogradov sur le plus petit entier non-résidu quadratique:

**Lemme 4.** *Soit $p$ un nombre premier assez grand et $\chi$ un caractère non-trivial modulo $p$, alors il existe un entier premier $1 \leq \ell \leq p^{1/2\sqrt{e}}\log^2 p$ tel que $|\chi(\ell)-1| \geq 1/\log^3 p$.*

*Démonstration.* On suit fidèlement la présentation donnée dans [LK] Thm. 7.7.6 du théorème de Vinogradov. On pose

$$M = [p^{1/2}\log^2 p],\ T = [p^{1/2\sqrt{e}}\log^2 p]$$

et $\mathcal{M}$ l'ensemble des entiers positifs $\ell \leq M$ tels que $1 - \Re e\chi(\ell) \geq 1/\log p$, par l'inégalité de Polya-Vinogradov [LK] Thm 7.7.4,

$$|\sum_{m\leq M}\chi(m)| < \sqrt{p}\log p,$$

on déduit que

$$|\mathcal{M}| \geq \frac{M}{2} - \frac{2\sqrt{p}\log p}{2-1/\log p}.$$

Supposons alors que tous les premiers $\ell \leq T$ vérifient $|1-\chi(\ell)| \leq 1/\log^3 p$, ncessairement tous les éléments de $\mathcal{M}$ ont un diviseur premier $T < q \leq M$ (dans le cas contraire on aurait pour $m \in \mathcal{M}$, $|\chi(m)-1| \ll 1/\log^2 p$ car $\Omega(m) \leq \log m/\log 2 \ll \log p$) dont on déduit que

$$|\mathcal{M}| \leq \sum_{T<q\leq M}\frac{M}{q} = M(\frac{1}{2} - 4(\sqrt{e}-1)\frac{\log\log p}{\log p}) + O(\frac{M}{\log T});$$

cette majoration contredit la minoration précédente de $|\mathcal{M}|$ pour $p$ assez grand.

$\diamond$

**Remarque.** Ce lemme très simple peut être largement amélioré, en particulier l'utilisation de l'inégalité de Burgess ( pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\chi$ primitif non trivial modulo $p$ on a

$$\sum_{m \leq p^{1/4+\varepsilon}} \chi(m) \ll_\varepsilon p^{(1/4+\varepsilon)(1-\delta)}$$

en place de l'inégalité de Polya-Vinogradov permet de réduire l'exposant $1/2\sqrt{e}$ à $1/4\sqrt{e}+\varepsilon$ et des hypothèses supplémentaires sur l'ordre de $\chi$ permettent des exposants encore meilleurs. Nous avons choisit cette version très simple car elle permet de faire facilement des calculs explicites des contantes impliquées et evite de recourir à une technologie trop avancée.

Retournons à la preuve du théorème 1: soit

$$M_1(\ell) = \sum_{f \in S_2(p)^*}^{h} L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}) \lambda_f(\ell);$$

supposons que l'on ait

$$|W^2(\chi) - 1| \geq 1/\log^4 p$$

d' après la Proposition 1 appliquée à $\ell = 1$, on obtient la minoration

$$|M_1(1)| \geq 1/\log^4 p + O(p^{-1/2}),$$

qui est non nul si $p$ est assez grand. On suppose alors que

$$|W^2(\chi) - 1| < 1/\log^4 p,$$

cela implique en particulier que $\chi$ n'est pas quadratique (il n'est pas quadratique pair par hypothèse, et pour $\chi$ quadratique impair $|W^2(\chi) - 1| = 2$). On applique le lemme précédent au caractère $\bar{\chi}^2$ (qui est non-trivial) et on en déduit par la proposition 1 appliqué au nombre premier $\ell$ ainsi exhibé que

$$M_1(\ell) = \frac{\chi(\ell)(1 - W(\chi)^2 \overline{\chi}^2(\ell))}{\sqrt{\ell}} + O(\sqrt{\frac{\ell}{p}});$$

le terme principal a un module $\gg p^{-1/4\sqrt{e}} \log^{-4} p$ alors que le terme d'erreur est en $O(p^{1/4\sqrt{e}-1/2} \log p)$ et est négligeable devant le terme principal.

Dans tous les cas on a montré que pour $p$ assez grand, il existe $\ell$ qui est soit égal à 1 soit premier, tel que

$$|M_1(\ell)| \geq \tfrac{1}{2} p^{-1/4\sqrt{e}} \log^{-4} p. \tag{3.8}$$

Pour en déduire la minoration (1.1), on procède comme dans [Iw2] (par exemple): par l'inégalité de Cauchy, on a

$$\sum_{f \in S_2(p)^*,\ L(f \otimes \chi, \frac{1}{2}) \neq 0}^{h} 1 \geq \frac{|M_1(\ell)|^2}{M_2(\ell)} \tag{3.9}$$

où

$$M_2(\ell) = \sum_{f \in S_2(p)^*}^{h} |L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2}) \lambda_f(\ell)|^2 \leq 4 \sum_{f \in S_2(p)^*}^{h} |L(f \otimes \chi, \tfrac{1}{2})|^2$$

( on a utilisé la majoration $|\lambda_f(\ell)| \leq 2$).

De plus si on écrit (3.1) sous la forme

$$L(f\otimes\chi,\tfrac{1}{2})=\sum_{n\geq 1}\frac{a(n)}{\sqrt{n}}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)\lambda_f(n)$$

avec

$$a(n)=\chi(n)-W(\chi)^2\bar{\chi}(n),$$

on a

$$M_2(\ell)\leq 4\sideset{}{^h}\sum_{f\in S_2(p)^*}\Big|\sum_{n\geq 1}\frac{a(n)}{\sqrt{n}}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)\lambda_f(n)\Big|^2.$$

On découpe la somme sur $n$ en segments dyadiques (lisses) $n\sim N$. Par l'inégalité de Cauchy, et l'inégalité de grand crible de Deshouilliers-Iwaniec [DI], [DFI], on a

$$\sideset{}{^h}\sum_{f\in S_2(p)^*}\Big|\sum_{n\sim N}\frac{a(n)}{\sqrt{n}}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)\lambda_f(n)\Big|^2\ll_\varepsilon (1+\frac{N}{p})(Np)^\varepsilon\sum_{n\sim N}\frac{a(n)^2}{n}W\Big(\frac{2\pi n}{p}\Big)^2.$$

Pour $N>p^{1+\delta}$, utilisant $W(y)\ll y^{-1}$, le terme de droite est

$$\ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon}p\sum_{n\sim N}n^{-3}\ll_\varepsilon pN^{-2+\varepsilon}\ll N^{-2\delta}/p$$

tandis que pour $N<p^{1+\delta}$ il est

$$\ll_\varepsilon p^{\delta+\varepsilon}.$$

Pour $\varepsilon>0$ donné on choisit $\delta<\varepsilon$ et on somme sur $N$ dans un recouvrement dyadique, de sorte que pour tout $\varepsilon>0$ on a la majoration

$$M_2(\ell)\ll_\varepsilon p^\varepsilon$$

Enfin la minoration effective $(f,f)\gg_\varepsilon p^{1-\varepsilon}$ (voir [HL] Appendix et aussi [HR] Section 6.) pour tout $\varepsilon>0$ implique alors avec (3.9) et (3.8) que

$$|\{f\in S_2(p)^*\ |\ L(f\otimes\chi,\tfrac{1}{2})\neq 0\}|\gg p^{1-\varepsilon}\sideset{}{^h}\sum_{f\in S_2(p)^*\,|\,L(f\otimes\chi,\frac{1}{2})\neq 0}1\gg_\varepsilon p^{1-1/2\sqrt{e}-2\varepsilon}$$

et on obtient donc (1.1).

Notons que l'estimation de $M_2(\ell)$ redonne, par positivité et grâce à la majoration élémentaire $(f,f)\ll_\varepsilon p\log^3 p$ la borne de convexité $L(f\otimes\chi,\frac{1}{2})\ll_\varepsilon p^{1/2+\varepsilon}$ pour les valeurs individuelles.

## 4. Le second théorème de non-annulation

Nous en venons à la Proposition 2. Notons $L_K(f,s)=L(f,s)L(f\otimes\chi,s)$ (l'indice $K$ étant choisi pour rappeler que c'est une fonction $L$ sur le corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$), et

$$\Lambda_K(f,s)=\Lambda(f,s)\Lambda(f\otimes\chi,s)=Q^s\Gamma(s+\tfrac{1}{2})^2L_K(f,s)$$

où $Q=\frac{p^{3/2}}{4\pi^2}$. L'équation fonctionnelle pour $L_K(f,s)$ prend la forme

$$\Lambda_K(f,s)=-\varepsilon_f\Lambda_K(f,1-s)\tag{4.1}$$

d'après (2.1) et (2.3).

De plus, on a

$$L_K(f,s)=L(2s,\chi)\sum_{n\geq 1}\tau_\chi(n)\lambda_f(n)n^{-s}\tag{4.2}$$

où

$$\tau_\chi(n) = \sum_{ab=n} \chi(a); \tag{4.3}$$

cela découle des relations de multiplicativité de Hecke

$$\lambda_f(n)\lambda_f(m) = \sum_{d|(n,m)} \chi_0(d)\lambda_f\Big(\frac{nm}{d^2}\Big)$$

($\chi_0$ désignant le caractère trivial modulo $p$). Notons que cela exprime $L_K(f,s)$ comme convolution de Rankin-Selberg de $f$ avec une série théta associée à $\tau_\chi$. Pour une étude plus approfondie de convolutions de Rankin-Selberg du point de vue analytique, voir [KMV]. Notons que les résultats considérés ici n'entrent pas dans le cadre de cet article, car la forme par laquelle on tord $f$ (i.e. la série theta en question) dépend du niveau de $f$.

4.1. **Le terme principal.** Nous vérifions maintenant le terme principal de l'asymptotique de la Proposition 2. Considérons un polynôme $G$ comme ci-dessus et

$$I = \frac{1}{2i\pi}\int_{(3)} G(s)\Lambda_K(f, s+\tfrac12)\frac{ds}{s^2}.$$

En déplaçant le contour et en appliquant l'équation fonctionnelle, il vient

$$(1+\varepsilon_f)I = \mathrm{Res}_{s=0}\frac{Q^{s+\frac12}G(s)\Gamma(s+1)^2L_K(f,s+\frac12)}{s^2} = \sqrt{Q}L_K'(f,\tfrac12).$$

D'où, en développant $L_K(f,s)$ dans $I$ à l'aide de (4.2),

$$L_K'(f,\tfrac12) = (1+\varepsilon_f)\sum_{n\geq 1}\frac{\tau_\chi(n)}{\sqrt{n}}\lambda_f(n)V\Big(\frac{n}{Q}\Big)$$

avec

$$V(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(3)} y^{-s}G(s)\Gamma(s+1)^2L(1+2s,\chi)\frac{ds}{s^2}.$$

**Lemme 5.** *On a*

$$V(y) = L(1,\chi)\log(e^{2\gamma}/y) + 2L'(1,\chi) + O_G(y^2) \tag{4.4}$$

$$V(y) = O_G(y^{-5/2}). \tag{4.5}$$

Cela découle de la définition de $V$ en manipulant le contour; notons que le terme principal (4.4) est

$$\mathrm{Res}_{s=0}\frac{y^{-s}G(s)\Gamma(s+1)^2L(1+2s,\chi)}{s^2}.$$

La quantité que l'on cherche à calculer est

$$M_1^h = \sum_{f\in S_2(p)^*}^h L_K'(f,\tfrac12) = \sum_{n\geq 1}\frac{\tau_\chi(n)}{\sqrt{n}}V\Big(\frac{n}{Q}\Big)\sum_f^h(1+\varepsilon_f)\lambda_f(n).$$

Notons $\Delta^+(m,n) = \sum_f^h (1+\varepsilon_f)\lambda_f(n)\lambda_f(m)$.

**Lemme 6.** *On a*

$$\begin{aligned}\Delta^+(1,n) &= \Delta(1,n)+\sqrt{p}\Delta(p,n)\\ &= \delta(1,n)+\sqrt{p}\delta(p,n)-\frac{2\pi}{p}\sum_{r\geq1}\frac{1}{r}S(n,1;pr)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{n}}{pr}\Big)\\ &\quad -\frac{2\pi}{\sqrt{p}}\sum_{r\geq1}\frac{1}{r}S(n,p;pr)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{pn}}{pr}\Big).\end{aligned}$$

C'est une conséquence facile de la formule de Petersson et de (2.2). On en déduit que

$$M_1^h = V\Big(\frac{1}{Q}\Big)+\tau_\chi(p)V\Big(\frac{p}{Q}\Big)+N_1+P_1 \tag{4.6}$$

où

$$N_1 = -\frac{2\pi}{p}\sum_{n\geq1}\frac{\tau_\chi(n)}{\sqrt{n}}V\Big(\frac{n}{Q}\Big)\sum_{r\geq1}\frac{1}{r}S(n,1;pr)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{n}}{pr}\Big) \tag{4.7}$$

$$P_1 = -\frac{2\pi}{\sqrt{p}}\sum_{n\geq1}\frac{\tau_\chi(n)}{\sqrt{n}}V\Big(\frac{n}{Q}\Big)\sum_{r\geq1}\frac{1}{r}S(n,p;pr)J_1\Big(\frac{4\pi}{r}\sqrt{\frac{n}{p}}\Big). \tag{4.8}$$

Les deux premiers termes, d'après le Lemme 5, contribuent

$$2L(1,\chi)\log\Big(\frac{e^{2\gamma}p}{4\pi^2}\Big)+4L'(1,\chi)+O(p^{-5/2}).$$

4.2. **Estimation de $N_1$.**

**Proposition 4.** *On a*

$$N_1 \ll_\varepsilon p^{-1/4+\varepsilon}.$$

En ouvrant la somme de Kloosterman $S(n,1;pr)$, on a

$$N_1 = -\frac{2\pi}{p}\sum_{r\geq1}\frac{1}{r}\sideset{}{^*}\sum_{x \bmod pr} e\Big(\frac{\bar{x}}{pr}\Big)\sum_{n\geq1}\frac{\tau_\chi(n)}{\sqrt{n}}V\Big(\frac{n}{Q}\Big)e\Big(\frac{nx}{pr}\Big)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{n}}{pr}\Big). \tag{4.9}$$

**Lemme 7.** *Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction à décroissance rapide en $0$ et en $+\infty$, $\chi$ un caractère primitif modulo $q$, $c$ un entier $\equiv 0$ modulo $q$, $x$ un entier premier à $c$, $\bar{x}$ l'inverse modulo $c$ de $x$. On a*

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq1}\tau_\chi(n)e\Big(\frac{nx}{c}\Big)g(n) &= \frac{\chi(\bar{x})}{c}\tau(\chi)L(1,\bar{\chi})\int_0^{+\infty}g(t)dt\\ &\quad -2\pi\frac{\chi(\bar{x})}{c}\sum_{h\geq1}\tau_\chi(h)e\Big(-\frac{h\bar{x}}{c}\Big)\int_0^{+\infty}Y_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{ht}}{c}\Big)g(t)dt\\ &\quad +4\frac{\chi(\bar{x})}{c}\sum_{h\geq1}\tau_\chi(h)e\Big(\frac{h\bar{x}}{c}\Big)\int_0^{+\infty}K_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{ht}}{c}\Big)g(t)dt\end{aligned}$$

*(où $\tau(\chi)$ est la somme de Gauss associée à $\chi$).*

Cette formule de sommation, ainsi que son analogue du Lemme 10 ci-dessous, peut se déduire de la formule de Poisson en deux variables (voir par exemple [DI]), ou de la modularité d'une série d'Eisenstein à coefficients de Fourier $\tau_\chi(n)$. Voir aussi [Iw1], et [KMV].

Appliquant cela à la somme intérieure sur $n$ dans (4.9), on trouve trois termes, dont le premier est

$$-\frac{2\pi}{p^2}L(1,\chi)\tau(\chi)\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r^2}S_\chi(1,0;pr)\int_0^{+\infty}J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{t}}{pr}\Big)V\Big(\frac{t}{Q}\Big)\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

où

$$S_\chi(a,b;q)=\sum_{x \bmod q}{}^{*}\chi(x)e\Big(\frac{ax+b\bar{x}}{q}\Big).$$

**Lemme 8.** *On a*

$$S_\chi(a,0;pr)=\begin{cases}\tau(\chi)\mu(r)\overline{\chi}(a)\chi(r), & si\ (a,pr)=1\\ 0, & si\ a\equiv 0 \bmod p.\end{cases}$$

Puisque ici $\tau(\chi)=\sqrt{p}W(\chi)=\sqrt{p}$, le premier terme est donc égal à

$$-\frac{2\pi}{p}L(1,\chi)\sum_{r\geq 1}\frac{\mu(r)\chi(r)}{r^2}\int_0^{+\infty}J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{t}}{pr}\Big)V\Big(\frac{t}{Q}\Big)\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Il est aisé de l'estimer: l'intégrale est bornée par

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} &= \int_0^{Q}+\int_Q^{+\infty}\\ &\ll \frac{\sqrt{p}}{r}+p^{3/4}\end{aligned}$$

(utilisant $V(x)\ll 1$, $J_1(x)\ll x$ pour la première partie, $V(x)\ll x^{-1}$, $J_1(x)\ll 1$ pour la seconde), de sorte que ce premier terme au total est

$$\ll \frac{1}{p}|L(1,\chi)|\times p^{3/4}\ll_\varepsilon p^{-1/4+\varepsilon}$$

par la majoration (élémentaire) $L(1,\chi)\ll_\varepsilon p^\varepsilon$.

Pour ce qui est des deux autres termes, contenant les fonctions de Bessel $Y_0$ et $K_0$, si l'on pose

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}V\Big(\frac{t}{Q}\Big)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{t}}{pr}\Big),$$

ils valent respectivement

$$N_1^K=\frac{8\pi}{p^2}\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r^2}\sum_{h\geq 1}S_\chi(0,1+h;pr)\tau_\chi(h)\int_0^{+\infty}K_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{ht}}{pr}\Big)g(t)dt$$

et

$$N_1^Y=-\frac{4\pi^2}{p^2}\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r^2}\sum_{h\geq 1}S_\chi(0,1-h;pr)\tau_\chi(h)\int_0^{+\infty}Y_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{ht}}{pr}\Big)g(t)dt.$$

Pour leur estimation, on procède comme dans [KM2], Section 2.4.6. Les détails étant relativement longs mais tout à fait banals, nous ne les donnerons pas. Il est possible de suivre (loc. cit.) presque ligne par ligne, si l'on veut. Rappellons seulement que la stratégie est la suivante : on remplace $N_1^K$ et $N_1^Y$ par des variantes où la somme sur $r$ est restreinte à $r<R$, $R$ un paramètre choisi ensuite ($R=q^{2+\theta}$, pour $\theta>0$ conviendra) : il est facile de vérifier que l'erreur ainsi commise est

$$\ll_\varepsilon \frac{p^{1/2+\varepsilon}}{\sqrt{R}}$$

pour tout $\varepsilon>0$. Pour des raisons techniques on remplace aussi $g(t)$ par $g(t)\xi(t)$ où $\xi$ est $C^\infty$ sur $[0,+\infty[$, est nulle pour $t\leq 1/2$ et $=1$ pour $t\geq 1$, ce qui ne modifie pas la somme originale mais permet de faire converger des intégrales près de 0.

Pour estimer $N_1^K$, on emploie la décroissance exponentielle de $K_0$

$$K_0(y) \ll y^{-1/2}\exp(-y),$$

et pour $Y_0$ on exploite l'oscillation des fonctions $Y_0$ et $J_1$ par intégrations par parties successives (voir [KM2], Lemma 7), et une subdivision dyadique (ie on écrit $\xi = \sum_{i\geq 1}\xi_i$ avec $\xi_i$ supportée sur un intervalle dyadique). Le point principal est qu'il n'y a pas de phase stationnaire.

Le résultat final pour ces termes est

**Lemme 9.** *On a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$N_1^K \ll_\varepsilon p^{-1/2+\varepsilon}, \quad \textit{et} \quad N_1^Y \ll_\varepsilon p^{-1/2+\varepsilon}.$$

4.3. **Estimation de $P_1$.** Le terme $P_1$ s'avère plus délicat. Tout d'abord, utilisant

$$J_1(x) \ll x, \quad S(m,n;c) \leq \tau(c)(m,n,c)^{1/2}\sqrt{c},$$

la contribution des entiers $r$ tels que $p \mid r$ est facilement estimée et est $\ll_\varepsilon p^{-1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Notons $P_1^*$ la somme restante. Pour $(r,p) = 1$, on a la multiplicativité tordue

$$S(n,p;pr) = S(n\bar{p},1;r)S(n\bar{r},p\bar{r};p) = S(n,0;p)S(n\bar{p},1;r).$$

De plus, on a

$$S(n,0;p) = \begin{cases} \mu(p) = -1, \text{ si } p \text{ ne divise pas } n \\ p-1, \text{si } p \mid n \end{cases}$$

En séparant ces deux cas, on trouve pour tout $\varepsilon > 0$

$$P_1^* = P_2 + P_3 + O(p^{-1/4+\varepsilon})$$

avec

$$\begin{aligned} P_2 &= -2\pi\frac{p-1}{p}\sum_{\substack{r\geq 1\\(r,p)=1}}\frac{1}{r}\sideset{}{^*}\sum_{x \bmod r} e\Big(\frac{\bar{x}}{r}\Big)\sum_{n\geq 1}\frac{\tau_\chi(n)}{\sqrt{n}}e\Big(\frac{nx}{r}\Big)V\Big(\frac{np}{Q}\Big)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{n}}{r}\Big)\\ P_3 &= \frac{2\pi}{\sqrt{p}}\sum_{\substack{r\geq 1\\(r,p)=1}}\frac{1}{r}\sideset{}{^*}\sum_{x \bmod r} e\Big(\frac{\bar{x}}{r}\Big)\sum_{n\geq 1}\frac{\tau_\chi(n)}{\sqrt{n}}e\Big(\frac{n\bar{p}x}{r}\Big)V\Big(\frac{n}{Q}\Big)J_1\Big(\frac{4\pi}{r}\sqrt{\frac{n}{p}}\Big).\end{aligned}$$

Plusieurs remarques sont nécessaires ici : tout d'abord, pour $p \mid n$, on a $\tau_\chi(n) = \tau_\chi(n/p)$ et $S(np\bar{p},1;r) = S(n,1;r)$, d'où la formule donnée pour $P_2$. D'autre part, le terme d'erreur correspond à l'estimation de l'effet de remplacer dans $P_3$ la somme sur $n \geq 1$ premier à $p$ (qui devrait intervenir) en celle sur $n \geq 1$ qui s'y trouve : en effet cette erreur est (en utilisant encore $J_1(x) \ll x$ et la borne de Weil)

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{\sqrt{p}}\sum_{\substack{r\geq 1\\(r,p)=1}}\frac{1}{r}\sum_{m\geq 1}\frac{\tau_\chi(m)}{\sqrt{mp}}S(m,1;r)V\Big(\frac{mp}{Q}\Big)J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{m}}{r}\Big)\\ &\ll \frac{1}{p}\sum_{r\geq 1}\tau(r)r^{-3/2}\sum_{m\geq 1}\tau(m)\sqrt{m}\Big|V\Big(\frac{mp}{Q}\Big)\Big|\\ &\ll_\varepsilon p^{-1/4+\varepsilon}\end{aligned}$$

en estimant $V$ comme d'habitude. Enfin le même type de majorations permet de remplacer le facteur $\frac{p-1}{p}$ par 1 au prix d'un terme d'erreur en $p^{-1/2+\varepsilon}$.

Pour les sommes intérieures en $n$, on a besoin de la formule de sommation suivante, pour laquelle on peut donner les même références que pour le Lemme 7.

**Lemme 10.** *Soit $g : [0, +\infty[ \to \mathbf{C}$ une fonction à décroissance rapide en 0 et en $+\infty$, $\chi$ un caractère primitif modulo $q$, $r$ un entier premier à $q$, $x$ un entier premier à $r$, $\bar{x}$ l'inverse modulo $r$ de $x$. On a*

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\tau_\chi(n)e\Big(\frac{nx}{r}\Big)g(n) = &\frac{\chi(r)}{r}L(1,\chi)\int_0^{+\infty}g(t)dt\\ &-2\pi\frac{\chi(r)}{r}\frac{\tau(\chi)}{q}\sum_{h\geq 1}\tau_\chi(h)e\Big(\frac{-\bar{x}\bar{q}h}{r}\Big)\int_0^{+\infty}Y_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{ht}}{r}\Big)g(t)dt\\ &+4\frac{\chi(r)}{r}\frac{\tau(\chi)}{q}\sum_{h\geq 1}\tau_\chi(h)e\Big(\frac{\bar{x}\bar{q}h}{r}\Big)\int_0^{+\infty}K_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{ht}}{r}\Big)g(t)dt.\end{aligned}$$

Ce lemme s'applique aux sommes sur $n$ dans les deux termes $P_2$ et $P_3$. Intéressons-nous d'abord au premier terme obtenu dans chaque cas: pour $P_2$ nous trouvons

$$-2\pi\sum_{(r,p)=1}\frac{1}{r}S(1,0;r)\times\frac{\chi(r)}{r}L(1,\chi)\int_0^{+\infty}V\Big(\frac{pt}{Q}\Big)J_1\Big(\frac{4\pi}{r}\sqrt{t}\Big)\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

et pour $P_3$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{p}}\sum_{(r,p)=1}\frac{1}{r}S(1,0;r)\times\frac{\chi(r)}{r}L(1,\chi)\int_0^{+\infty}V\Big(\frac{t}{Q}\Big)J_1\Big(\frac{4\pi}{r}\sqrt{\frac{t}{p}}\Big)\frac{dt}{\sqrt{t}};$$

effectuant le changement de variable $px \mapsto t$ dans la dernière intégrale, on découvre qu'ils se compensent exactement et leur somme est nulle.

Reste donc à traiter les quatre termes faisant intervenir les fonctions de Bessel dans $P_2$ et $P_3$. La méthode est la même que pour les termes correspondants de $N_1$ : il faut restreindre la somme à $r < R$, le reste étant $\ll_\varepsilon p^{1/2+\varepsilon}R^{-1/2}$, et appliquer les bornes pour $K_0$ ou faire les "intégrations par parties" pour exploiter les oscillations de $Y_0$. On trouve encore que ces quantités $P_2^Y + P_2^K$, $P_3^Y + P_3^K$, sont bornées par

$$p^{-1/2+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant $R = q^{1+\delta}$ pour un certain $\delta > 0$.

## Bibliographie


[B] Burgess, D.: *On character sums and L-series II* Proc. London Math. Soc., III Ser. 13, 524-536 (1963).

[DFI] Duke, W., Friedlander, J. et Iwaniec, H.: *Bounds for automorphic L-functions, II*, Invent. Math. 115 (1994), 219–239.

[DI] Deshouillers, J.M. et Iwaniec, H.: *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70 (1982), 219–288.

[Du] Duke, W.: *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with high level*, Invent. Math. 119, (1995), 165–174.

[Go] Godement, R.: *Notes on Jacquet-Langlands*, notes miméographiées, Institute for Advanced Study, 1968.

[GR] Gradshteyn, I. S. et Ryzhik, I. M.: *Table of integrals, series, and products*, fifth edition, Academic Press, 1994.

[GZ] Gross, B. and Zagier, D.: *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math., 84 (1986), 225–320.

[HL] Hoffstein, Jeffrey; Lockhart, Paul Coefficients of Maass forms and the Siegel zero. With an appendix by Dorian Goldfield, Hoffstein and Daniel Lieman. Ann. of Math. (2) 140 (1994), no. 1, 161–181.

[HR] Hoffstein, Jeffrey; Ramakrishnan, Dinakar Siegel zeros and cusp forms. Internat. Math. Res. Notices 1995, no. 6, 279–308.

[IS] Iwaniec, H. et Sarnak, P.: *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau–Siegel zeros*, en préparation.

[Iw1] Iwaniec, H. : *Advanced analytic number theory*, Rutgers University Graduate course, 1998–1999.

[Iw2] Iwaniec, H.: *On the order of vanishing of modular L-functions at the critical point*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux 2, (1990), 365–376.

[Iw3] Iwaniec, H.: *Topics in classical automorphic forms*, GSM 17, A.M.S 1997.
[JL] Jacquet, H. et Langlands, R.: *Automorphic forms on $GL(2)$*, Lecture Notes in Math. 114, Springer Verlag 1967.
[KM1] Kowalski, E. et Michel, P.: *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic $L$-functions*, Duke Math. Journal 100 (1999), 503–542.
[KM2] Kowalski, E. et Michel, P.: *A lower bound for the rank of $J_0(q)$*, Acta Arithmetica 94 (2000), 303–343.
[KMV] Kowalski, E., Michel, P. et Vanderkam, J.: *On Rankin-Selberg L functions in the level aspect*, Prépublication (1999).
[Kow] Kowalski, E.: *The rank of the Jacobian of modular curves: analytic methods*, Ph.D. Thesis, Rutgers University, 1998.
[LK] Loo-Keng H. *Introduction to Number theory* , Springer 1982.
[Mer] Merel, L.: *Sur la nature non-cyclotomique des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Duke Math. Journal. (à paraitre).
[Roh] Rohrlich, D.: *Elliptic curves and the Weil-Deligne group*, CRM Proc. and Lecture Notes 4, 1994, 125–157.
[Wal] Waldspurger, J-L.: *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pures et Appliquées 60 (1981), 374–484.

P. Michel: michel@darboux.math.univ-montp2.fr
Université Montpellier II CC 051, 34095 Montpellier Cedex 05, FRANCE.

E. Kowalski: ekowalsk@math.princeton.edu
Dept. of Math. - Fine Hall, Princeton University, Princeton, NJ 08544-1000, USA.