

# Les graphes expandeurs

E. Kowalski

École Polytechnique Fédérale de Zürich

9 Avril 2015

*... à l'expansion de mon cœur refoulé s'ouvrèrent  
aussitôt des espaces infinis.*

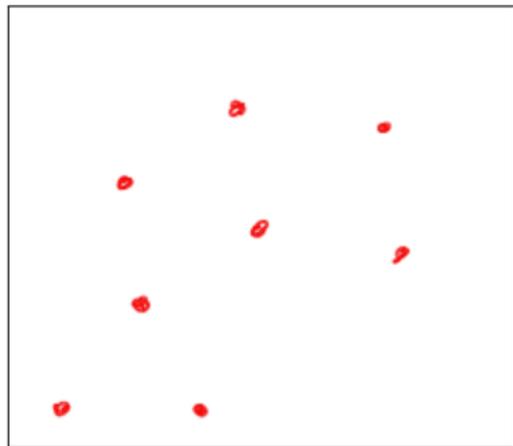
M. Proust, « À l'ombre des jeunes filles en fleurs »,  
(deuxième partie, « Noms de Pays : le Pays »)

# Plan

- ▶ Qu'est-ce qu'un graphe ?
- ▶ À quoi peuvent servir les graphes ?
- ▶ Expansion dans les graphes
- ▶ Graphes expanseurs
- ▶ Applications

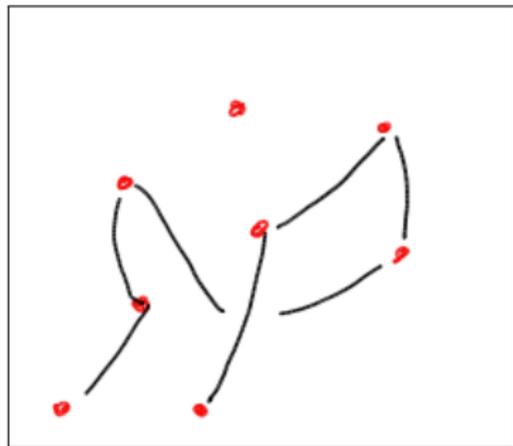
## Qu'est-ce qu'un graphe?

- ▶ Un ensemble de sommets ;



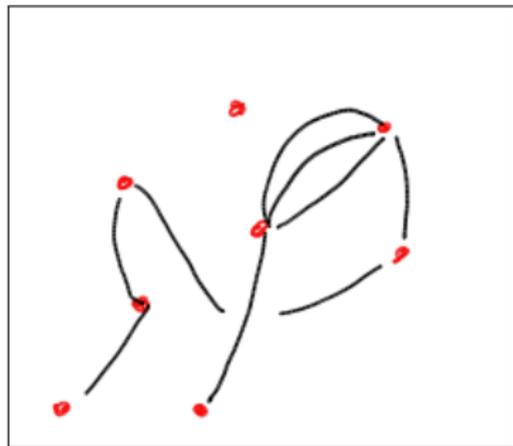
## Qu'est-ce qu'un graphe?

- ▶ Un ensemble de sommets ;
- ▶ Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;



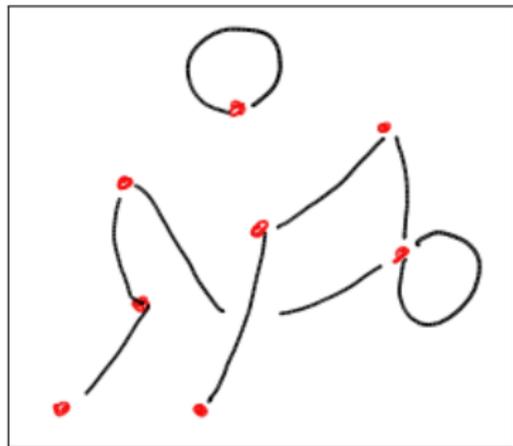
## Qu'est-ce qu'un graphe?

- ▶ Un ensemble de sommets ;
- ▶ Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;
- ▶ Parfois avec des arêtes multiples ;



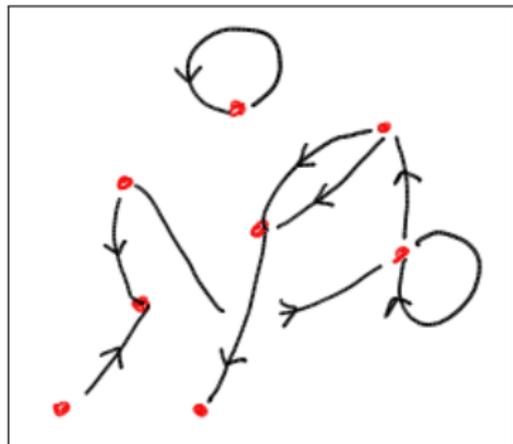
## Qu'est-ce qu'un graphe?

- ▶ Un ensemble de sommets ;
- ▶ Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;
- ▶ Parfois avec des arêtes multiples ;
- ▶ Parfois avec des boucles ;



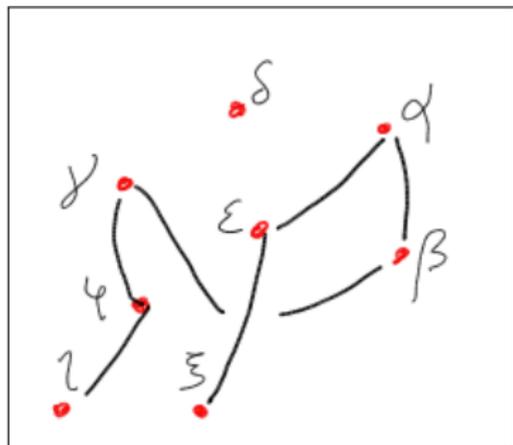
## Qu'est-ce qu'un graphe?

- ▶ Un ensemble de sommets ;
- ▶ Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;
- ▶ Parfois avec des arêtes multiples ;
- ▶ Parfois avec des boucles ;
- ▶ Parfois les arêtes sont orientées ;

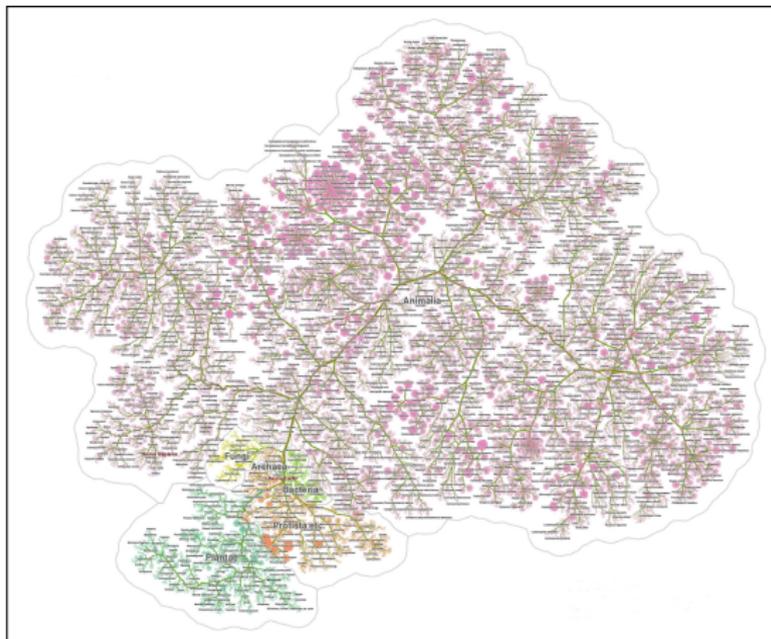


## Qu'est-ce qu'un graphe?

- ▶ Un ensemble de sommets ;
- ▶ Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;
- ▶ Parfois avec des arêtes multiples ;
- ▶ Parfois avec des boucles ;
- ▶ Parfois les arêtes sont orientées ;
- ▶ Et parfois sommets et/ou arêtes sont « décoré(e)s » par d'autres données.

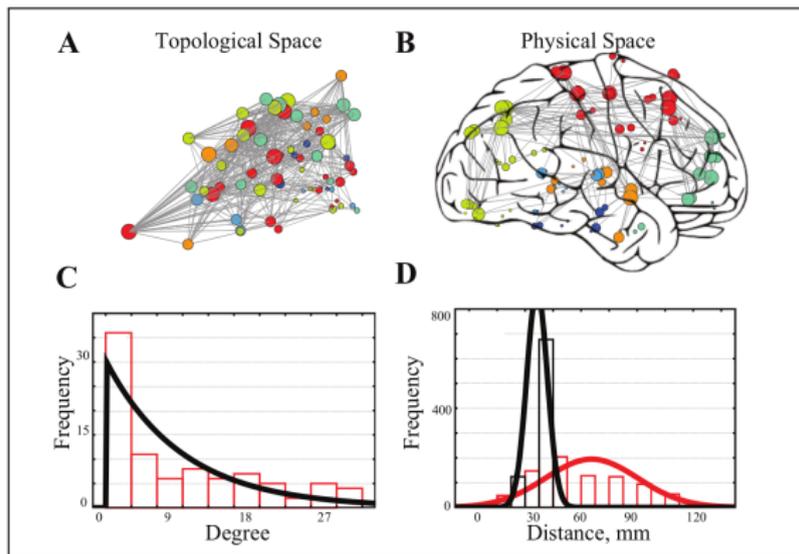


## Quelques exemples de graphes



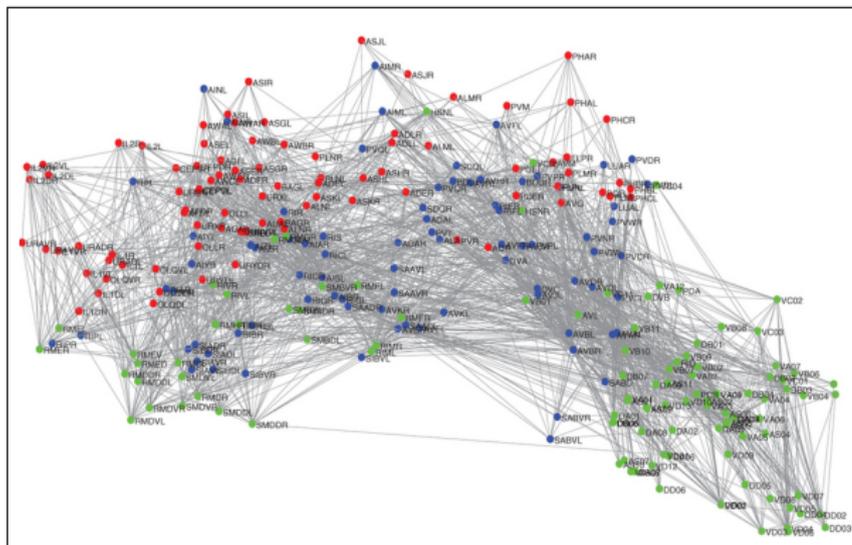
Quelques espèces ; Source : Yifan Hu

## Quelques exemples de graphes



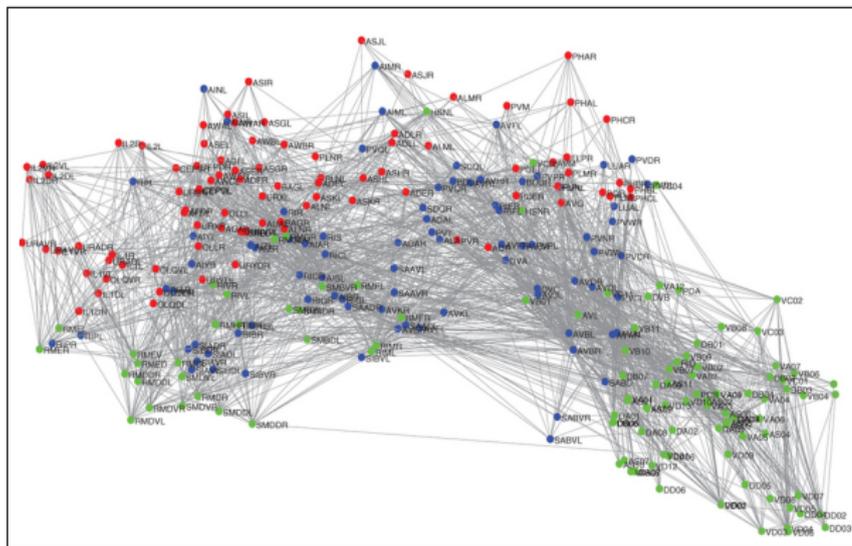
Bullmore and Bassett, *Annu. Rev. Clin. Psychol.* 2011, 7:113–40

## Quelques exemples de graphes



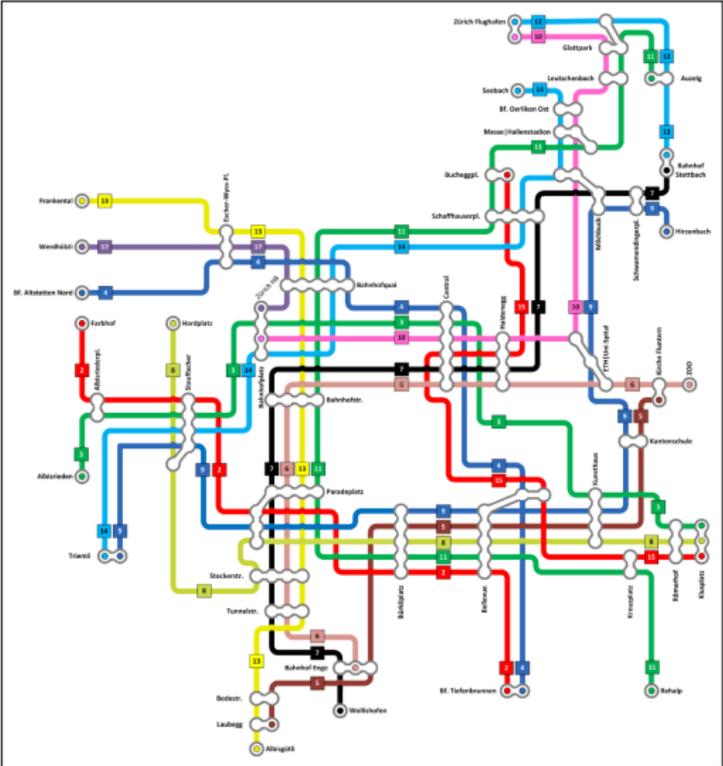
Le système nerveux de *Caenorhabditis Elegans* (302 neurones, environ 8000 synapses), d'après White, Southgate, Thomson, Brenner (1986), corrigé et représenté par Varshney, Chen, Paniagua, Hall, Chklovskii (2011)

# Quelques exemples de graphes



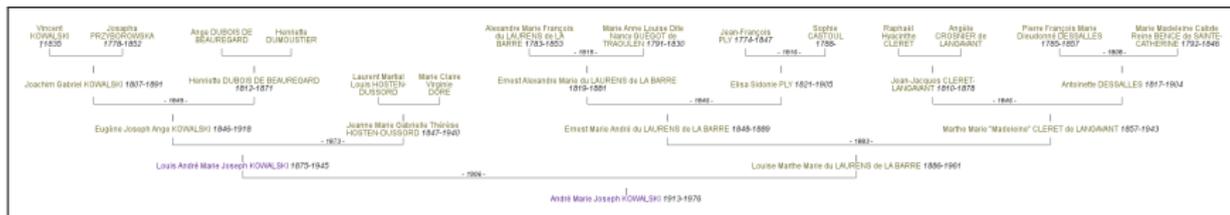
Le système nerveux de *Caenorhabditis Elegans* (302 neurones, environ 8000 synapses), d'après White, Southgate, Thomson, Brenner (1986), corrigé et représenté par Varshney, Chen, Paniagua, Hall, Chklovskii (2011)

# Quelques exemples de graphes



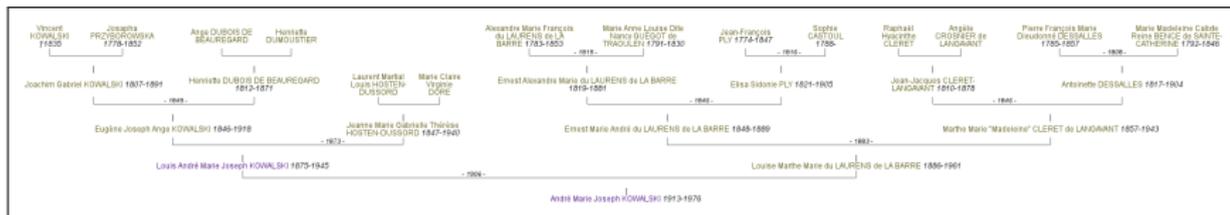
Mateusch, CC Attribution Share-Alike 3.0

# Quelques exemples de graphes

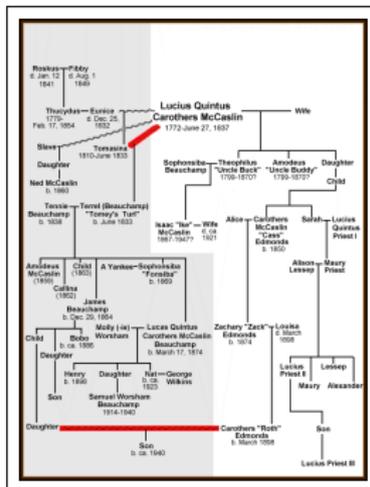


Une famille normale

# Quelques exemples de graphes

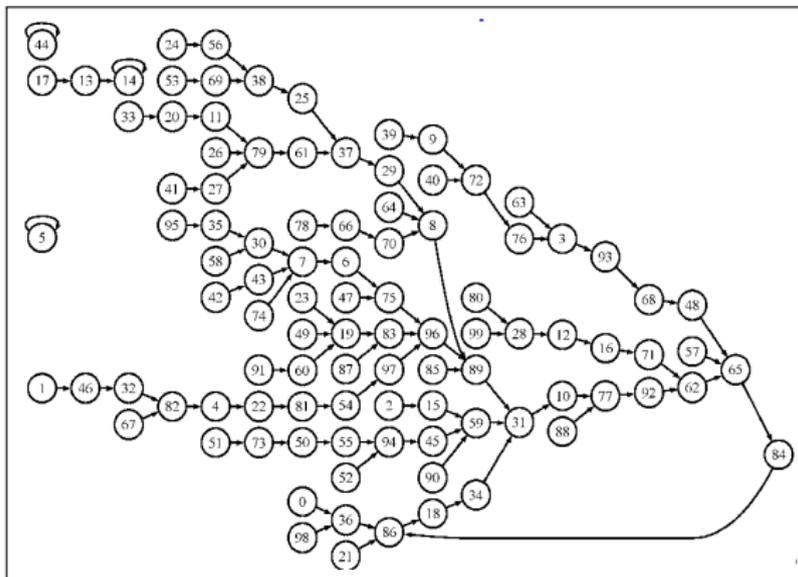


## Une famille normale



Généalogie des McCaslin dans « Go Down, Moses » (W. Faulkner); Source : J. Padgett

## Quelques exemples de graphes



Source : A. Shamir, « Random graphs in cryptography »

# Quelques exemples de graphes

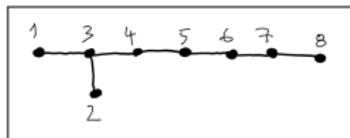
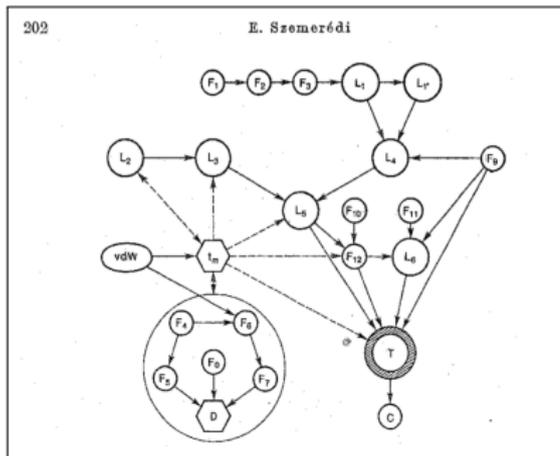
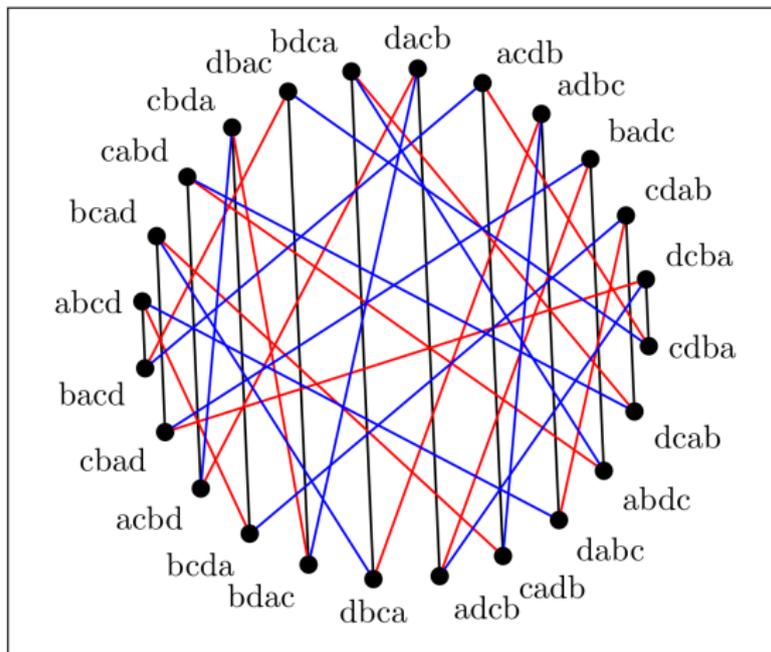


Diagramme de Dynkin de type  $E_8$



Source : E. Szemerédi, « On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progression », Acta Arit. 1973

## Quelques exemples de graphes



Un graphe de Cayley

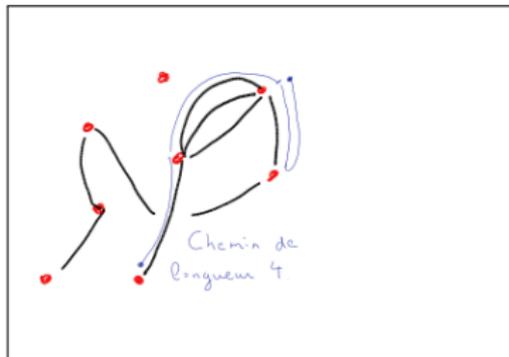
## Navigation

On s'intéresse à la manière dont les sommets d'un graphe peuvent communiquer.

## Navigation

On s'intéresse à la manière dont les sommets d'un graphe peuvent communiquer.

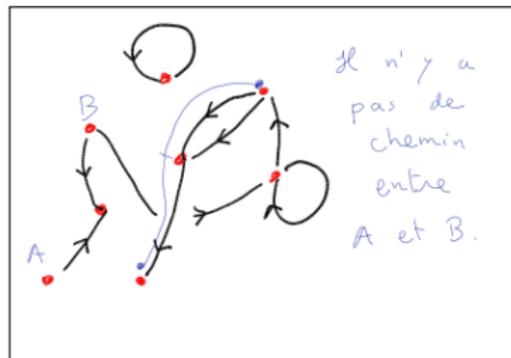
Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues.



## Navigation

On s'intéresse à la manière dont les sommets d'un graphe peuvent communiquer.

Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues. Si les arêtes sont orientées, il faut en tenir compte.

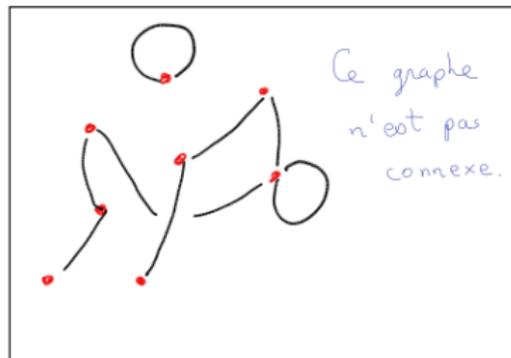




## Navigation

On s'intéresse à la manière dont les sommets d'un graphe peuvent communiquer.

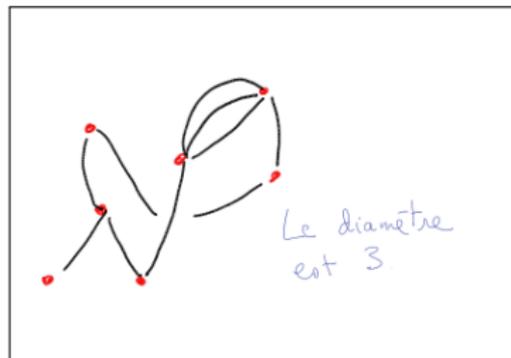
Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues. Si les arêtes sont orientées, il faut en tenir compte. La *distance* entre deux sommets est la longueur du plus petit chemin qui les relie, s'il en existe. Un graphe est *connexe* s'il existe au moins un chemin entre n'importe quelle paire de sommets.



## Navigation

On s'intéresse à la manière dont les sommets d'un graphe peuvent communiquer.

Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues. Si les arêtes sont orientées, il faut en tenir compte. La *distance* entre deux sommets est la longueur du plus petit chemin qui les relie, s'il en existe. Un graphe est *connexe* s'il existe au moins un chemin entre n'importe quelle paire de sommets. Le *diamètre* est alors la plus grande distance entre deux sommets du graphe.



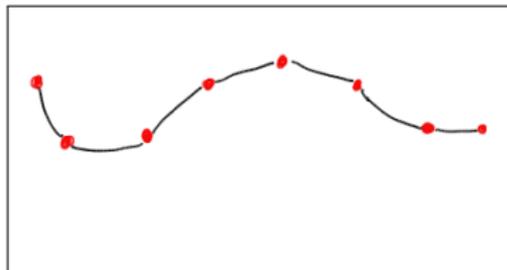
## Navigation efficace

Dans les applications discutées ici, on souhaite avoir des graphes dont le diamètre est *petit* relativement au nombre de sommets.

## Navigation efficace

Dans les applications discutées ici, on souhaite avoir des graphes dont le diamètre est *petit* relativement au nombre de sommets.

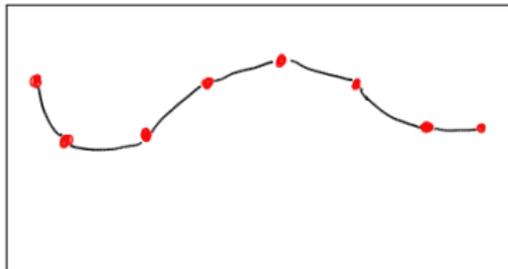
**Exemple 1.** Dans une structure de donnée informatique, on place des objets (fichiers, etc) de manière linéaire (penser à une cassette audio). Le diamètre est grand : il est proportionnel au nombre de sommets.



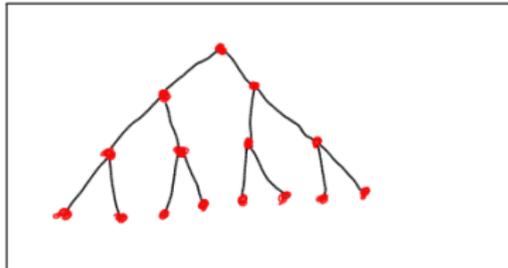
## Navigation efficace

Dans les applications discutées ici, on souhaite avoir des graphes dont le diamètre est *petit* relativement au nombre de sommets.

**Exemple 1.** Dans une structure de donnée informatique, on place des objets (fichiers, etc) de manière linéaire (penser à une cassette audio). Le diamètre est grand : il est proportionnel au nombre de sommets.

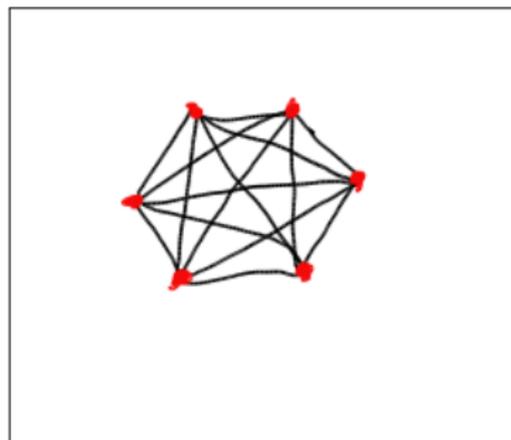


**Exemple 2.** Si on peut placer ces objets sous forme arborescente, le diamètre est bien plus petit : il est proportionnel au logarithme du nombre de sommets.



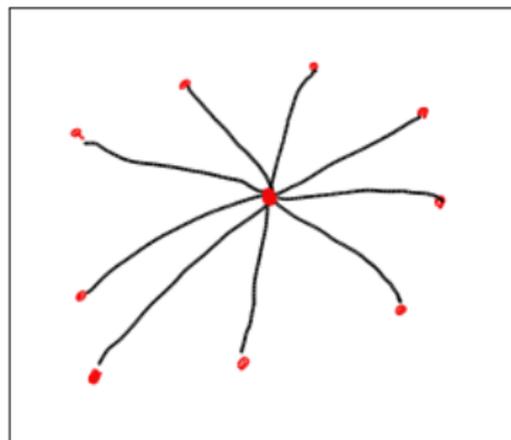
## Le coût des arêtes

Le diamètre peut-être très petit, si l'on a le droit de placer beaucoup d'arêtes, comme dans un *graphe complet*.



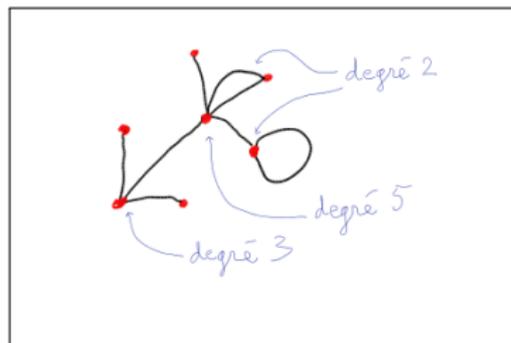
## Le coût des arêtes

Le diamètre peut-être très petit, si l'on a le droit de placer beaucoup d'arêtes, comme dans un *graphe complet*. Mais en pratique, on n'a souvent pas forcément le choix du graphe qui nous intéresse, ou bien le « coût » des arêtes oblige à en limiter le nombre.



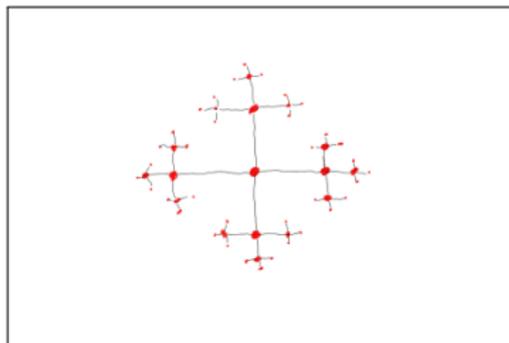
## Graphes « pas trop hérissés »

Le *degré* d'un graphe (non-orienté) en un sommet est le nombre d'arêtes dont c'est une extrémité.



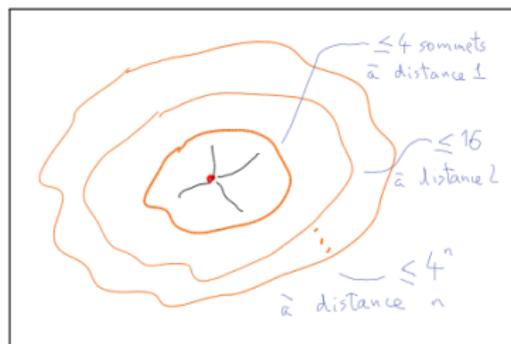
## Graphes « pas trop hérissés »

Le *degré* d'un graphe (non-orienté) en un sommet est le nombre d'arêtes dont c'est une extrémité. Une manière utile de contrôler le nombre d'arêtes pour un « gros » graphe est de forcer le degré d'être petit en chaque sommet, par exemple d'avoir le même degré égal à 4 en chaque sommet (*graphe 4-régulier*).



## Graphes « pas trop hérissés »

Le *degré* d'un graphe (non-orienté) en un sommet est le nombre d'arêtes dont c'est une extrémité. Une manière utile de contrôler le nombre d'arêtes pour un « gros » graphe est de forcer le degré d'être petit en chaque sommet, par exemple d'avoir le même degré égal à 4 en chaque sommet (*graphe 4-régulier*). Le diamètre d'un tel graphe (connexe) est *au moins*  $\log N / \log 4$ , où  $N$  est le nombre de sommets.



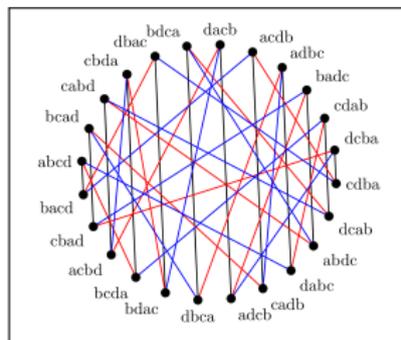
## Exemple : mélanger les cartes

Soit  $n \geq 1$  un entier, par exemple  $n = 52$ . On définit un graphe non-orienté avec :

## Exemple : mélanger les cartes

Soit  $n \geq 1$  un entier, par exemple  $n = 52$ . On définit un graphe non-orienté avec :

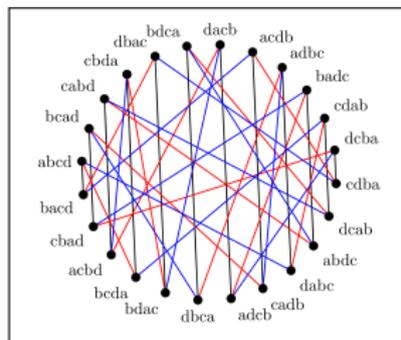
- ▶ Comme sommets, toutes les positions d'un jeu de  $n$  cartes (donc  $n!$  sommets ;  $52! \approx 10^{67.9}$ );



## Exemple : mélanger les cartes

Soit  $n \geq 1$  un entier, par exemple  $n = 52$ . On définit un graphe non-orienté avec :

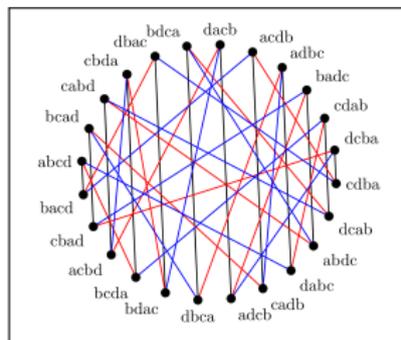
- ▶ Comme sommets, toutes les positions d'un jeu de  $n$  cartes (donc  $n!$  sommets ;  $52! \approx 10^{67.9}$ );
- ▶ Chaque position est reliée par une arête à celles obtenues en :
  1. échangeant la première et la seconde carte ;
  2. mettant la première carte en dernière position ;
  3. plaçant la dernière carte en première position.



## Exemple : mélanger les cartes

Soit  $n \geq 1$  un entier, par exemple  $n = 52$ . On définit un graphe non-orienté avec :

- ▶ Comme sommets, toutes les positions d'un jeu de  $n$  cartes (donc  $n!$  sommets ;  $52! \approx 10^{67.9}$ );
- ▶ Chaque position est reliée par une arête à celles obtenues en :
  1. échangeant la première et la seconde carte ;
  2. mettant la première carte en dernière position ;
  3. plaçant la dernière carte en première position.



### Exercices.

- (1) Ce graphe est connexe.
- (2) Son diamètre est d'ordre de grandeur  $n^2$ .

*The Annals of Applied Probability*  
2013, Vol. 23, No. 4, 1692–1720  
DOI: 10.1214/12-AAP884  
© Institute of Mathematical Statistics, 2013

## ANALYSIS OF CASINO SHELF SHUFFLING MACHINES

BY PERSI DIACONIS<sup>1</sup>, JASON FULMAN<sup>2</sup> AND SUSAN HOLMES<sup>3</sup>

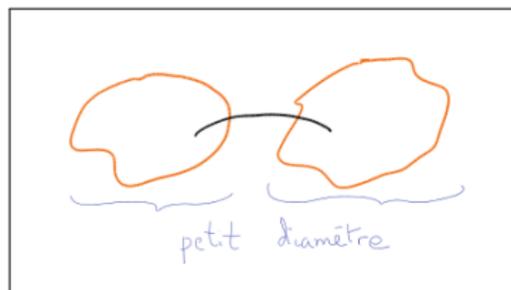
*Stanford University, University of Southern California and Stanford University*

Many casinos routinely use mechanical card shuffling machines. We were asked to evaluate a new product, a shelf shuffler. This leads to new probability, new combinatorics and to some practical advice which was adopted by the manufacturer. The interplay between theory, computing, and real-world application is developed.

**1. Introduction.** We were contacted by a manufacturer of casino equipment to evaluate a new design for a casino card-shuffling machine. The machine, already built, was a sophisticated “shelf shuffler” consisting of an opaque box containing ten shelves. A deck of cards is dropped into the top of the box. An internal elevator moves the deck up and down within the box. Cards are sequentially dealt from the bottom of the deck onto the shelves; shelves are chosen uniformly at random at the command of a random number generator. Each card is randomly placed above or below previous cards on the shelf with probability  $1/2$ . At the end, each shelf contains about  $1/10$  of the deck. The ten piles are now assembled into one pile, in random order. The manufacturer wanted to know if one pass through the machine would yield a well-shuffled deck.

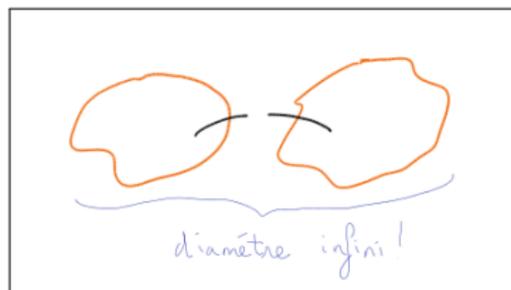
## Constante de Cheeger

Parfois, il ne suffit pas d'avoir un graphe avec un petit diamètre,



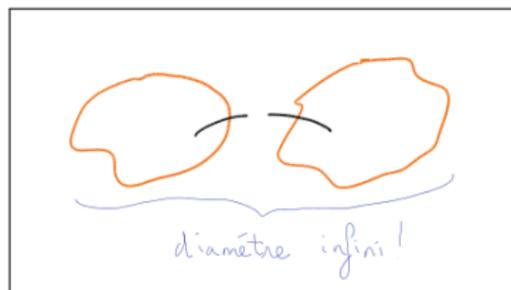
## Constante de Cheeger

Parfois, il ne suffit pas d'avoir un graphe avec un petit diamètre, s'il suffit d'enlever quelques arêtes pour couper le graphe en plusieurs morceaux.



## Constante de Cheeger

Parfois, il ne suffit pas d'avoir un graphe avec un petit diamètre, s'il suffit d'enlever quelques arêtes pour couper le graphe en plusieurs morceaux.



On mesure la « robustesse » d'un graphe non-orienté dont l'ensemble des sommets est  $S \neq \emptyset$  par sa *constante de Cheeger* :

$$h = \min_{\substack{X \subset S \\ 1 \leq |X| \leq |S|/2}} \frac{|\partial X|}{|X|},$$

où  $\partial X$  est l'ensemble des arêtes dont une extrémité exactement est dans  $X$  (et  $|A|$  est le nombre d'éléments d'un ensemble fini  $A$ ).

## Propriétés

**Propriétés.** On a posé

$$h = \min_{\substack{X \subset S \\ 1 \leq |X| \leq |S|/2}} \frac{|\partial X|}{|X|} \geq 0, \quad \text{si } |S| \geq 2.$$

## Propriétés

**Propriétés.** On a posé

$$h = \min_{\substack{X \subset S \\ 1 \leq |X| \leq |S|/2}} \frac{|\partial X|}{|X|} \geq 0, \quad \text{si } |S| \geq 2.$$

(1) La constante de Cheeger est  $> 0$  si et seulement si le graphe est connexe.

## Propriétés

**Propriétés.** On a posé

$$h = \min_{\substack{X \subset S \\ 1 \leq |X| \leq |S|/2}} \frac{|\partial X|}{|X|} \geq 0, \quad \text{si } |S| \geq 2.$$

- (1) La constante de Cheeger est  $> 0$  si et seulement si le graphe est connexe.
- (2) Il n'est pas possible d'isoler un sous-ensemble  $X$  de sommets en enlevant moins de  $h \min(|X|, |S - X|)$  arêtes.

## Propriétés

**Propriétés.** On a posé

$$h = \min_{\substack{X \subset S \\ 1 \leq |X| \leq |S|/2}} \frac{|\partial X|}{|X|} \geq 0, \quad \text{si } |S| \geq 2.$$

- (1) La constante de Cheeger est  $> 0$  si et seulement si le graphe est connexe.
- (2) Il n'est pas possible d'isoler un sous-ensemble  $X$  de sommets en enlevant moins de  $h \min(|X|, |S - X|)$  arêtes.
- (3) Si le degré en chaque sommet est au plus  $k$ , le diamètre du graphe est majoré approximativement par

$$\frac{\log(|S|)}{\log(1 + h/k)}$$

## Propriétés

**Propriétés.** On a posé

$$h = \min_{\substack{X \subset S \\ 1 \leq |X| \leq |S|/2}} \frac{|\partial X|}{|X|} \geq 0, \quad \text{si } |S| \geq 2.$$

- (1) La constante de Cheeger est  $> 0$  si et seulement si le graphe est connexe.
- (2) Il n'est pas possible d'isoler un sous-ensemble  $X$  de sommets en enlevant moins de  $h \min(|X|, |S - X|)$  arêtes.
- (3) Si le degré en chaque sommet est au plus  $k$ , le diamètre du graphe est majoré approximativement par

$$\frac{\log(|S|)}{\log(1 + h/k)}$$

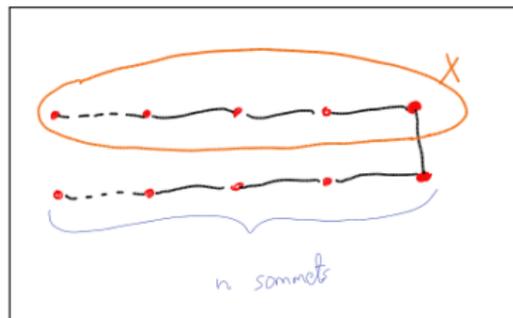
car le nombre de sommets à distance  $d$  d'une origine fixée est au moins

$$\min\left(\frac{|S|}{2}, \left(1 + \frac{h}{k}\right)^d\right).$$

## Exemples

### Exemples.

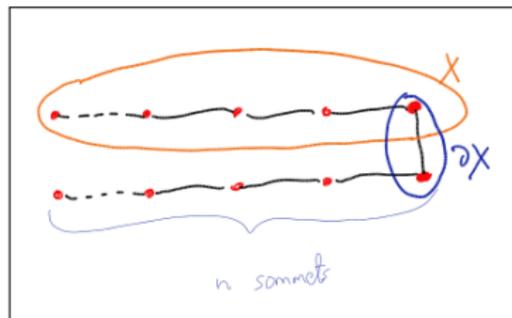
(1) Un chemin de longueur  $2n$  ;



## Exemples

### Exemples.

- (1) Un chemin de longueur  $2n$  ;  
 $h \leq 1/n$ .



## Exemples

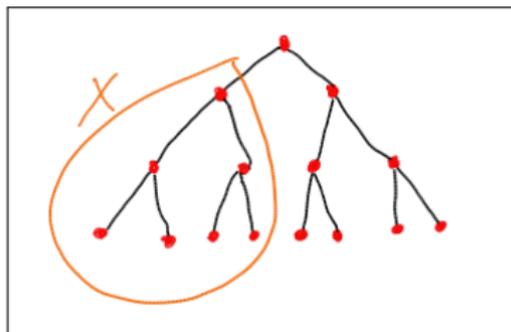
### Exemples.

(1) Un chemin de longueur  $2n$  ;

$h \leq 1/n$ .

(2) Un arbre binaire de hauteur

$k \geq 2$  ;



## Exemples

### Exemples.

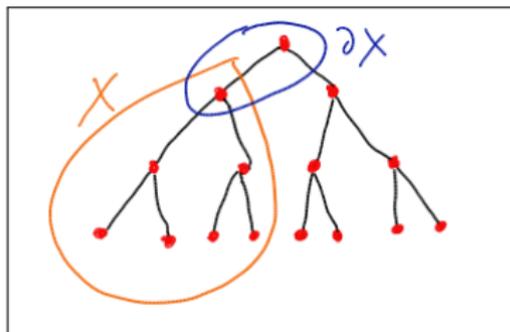
(1) Un chemin de longueur  $2n$  ;

$$h \leq 1/n.$$

(2) Un arbre binaire de hauteur

$k \geq 2$  ; il y a  $2^k - 1$  sommets et

$$h \leq \frac{1}{2^{k-1} - 1}.$$



# Exemples

## Exemples.

(1) Un chemin de longueur  $2n$  ;

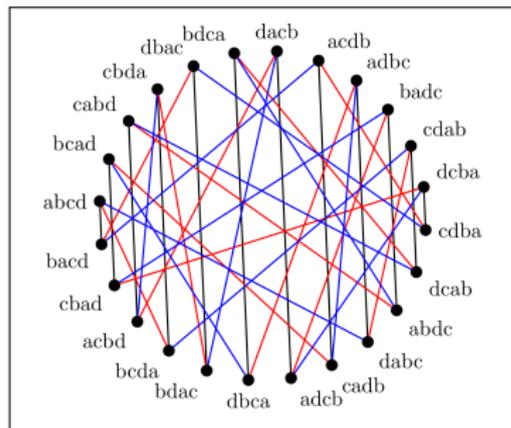
$$h \leq 1/n.$$

(2) Un arbre binaire de hauteur

$k \geq 2$  ; il y a  $2^k - 1$  sommets et

$$h \leq \frac{1}{2^{k-1} - 1}.$$

(3) Pour le graphe du mélange de cartes, on peut montrer que  $h \leq c/n$  pour une certaine constante  $c > 0$ .



## Exemples

### Exemples.

(1) Un chemin de longueur  $2n$  ;

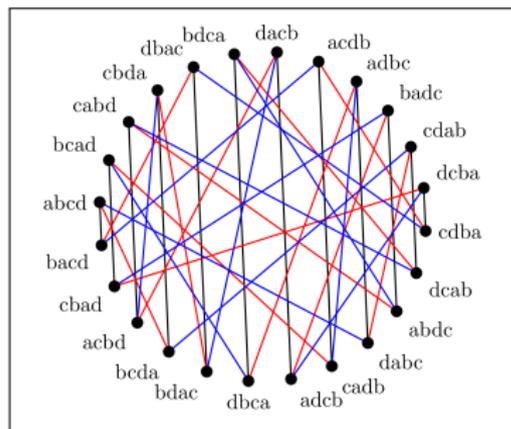
$$h \leq 1/n.$$

(2) Un arbre binaire de hauteur

$k \geq 2$  ; il y a  $2^k - 1$  sommets et

$$h \leq \frac{1}{2^{k-1} - 1}.$$

(3) Pour le graphe du mélange de cartes, on peut montrer que  $h \leq c/n$  pour une certaine constante  $c > 0$ .



On note que dans tout ces cas  $h$  tend vers 0 quand le nombre de sommet tend vers l'infini.

## Graphes expandeurs

**Définition.** Une suite de graphes (non-orientés, finis)  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est une *famille de graphes expandeurs* si

## Graphes expandeurs

**Définition.** Une suite de graphes (non-orientés, finis)  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est une *famille de graphes expandeurs* si

- ▶ Le nombre de sommets de  $\Gamma_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini ;

## Graphes expandeurs

**Définition.** Une suite de graphes (non-orientés, finis)  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est une *famille de graphes expandeurs* si

- ▶ Le nombre de sommets de  $\Gamma_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini ;
- ▶ Il existe  $k \geq 1$  tel que le degré de *chaque* sommet de *chaque* graphe est au plus  $k$  (les graphes ne sont pas trop denses) ;

## Graphes expandeurs

**Définition.** Une suite de graphes (non-orientés, finis)  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est une *famille de graphes expandeurs* si

- ▶ Le nombre de sommets de  $\Gamma_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini ;
- ▶ Il existe  $k \geq 1$  tel que le degré de *chaque* sommet de *chaque* graphe est au plus  $k$  (les graphes ne sont pas trop denses) ;
- ▶ Il existe  $\delta > 0$  tel que  $h(\Gamma_n) \geq \delta$  pour tout  $n$  (la constante de Cheeger est minorée uniformément dans la suite).

## Graphes expandeurs

**Définition.** Une suite de graphes (non-orientés, finis)  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est une *famille de graphes expandeurs* si

- ▶ Le nombre de sommets de  $\Gamma_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini ;
- ▶ Il existe  $k \geq 1$  tel que le degré de *chaque* sommet de *chaque* graphe est au plus  $k$  (les graphes ne sont pas trop denses) ;
- ▶ Il existe  $\delta > 0$  tel que  $h(\Gamma_n) \geq \delta$  pour tout  $n$  (la constante de Cheeger est minorée uniformément dans la suite).

De tels graphes sont simultanément économiques et extrêmement connectés.

## Graphes expandeurs

**Définition.** Une suite de graphes (non-orientés, finis)  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est une *famille de graphes expandeurs* si

- ▶ Le nombre de sommets de  $\Gamma_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini ;
- ▶ Il existe  $k \geq 1$  tel que le degré de *chaque* sommet de *chaque* graphe est au plus  $k$  (les graphes ne sont pas trop denses) ;
- ▶ Il existe  $\delta > 0$  tel que  $h(\Gamma_n) \geq \delta$  pour tout  $n$  (la constante de Cheeger est minorée uniformément dans la suite).

De tels graphes sont simultanément économiques et extrêmement connectés. En particulier, le diamètre de  $\Gamma_n$  croît lentement : il est  $\leq \kappa \log(|S_n|)$  pour une certaine constante  $\kappa > 0$ , indépendante de  $n$ .

## Graphes expandeurs

**Définition.** Une suite de graphes (non-orientés, finis)  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  est une *famille de graphes expandeurs* si

- ▶ Le nombre de sommets de  $\Gamma_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini ;
- ▶ Il existe  $k \geq 1$  tel que le degré de *chaque* sommet de *chaque* graphe est au plus  $k$  (les graphes ne sont pas trop denses) ;
- ▶ Il existe  $\delta > 0$  tel que  $h(\Gamma_n) \geq \delta$  pour tout  $n$  (la constante de Cheeger est minorée uniformément dans la suite).

De tels graphes sont simultanément économiques et extrêmement connectés. En particulier, le diamètre de  $\Gamma_n$  croît lentement : il est  $\leq \kappa \log(|S_n|)$  pour une certaine constante  $\kappa > 0$ , indépendante de  $n$ .

Mais existe-t-il des graphes expandeurs ? Où s'agit-il d'une vue de l'esprit ?

## Historique

- ▶ **1973**, L. A. Bassalygo et M.S. Pinsker, « On complexity of optimal non-blocking system without rearrangement » (en Russe; Problemy Peredaci Informacii 9, 84–87).

## Historique

- ▶ **1973**, L. A. Bassalygo et M.S. Pinsker, « On complexity of optimal non-blocking system without rearrangement » (en Russe; Problemy Peredaci Informacii 9, 84–87).
- ▶ **1973**, M. S. Pinsker, « On the complexity of a concentrator », 7th International Teletraffic Conference, Stockholm, 318:1–4.

## Historique

- ▶ **1973**, L. A. Bassalygo et M.S. Pinsker, « On complexity of optimal non-blocking system without rearrangement » (en Russe; Problemy Peredaci Informacii 9, 84–87).
- ▶ **1973**, M. S. Pinsker, « On the complexity of a concentrator », 7th International Teletraffic Conference, Stockholm, 318:1–4.
- ▶ **1973**, G.A. Margulis, « Explicit constructions of expanders » (en Russe, Problemy Peredaci Informacii 9, 71–80).

## Historique

- ▶ †**1967**, Ya. M. Barzdin et A.N. Kolmogorov, « On the realization of networks in three-dimensional space » (en Russe; Problemy Kibernetiki 19, 261–268).
- ▶ **1973**, L. A. Bassalygo et M.S. Pinsker, « On complexity of optimal non-blocking system without rearrangement » (en Russe; Problemy Peredaci Informacii 9, 84–87).
- ▶ **1973**, M. S. Pinsker, « On the complexity of a concentrator », 7th International Teletraffic Conference, Stockholm, 318:1–4.
- ▶ **1973**, G.A. Margulis, « Explicit constructions of expanders » (en Russe, Problemy Peredaci Informacii 9, 71–80).

†Noté par L. Guth (2010) ; voir L. Guth et M. Gromov, « Generalizations of the Kolmogorov-Barzdin embedding estimates », 2011.

## ON THE REALIZATION OF NETWORKS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE\*<sup>1</sup>

*(Jointly with Ya. M. Barzdin)*

By a  $(d, n)$ -network we shall mean a oriented graph with  $n$  numbered vertices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  and  $dn$  marked edges such that precisely  $d$  edges are incident to each vertex and one of them is marked by the weight  $x_1$ , another by the weight  $x_2$ , etc., and finally the last one by the weight  $x_d$ .

Examples of such networks are logical networks and neuron networks. It is precisely for this reason that the question of constructing such networks in ordinary three-dimensional space under the condition that the vertices are balls while the edges are tubes of a certain positive diameter is of importance.

Barzdin et Kolmogorov étudient le plus petit volume nécessaire pour réaliser physiquement dans l'espace un graphe fini avec  $n$  sommets, de degré au plus 6 par exemple,

## ON THE REALIZATION OF NETWORKS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE\*<sup>1</sup>

*(Jointly with Ya. M. Barzdin)*

By a  $(d, n)$ -network we shall mean a oriented graph with  $n$  numbered vertices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  and  $d n$  marked edges such that precisely  $d$  edges are incident to each vertex and one of them is marked by the weight  $x_1$ , another by the weight  $x_2$ , etc., and finally the last one by the weight  $x_d$ .

Examples of such networks are logical networks and neuron networks. It is precisely for this reason that the question of constructing such networks in ordinary three-dimensional space under the condition that the vertices are balls while the edges are tubes of a certain positive diameter is of importance.

Barzdin et Kolmogorov étudient le plus petit volume nécessaire pour réaliser physiquement dans l'espace un graphe fini avec  $n$  sommets, de degré au plus 6 par exemple, si l'on représente les sommets par des sphères disjointes de rayon 1, et les arêtes par des tubes flexibles (presque) disjointes de rayon 1.

## ON THE REALIZATION OF NETWORKS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE\*<sup>1</sup>

*(Jointly with Ya. M. Barzdin)*

By a  $(d, n)$ -network we shall mean a oriented graph with  $n$  numbered vertices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  and  $d$  marked edges such that precisely  $d$  edges are incident to each vertex and one of them is marked by the weight  $x_1$ , another by the weight  $x_2$ , etc., and finally the last one by the weight  $x_d$ .

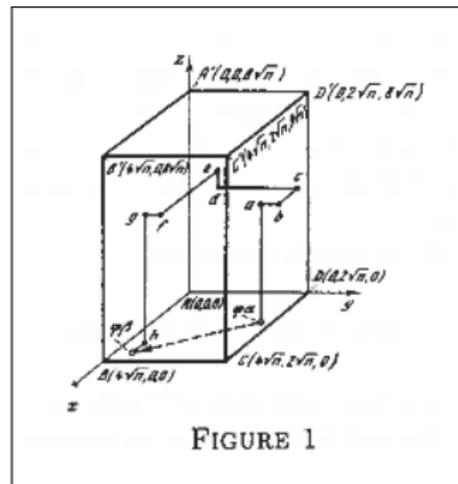
Examples of such networks are logical networks and neuron networks. It is precisely for this reason that the question of constructing such networks in ordinary three-dimensional space under the condition that the vertices are balls while the edges are tubes of a certain positive diameter is of importance.

Barzdin et Kolmogorov étudient le plus petit volume nécessaire pour réaliser physiquement dans l'espace un graphe fini avec  $n$  sommets, de degré au plus 6 par exemple, si l'on représente les sommets par des sphères disjointes de rayon 1, et les arêtes par des tubes flexibles (presque) disjointes de rayon 1.

**Remarque.** Il n'est pas possible de représenter n'importe quel graphe dans le plan, mais il est facile de se convaincre que c'est possible dans l'espace.

# Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

**Théorème 1.** Il est possible de le faire dans une sphère de rayon  $\sqrt{n}$ .



## Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

**Théorème 1.** Il est possible de le faire dans une sphère de rayon  $\sqrt{n}$ .

**Théorème 2.** Pour une famille d'expansions, il existe  $\delta' > 0$  tel qu'il ne soit *pas* possible de le faire dans une sphère de rayon  $\leq \delta' \sqrt{n}$ .

## Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

**Théorème 1.** Il est possible de le faire dans une sphère de rayon  $\sqrt{n}$ .

**Théorème 2.** Pour une famille d'expanses, il existe  $\delta' > 0$  tel qu'il ne soit *pas* possible de le faire dans une sphère de rayon  $\leq \delta' \sqrt{n}$ .

**Théorème 3.** « Presque tout » graphe est expanseur.

## Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

**Théorème 1.** Il est possible de le faire dans une sphère de rayon  $\sqrt{n}$ .

**Théorème 2.** Pour une famille d'expandeurs, il existe  $\delta' > 0$  tel qu'il ne soit *pas* possible de le faire dans une sphère de rayon  $\leq \delta' \sqrt{n}$ .

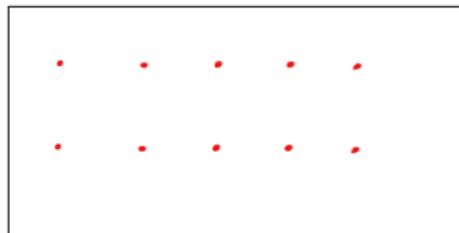
**Théorème 3.** « Presque tout » graphe est expandeur.

Que veut dire ce théorème 3 ?

## Presque tout graphe est expandeur

Considérons un entier  $n \geq 1$  « grand ». On prend comme sommets

$$S_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0), (1, 1), \dots, (n, 1)\}.$$

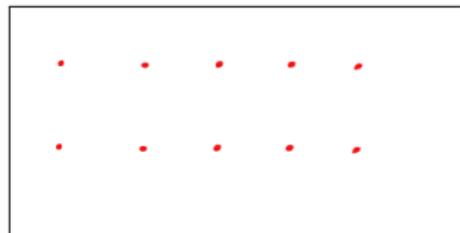


## Presque tout graphe est expenseur

Considérons un entier  $n \geq 1$  « grand ». On prend comme sommets

$$S_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0), (1, 1), \dots, (n, 1)\}.$$

Choisissons quatre permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .



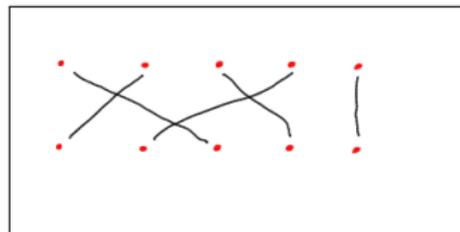
	1	2	3	4	5
$\sigma_1$	3	1	4	2	5
$\sigma_2$	1	4	3	5	2
$\sigma_3$	5	1	4	2	3
$\sigma_4$	1	2	5	3	4

## Presque tout graphe est expandeur

Considérons un entier  $n \geq 1$  « grand ». On prend comme sommets

$$S_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0), (1, 1), \dots, (n, 1)\}.$$

Choisissons quatre permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .  
On construit un graphe  $\Gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$  en joignant par des arêtes  $(i, 0)$  à  $(\sigma_1(i), 1)$ ,



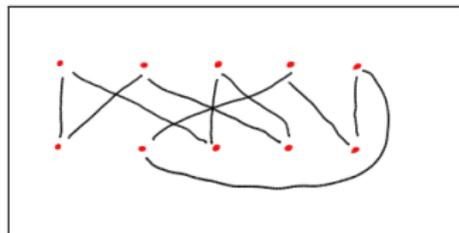
	1	2	3	4	5
$\sigma_1$	3	1	4	2	5
$\sigma_2$	1	4	3	5	2
$\sigma_3$	5	1	4	2	3
$\sigma_4$	1	2	5	3	4

## Presque tout graphe est expandeur

Considérons un entier  $n \geq 1$  « grand ». On prend comme sommets

$$S_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0), (1, 1), \dots, (n, 1)\}.$$

Choisissons quatre permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .  
On construit un graphe  $\Gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$  en joignant par des arêtes  $(i, 0)$  à  $(\sigma_1(i), 1), (\sigma_2(i), 1),$



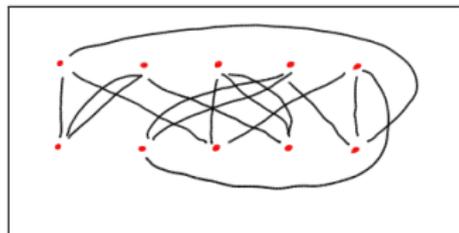
	1	2	3	4	5
$\sigma_1$	3	1	4	2	5
$\sigma_2$	1	4	3	5	2
$\sigma_3$	5	1	4	2	3
$\sigma_4$	1	2	5	3	4

## Presque tout graphe est expandeur

Considérons un entier  $n \geq 1$  « grand ». On prend comme sommets

$$S_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0), (1, 1), \dots, (n, 1)\}.$$

Choisissons quatre permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .  
On construit un graphe  $\Gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$  en joignant par des arêtes  $(i, 0)$  à  $(\sigma_1(i), 1), (\sigma_2(i), 1), (\sigma_3(i), 1),$



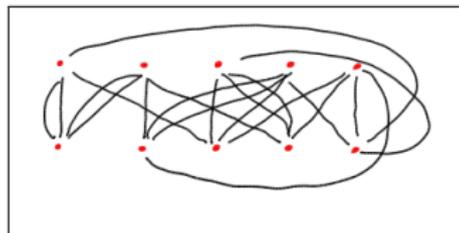
	1	2	3	4	5
$\sigma_1$	3	1	4	2	5
$\sigma_2$	1	4	3	5	2
$\sigma_3$	5	1	4	2	3
$\sigma_4$	1	2	5	3	4

## Presque tout graphe est expandeur

Considérons un entier  $n \geq 1$  « grand ». On prend comme sommets

$$S_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0), (1, 1), \dots, (n, 1)\}.$$

Choisissons quatre permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .  
On construit un graphe  $\Gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$  en joignant par des arêtes  $(i, 0)$  à  $(\sigma_1(i), 1)$ ,  $(\sigma_2(i), 1)$ ,  $(\sigma_3(i), 1)$ , et  $(\sigma_4(i), 1)$ .



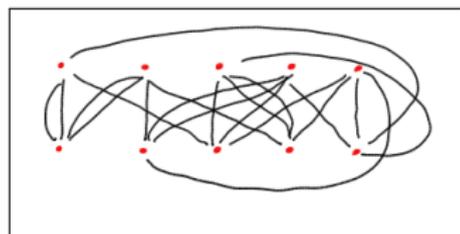
	1	2	3	4	5
$\sigma_1$	3	1	4	2	5
$\sigma_2$	1	4	3	5	2
$\sigma_3$	5	1	4	2	3
$\sigma_4$	1	2	5	3	4

## Presque tout graphe est expandeur

Considérons un entier  $n \geq 1$  « grand ». On prend comme sommets

$$S_n = \{(1, 0), \dots, (n, 0), (1, 1), \dots, (n, 1)\}.$$

Choisissons quatre permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ . On construit un graphe  $\Gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$  en joignant par des arêtes  $(i, 0)$  à  $(\sigma_1(i), 1)$ ,  $(\sigma_2(i), 1)$ ,  $(\sigma_3(i), 1)$ , et  $(\sigma_4(i), 1)$ .



	1	2	3	4	5
$\sigma_1$	3	1	4	2	5
$\sigma_2$	1	4	3	5	2
$\sigma_3$	5	1	4	2	3
$\sigma_4$	1	2	5	3	4

Le théorème signifie alors : il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n!)^4} |\{(\sigma_1, \dots, \sigma_4) \mid h(\Gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_4)) \geq \delta\}| = 1.$$

## La motivation de Barzdin et Kolmogorov

Barzdin indique dans les notes des œuvres sélectionnées de Kolmogorov :

*Malheureusement, je ne me souviens pas à quelle occasion Andrei Nikolayevich a mentionné ces résultats pour la première fois (je n'étais pas présent). Je sais seulement que le sujet était l'explication du fait que le cerveau (...) est constitué de sorte que la plupart de la masse est occupée par les fibres nerveuses (axons), alors que les neurones sont placés seulement sur la surface. La construction du Théorème 1 confirme précisément l'optimalité (au sens du volume) d'une telle disposition du réseau de neurones.*

## La motivation de Barzdin et Kolmogorov

Barzdin indique dans les notes des œuvres sélectionnées de Kolmogorov :

*Malheureusement, je ne me souviens pas à quelle occasion Andrei Nikolayevich a mentionné ces résultats pour la première fois (je n'étais pas présent). Je sais seulement que le sujet était l'explication du fait que le cerveau (...) est constitué de sorte que la plupart de la masse est occupée par les fibres nerveuses (axons), alors que les neurones sont placés seulement sur la surface. La construction du Théorème 1 confirme précisément l'optimalité (au sens du volume) d'une telle disposition du réseau de neurones.*

Valiant (1994–2005) a proposé des algorithmes permettant de modéliser de manière réaliste certaines opérations qui doivent être effectuées par un cerveau ; il observe que ces méthodes requièrent une certaine expansion du réseau de neurone :

*The property of expansion (...) is an archetypal such property. (This property, widely studied in computer science, was apparently first discussed in a neuroscience setting [BK].) The vicinal algorithms for the four tasks considered here need some such connectivity properties. In each case random graphs with appropriate realistic parameters have it, but pure randomness is not necessarily essential.*

## Bassalygo et Pinski

Bassalygo et Pinski montrent que l'existence de certains types de réseaux de communication *découlerait* de l'existence d'expandeurs.

Bassalygo et Pinsker montrent que l'existence de certains types de réseaux de communication *découlerait* de l'existence d'expandeurs. Pinsker, pour un problème similaire (« superconcentrateurs »), introduit la terminologie « expanding graph ». Comme Barzdin et Kolmogorov, il montre l'existence de tels graphes par une méthode probabiliste.

### APPENDIX

#### Proof of Lemma 1.

An auxiliary concept is introduced. An elementary graph  $f$  with  $n$  inputs and  $r$  outputs is called an  $m$  expanding graph if any set of  $k \leq m$  inputs is connected by edges to at least  $k$  outputs.

Bassalygo et Pinsker montrent que l'existence de certains types de réseaux de communication *découlerait* de l'existence d'expandeurs. Pinsker, pour un problème similaire (« superconcentrateurs »), introduit la terminologie « expanding graph ». Comme Barzdin et Kolmogorov, il montre l'existence de tels graphes par une méthode probabiliste. Dans une note finale, il remarque que Margulis a obtenu une construction déterministe.

### APPENDIX

#### Proof of Lemma 1.

An auxiliary concept is introduced. An elementary graph  $f$  with  $n$  inputs and  $r$  outputs is called an  $m$  expanding graph if any set of  $k \leq m$  inputs is connected by edges to at least  $k$  outputs.

**Remark.** There is only one non-constructive part in the proof of the Theorem - the proof of existence of an expanding graph in Lemma 1. Recently, G.A. Margulis [4] has got regular methods for constructing such graphs.

Pourquoi vouloir des constructions explicites ?

Pourquoi vouloir des constructions explicites ?

- ▶ Parce que les applications peuvent le demander (construction de réseaux efficaces par exemple).

Pourquoi vouloir des constructions explicites ?

- ▶ Parce que les applications peuvent le demander (construction de réseaux efficaces par exemple).
- ▶ Pour comprendre la nature de la condition d'expansion...

Pourquoi vouloir des constructions explicites ?

- ▶ Parce que les applications peuvent le demander (construction de réseaux efficaces par exemple).
- ▶ Pour comprendre la nature de la condition d'expansion... En particulier, pour avoir des méthodes permettant de démontrer que des graphes *donnés* sont *expansifs* (ou pas).

## Les graphes de Margulis

Margulis utilise la *Propriété T* de Kazhdan.

## Les graphes de Margulis

Margulis utilise la *Propriété ]T[ de Kazhdan*. Un cas particulier est le suivant :

**Graphes de Margulis.** L'ensemble des sommets est  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  (donc  $n^2$  sommets) ; des arêtes joignent  $(a, b)$  aux sommets

$$(a + b, b), (a - b, b), (a, b + a), (a, b - a), (a + b + 1, b), \\ (a - b + 1, b), (a, b + a + 1), (a, b - a + 1),$$

où les opérations sont effectuées dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

## Les graphes de Margulis

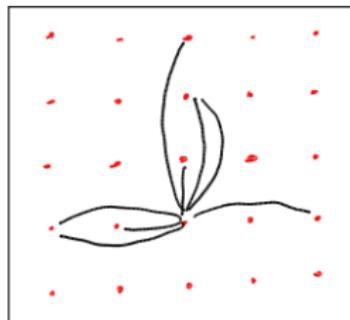
Margulis utilise la *Propriété ]T[ de Kazhdan*. Un cas particulier est le suivant :

**Graphes de Margulis.** L'ensemble des sommets est  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  (donc  $n^2$  sommets) ; des arêtes joignent  $(a, b)$  aux sommets

$$(a + b, b), (a - b, b), (a, b + a), (a, b - a), (a + b + 1, b), \\ (a - b + 1, b), (a, b + a + 1), (a, b - a + 1),$$

où les opérations sont effectuées dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

**Exemple :** pour  $n = 5$  les voisins de  $(2, 3)$  sont  $(0, 3)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ .



## Questions...

- ▶ Comment vérifier numériquement/théoriquement qu'un graphe donné est expanseur ? (Autrement dit, comment minorer sa constante de Cheeger ?)

## Questions...

- ▶ Comment vérifier numériquement/théoriquement qu'un graphe donné est expenseur ? (Autrement dit, comment minorer sa constante de Cheeger ?)

Noter que si un graphe a  $n$  sommets, la définition fait intervenir  $2^{n/2}$  sous-ensembles à tester pour déterminer la constante de Cheeger.

## Questions...

- ▶ Comment vérifier numériquement/théoriquement qu'un graphe donné est expenseur ? (Autrement dit, comment minorer sa constante de Cheeger ?)

Noter que si un graphe a  $n$  sommets, la définition fait intervenir  $2^{n/2}$  sous-ensembles à tester pour déterminer la constante de Cheeger.

- ▶ Y-a-t-il d'autres propriétés et d'autres applications remarquables des graphes expenseurs ?

## Le laplacien combinatoire

Pour un graphe fini non-orienté  $\Gamma$ , dont  $S \neq \emptyset$  est l'ensemble des sommets, on définit  $C(\Gamma)$  comme l'espace vectoriel des fonctions  $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ . Il a dimension égal au nombre de sommets.

## Le laplacien combinatoire

Pour un graphe fini non-orienté  $\Gamma$ , dont  $S \neq \emptyset$  est l'ensemble des sommets, on définit  $C(\Gamma)$  comme l'espace vectoriel des fonctions  $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ . Il a dimension égal au nombre de sommets.

Supposant que le degré en tout sommet est au moins 1, on considère l'opérateur linéaire (« laplacien combinatoire »)

$$\Delta : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$$

tel que

$$(\Delta f)(x) = f(x) - \frac{1}{d(x)} \sum_{y \text{ relié à } x} f(y).$$

## Le laplacien combinatoire

Pour un graphe fini non-orienté  $\Gamma$ , dont  $S \neq \emptyset$  est l'ensemble des sommets, on définit  $C(\Gamma)$  comme l'espace vectoriel des fonctions  $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ . Il a dimension égal au nombre de sommets.

Supposant que le degré en tout sommet est au moins 1, on considère l'opérateur linéaire (« laplacien combinatoire »)

$$\Delta : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$$

tel que

$$(\Delta f)(x) = f(x) - \frac{1}{d(x)} \sum_{y \text{ relié à } x} f(y).$$

Par rapport à la base des fonctions valant 1 en un seul sommet et 0 ailleurs, la matrice de  $\Delta$  est symétrique et réelle. Donc  $\Delta$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Il n'est pas difficile de vérifier qu'elles sont positives.

## Le laplacien combinatoire

Pour un graphe fini non-orienté  $\Gamma$ , dont  $S \neq \emptyset$  est l'ensemble des sommets, on définit  $C(\Gamma)$  comme l'espace vectoriel des fonctions  $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ . Il a dimension égal au nombre de sommets.

Supposant que le degré en tout sommet est au moins 1, on considère l'opérateur linéaire (« laplacien combinatoire »)

$$\Delta : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$$

tel que

$$(\Delta f)(x) = f(x) - \frac{1}{d(x)} \sum_{y \text{ relié à } x} f(y).$$

Par rapport à la base des fonctions valant 1 en un seul sommet et 0 ailleurs, la matrice de  $\Delta$  est symétrique et réelle. Donc  $\Delta$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Il n'est pas difficile de vérifier qu'elles sont positives. La valeur 0 est valeur propre de  $\Delta$  pour la fonction propre  $f$  constante égale à 1.

## Le laplacien combinatoire

Pour un graphe fini non-orienté  $\Gamma$ , dont  $S \neq \emptyset$  est l'ensemble des sommets, on définit  $C(\Gamma)$  comme l'espace vectoriel des fonctions  $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ . Il a dimension égal au nombre de sommets.

Supposant que le degré en tout sommet est au moins 1, on considère l'opérateur linéaire (« laplacien combinatoire »)

$$\Delta : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$$

tel que

$$(\Delta f)(x) = f(x) - \frac{1}{d(x)} \sum_{y \text{ relié à } x} f(y).$$

Par rapport à la base des fonctions valant 1 en un seul sommet et 0 ailleurs, la matrice de  $\Delta$  est symétrique et réelle. Donc  $\Delta$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Il n'est pas difficile de vérifier qu'elles sont positives. La valeur 0 est valeur propre de  $\Delta$  pour la fonction propre  $f$  constante égale à 1. On note

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{|S|-1}$$

les valeurs propres de  $\Delta$  (« spectre du graphe »).

## Interprétation spectrale de l'expansion

**Exercice.** La valeur propre  $\lambda_0 = 0$  est *simple*, autrement dit  $\lambda_1 > 0$ , *si et seulement si*  $\Gamma$  est connexe.

## Interprétation spectrale de l'expansion

**Exercice.** La valeur propre  $\lambda_0 = 0$  est *simple*, autrement dit  $\lambda_1 > 0$ , *si et seulement si*  $\Gamma$  est connexe.

Rappelons que  $h > 0$  caractérise aussi la connexité. Y-a-t-il un lien entre ces deux invariants numériques ?

## Interprétation spectrale de l'expansion

**Exercice.** La valeur propre  $\lambda_0 = 0$  est *simple*, autrement dit  $\lambda_1 > 0$ , *si et seulement si*  $\Gamma$  est connexe.

Rappelons que  $h > 0$  caractérise aussi la connexité. Y-a-t-il un lien entre ces deux invariants numériques ?

**Inégalités (combinatoires) de Buser et Cheeger.** On a

$$\left( \frac{d_-^2}{2d_+} \right) \lambda_1 \leq h \leq d_+ \sqrt{2\lambda_1}$$

où  $d_-$  et  $d_+$  sont les degrés minimum et maximum respectivement.

## Interprétation spectrale de l'expansion

**Exercice.** La valeur propre  $\lambda_0 = 0$  est *simple*, autrement dit  $\lambda_1 > 0$ , *si et seulement si*  $\Gamma$  est connexe.

Rappelons que  $h > 0$  caractérise aussi la connexité. Y-a-t-il un lien entre ces deux invariants numériques ?

**Inégalités (combinatoires) de Buser et Cheeger.** On a

$$\left(\frac{d_-^2}{2d_+}\right)\lambda_1 \leq h \leq d_+ \sqrt{2\lambda_1}$$

où  $d_-$  et  $d_+$  sont les degrés minimum et maximum respectivement.

En particulier, une suite de graphes  $(\Gamma_n)$  de degré borné est une famille de graphes *expandeurs si et seulement si* il existe  $\delta > 0$  (un « trou spectral ») tel que

$$\lambda_1(\Gamma_n) \geq \delta$$

pour tout  $n \geq 1$ .

## Interprétation spectrale de l'expansion

**Exercice.** La valeur propre  $\lambda_0 = 0$  est *simple*, autrement dit  $\lambda_1 > 0$ , *si et seulement si*  $\Gamma$  est connexe.

Rappelons que  $h > 0$  caractérise aussi la connexité. Y-a-t-il un lien entre ces deux invariants numériques ?

**Inégalités (combinatoires) de Buser et Cheeger.** On a

$$\left(\frac{d_-^2}{2d_+}\right)\lambda_1 \leq h \leq d_+ \sqrt{2\lambda_1}$$

où  $d_-$  et  $d_+$  sont les degrés minimum et maximum respectivement.

En particulier, une suite de graphes  $(\Gamma_n)$  de degré borné est une famille de graphes *expandeurs si et seulement si* il existe  $\delta > 0$  (un « trou spectral ») tel que

$$\lambda_1(\Gamma_n) \geq \delta$$

pour tout  $n \geq 1$ .

Grâce à l'algèbre linéaire numérique, il est alors possible de calculer  $\lambda_1$ , donc d'estimer  $h$ , pour des graphes de grande taille (jusqu'à un milliard de sommets).

## Digression

- Pourquoi « laplacien » ? Si on a une fonction  $f$  de classe  $C^3$  sur  $\mathbf{R}^2$ , un développement limité montre que

$$\begin{aligned} -\Delta f(a, b) &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left( f(a, b) - \frac{1}{4}(f(a+h, b) + f(a-h, b) + \right. \\ &\quad \left. f(a, b+h) + f(a, b-h)) \right) \end{aligned}$$

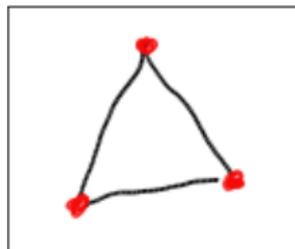
## Digression

- Pourquoi « laplacien » ? Si on a une fonction  $f$  de classe  $C^3$  sur  $\mathbf{R}^2$ , un développement limité montre que

$$\begin{aligned} -\Delta f(a, b) &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left( f(a, b) - \frac{1}{4}(f(a+h, b) + f(a-h, b) + \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. f(a, b+h) + f(a, b-h)) \right) \end{aligned}$$

- Le spectre du laplacien a beaucoup d'autres applications ; par exemple, si le graphe est régulier de degré  $k$ , le nombre de *triangles* dans le graphe est égal à

$$\frac{k^3}{6} \operatorname{Tr}((\operatorname{Id} - \Delta)^3) = \frac{k^3}{6} \sum_i (1 - \lambda_i)^3.$$



## Applications

Les graphes expandeurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

## Applications

Les graphes expandeurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

- ▶ Géométrie ;

# Applications

Les graphes expandeurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

- ▶ Géométrie ;
- ▶ Théorie des nombres et géométrie arithmétique ;

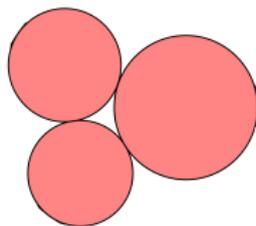
# Applications

Les graphes expandeurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

- ▶ Géométrie ;
- ▶ Théorie des nombres et géométrie arithmétique ;
- ▶ Théorie des groupes ;
- ▶ Informatique théorique ;
- ▶ Théorie des opérateurs ;
- ▶ Combinatoire ;
- ▶ Et que sais-je encore...

## Application : géométrie, arithmétique et crible

Un vieux résultat de géométrie du plan :  
étant donnés trois cercles ( $\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3$ )  
tangents deux-à-deux et d'intérieurs  
disjoints,

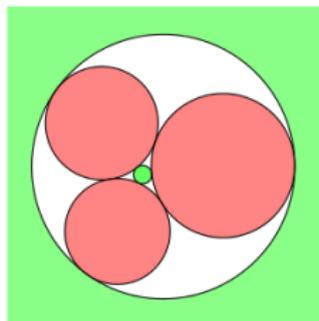


## Application : géométrie, arithmétique et crible

Un vieux résultat de géométrie du plan :  
étant donnés trois cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3)$   
tangents deux-à-deux et d'intérieurs  
disjoints, il existe deux autres cercles  
 $(\bigcirc_4, \bigcirc'_4)$  tels que

$$(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4) \text{ et } (\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc'_4)$$

soient deux-à-deux tangents et d'intérieurs  
disjoints.



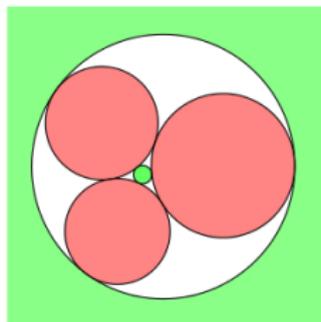
## Application : géométrie, arithmétique et crible

Un vieux résultat de géométrie du plan :  
étant donnés trois cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3)$   
tangents deux-à-deux et d'intérieurs  
disjoints, il existe deux autres cercles  
 $(\bigcirc_4, \bigcirc'_4)$  tels que

$$(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4) \text{ et } (\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc'_4)$$

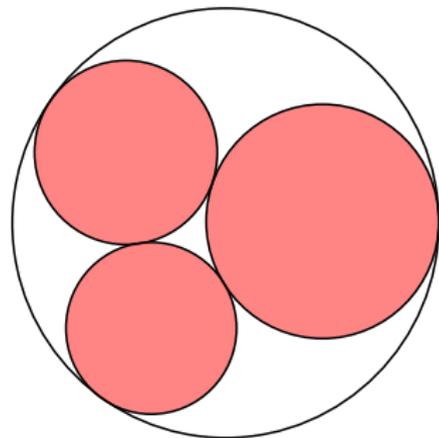
soient deux-à-deux tangents et d'intérieurs  
disjoints.

(On permet des cercles de rayon  $< 0$ , auquel cas on dit que « l'intérieur » est le complément du disque borné par le cercle.)



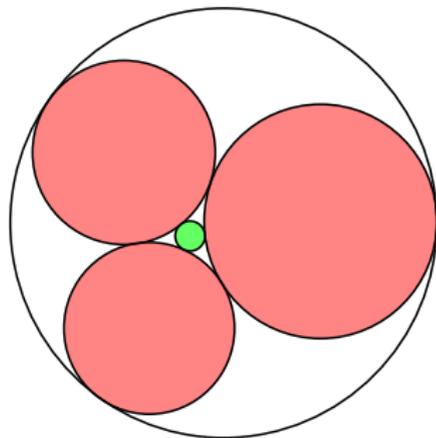
## Empilements de cercles

En partant de quatre cercles  
( $\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4$ ),



## Empilements de cercles

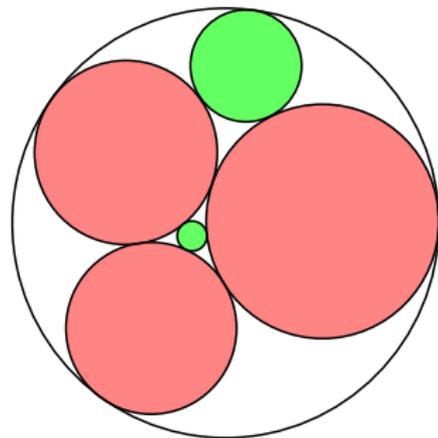
En partant de quatre cercles  
 $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ , et en appliquant ce  
résultat à  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3)$ ,



## Empilements de cercles

En partant de quatre cercles

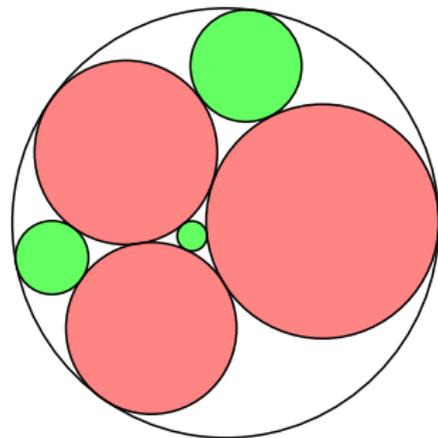
$(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ , et en appliquant ce  
résultat à  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3)$ ,  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_4)$ ,



## Empilements de cercles

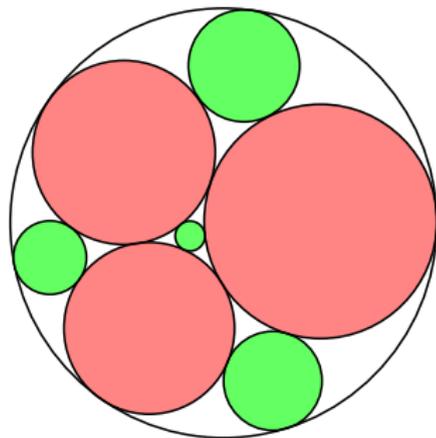
En partant de quatre cercles

$(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ , et en appliquant ce  
résultat à  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3)$ ,  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_4)$ ,  
 $(\bigcirc_1, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ ,



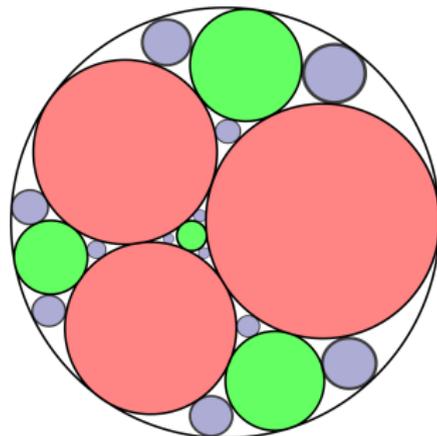
## Empilements de cercles

En partant de quatre cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ , et en appliquant ce résultat à  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3)$ ,  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_4)$ ,  $(\bigcirc_1, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ ,  $(\bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ , on construit quatre nouveaux cercles,



## Empilements de cercles

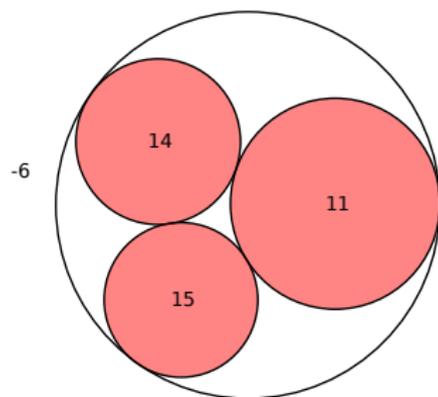
En partant de quatre cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ , et en appliquant ce résultat à  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3)$ ,  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_4)$ ,  $(\bigcirc_1, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ ,  $(\bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$ , on construit quatre nouveaux cercles, puis en itérant, on obtient un *empilement de cercles*.



## Empilements de cercles entiers

Descartes a démontré que les courbures  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1/r_1, 1/r_2, 1/r_3, 1/r_4)$  de quatre cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$  dans une telle configuration vérifient

$$2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 = 0.$$

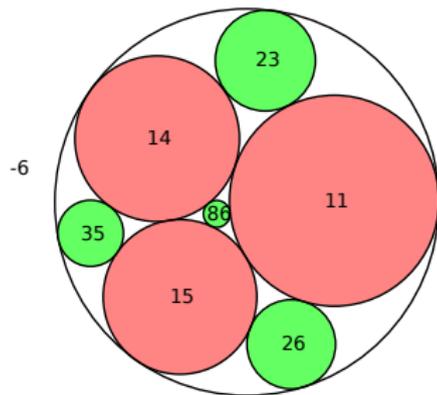


## Empilements de cercles entiers

Descartes a démontré que les courbures  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1/r_1, 1/r_2, 1/r_3, 1/r_4)$  de quatre cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$  dans une telle configuration vérifient

$$2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 = 0.$$

En particulier, si trois courbures sont entières, il en est de même de la quatrième. Et donc toutes les courbures d'un empilement apollonien sont entières, si celles du premier quadruplet le sont !



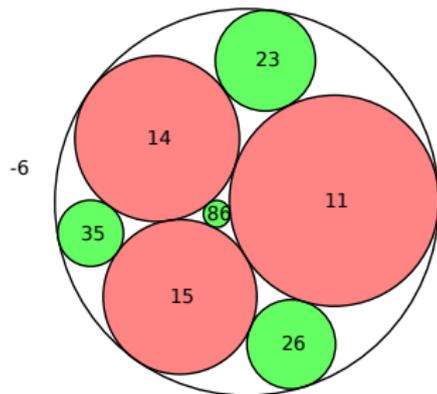
## Empilements de cercles entiers

Descartes a démontré que les courbures  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1/r_1, 1/r_2, 1/r_3, 1/r_4)$  de quatre cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$  dans une telle configuration vérifient

$$2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 = 0.$$

En particulier, si trois courbures sont entières, il en est de même de la quatrième. Et donc toutes les courbures d'un empilement apollonien sont entières, si celles du premier quadruplet le sont !

**Question.** (Graham, Lagarias, Mallows, Wilks, Yan, 2003) Quelles propriétés a l'ensemble des entiers qui apparaissent dans un empilement ?

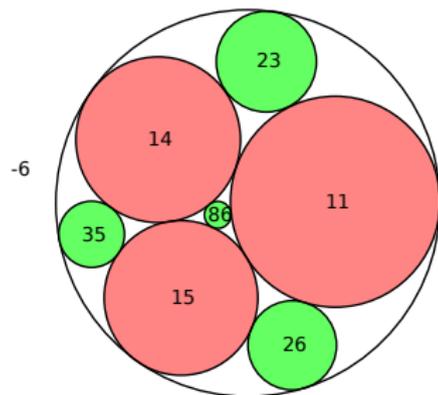


## Empilements de cercles entiers

Descartes a démontré que les courbures  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1/r_1, 1/r_2, 1/r_3, 1/r_4)$  de quatre cercles  $(\bigcirc_1, \bigcirc_2, \bigcirc_3, \bigcirc_4)$  dans une telle configuration vérifient

$$2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 = 0.$$

En particulier, si trois courbures sont entières, il en est de même de la quatrième. Et donc toutes les courbures d'un empilement apollonien sont entières, si celles du premier quadruplet le sont !



**Question.** (Graham, Lagarias, Mallows, Wilks, Yan, 2003) Quelles propriétés a l'ensemble des entiers qui apparaissent dans un empilement ? Par exemple, cet ensemble contient-il une infinité de nombres premiers ?

## Ce qu'on sait...

De nombreux travaux ont permis de faire des progrès concernant cette question :

## Ce qu'on sait...

De nombreux travaux ont permis de faire des progrès concernant cette question :

- ▶ (Kontorovich–Oh, 2011) Si on note  $r(n)$  the nombre de cercles de courbure  $n \geq 1$  dans un empilement fixé, il existe  $c > 0$  telle que

$$\sum_{n=1}^N r(n) \sim cN^\delta$$

quand  $N \rightarrow +\infty$ , où  $\delta = 1,30568\dots$  est une constante indépendante de quelle empilement de cercles entier est utilisé.

## Ce qu'on sait...

De nombreux travaux ont permis de faire des progrès concernant cette question :

- ▶ (Kontorovich–Oh, 2011) Si on note  $r(n)$  the nombre de cercles de courbure  $n \geq 1$  dans un empilement fixé, il existe  $c > 0$  telle que

$$\sum_{n=1}^N r(n) \sim cN^\delta$$

quand  $N \rightarrow +\infty$ , où  $\delta = 1,30568\dots$  est une constante indépendante de quelle empilement de cercles entier est utilisé.

- ▶ (Bourgain–Fuchs, 2011) Il existe  $c_1 > 0$  telle que le nombre  $R(N)$  d'entiers  $n \leq N$  tels que  $r(n) \geq 1$  vérifie  $R(N) \geq c_1 N$  pour  $N$  assez grand.

## Ce qu'on sait...

De nombreux travaux ont permis de faire des progrès concernant cette question :

- ▶ (Kontorovich–Oh, 2011) Si on note  $r(n)$  the nombre de cercles de courbure  $n \geq 1$  dans un empilement fixé, il existe  $c > 0$  telle que

$$\sum_{n=1}^N r(n) \sim cN^\delta$$

quand  $N \rightarrow +\infty$ , où  $\delta = 1,30568\dots$  est une constante indépendante de quelle empilement de cercles entier est utilisé.

- ▶ (Bourgain–Fuchs, 2011) Il existe  $c_1 > 0$  telle que le nombre  $R(N)$  d'entiers  $n \leq N$  tels que  $r(n) \geq 1$  vérifie  $R(N) \geq c_1 N$  pour  $N$  assez grand.
- ▶ (Bourgain–Kontorovich, 2014) « Presque tout » entier  $n \geq 1$  pour lequel  $r(n)$  n'est pas nul pour des raisons « évidentes » vérifie  $r(n) \geq 1$ .

## Les graphes qui interviennent

On calcule que les quadruplets de courbures à chaque étape de la construction sont donnés par des formules comme

$$(c'_1, c_2, c_3, c_4) = (c_1, c_2, c_3, c_4)^t A_1,$$

et similairement avec  $A_2, A_3, A_4$ , où ces matrices  $4 \times 4$  ont des coefficients entiers. Par exemple

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Les graphes qui interviennent

On calcule que les quadruplets de courbures à chaque étape de la construction sont donnés par des formules comme

$$(c'_1, c_2, c_3, c_4) = (c_1, c_2, c_3, c_4)^t A_1,$$

et similairement avec  $A_2, A_3, A_4$ , où ces matrices  $4 \times 4$  ont des coefficients entiers. Par exemple

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des courbures est donc l'ensemble des coordonnées des vecteurs de la forme  $v_0 B$ , où  $v_0$  correspondant aux quatre courbures initiales, et  $B$  parcourt le sous-groupe du groupe des matrices  $4 \times 4$  engendré par  $\mathcal{S} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  : l'ensemble  $\mathcal{A}$  des produits des matrices  $A_i$ , et de leurs inverses (car  $A_i^{-1} = A_i$ ).

## Les graphes qui interviennent

Pour tout entier  $q \geq 1$ , si on considère l'ensemble  $\mathcal{A}_q$  des matrices à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$  obtenues en remplaçant chaque coefficients des  $A_i$  et des  $B \in \mathcal{A}$  par leur valeur modulo  $q$ , on obtient un groupe fini.

## Les graphes qui interviennent

Pour tout entier  $q \geq 1$ , si on considère l'ensemble  $\mathcal{A}_q$  des matrices à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$  obtenues en remplaçant chaque coefficients des  $A_i$  et des  $B \in \mathcal{A}$  par leur valeur modulo  $q$ , on obtient un groupe fini. On peut le calculer explicitement (pour tout  $q \geq 1$ , Fuchs, 2010).

## Les graphes qui interviennent

Pour tout entier  $q \geq 1$ , si on considère l'ensemble  $\mathcal{A}_q$  des matrices à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$  obtenues en remplaçant chaque coefficients des  $A_i$  et des  $B \in \mathcal{A}$  par leur valeur modulo  $q$ , on obtient un groupe fini. On peut le calculer explicitement (pour tout  $q \geq 1$ , Fuchs, 2010).

On définit un graphe  $\Gamma_q$  (« graphe de Cayley de  $\mathcal{A}_q$  relativement à  $\mathcal{S}$  ») en prenant :

## Les graphes qui interviennent

Pour tout entier  $q \geq 1$ , si on considère l'ensemble  $\mathcal{A}_q$  des matrices à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$  obtenues en remplaçant chaque coefficients des  $A_i$  et des  $B \in \mathcal{A}$  par leur valeur modulo  $q$ , on obtient un groupe fini. On peut le calculer explicitement (pour tout  $q \geq 1$ , Fuchs, 2010).

On définit un graphe  $\Gamma_q$  (« graphe de Cayley de  $\mathcal{A}_q$  relativement à  $\mathcal{S}$  ») en prenant :

- ▶ L'ensemble  $\mathcal{A}_q$  comme ensemble de sommets ;

## Les graphes qui interviennent

Pour tout entier  $q \geq 1$ , si on considère l'ensemble  $\mathcal{A}_q$  des matrices à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$  obtenues en remplaçant chaque coefficients des  $A_i$  et des  $B \in \mathcal{A}$  par leur valeur modulo  $q$ , on obtient un groupe fini. On peut le calculer explicitement (pour tout  $q \geq 1$ , Fuchs, 2010).

On définit un graphe  $\Gamma_q$  (« graphe de Cayley de  $\mathcal{A}_q$  relativement à  $\mathcal{S}$  ») en prenant :

- ▶ L'ensemble  $\mathcal{A}_q$  comme ensemble de sommets ;
- ▶ Les arêtes relient  $B \in \mathcal{A}_q$  à  $BA_1$ ,  $BA_2$ ,  $BA_3$  et  $BA_4$ .

## Les graphes qui interviennent

Pour tout entier  $q \geq 1$ , si on considère l'ensemble  $\mathcal{A}_q$  des matrices à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$  obtenues en remplaçant chaque coefficients des  $A_i$  et des  $B \in \mathcal{A}$  par leur valeur modulo  $q$ , on obtient un groupe fini. On peut le calculer explicitement (pour tout  $q \geq 1$ , Fuchs, 2010).

On définit un graphe  $\Gamma_q$  (« graphe de Cayley de  $\mathcal{A}_q$  relativement à  $\mathcal{S}$  ») en prenant :

- ▶ L'ensemble  $\mathcal{A}_q$  comme ensemble de sommets ;
- ▶ Les arêtes relient  $B \in \mathcal{A}_q$  à  $BA_1, BA_2, BA_3$  et  $BA_4$ .

**Théorème** (Varjú 2013 ; Helfgott, Bourgain–Gamburd, Bourgain–Gamburd–Sarnak) La suite des graphes  $(\Gamma_q)$  est une famille de graphes expanseurs.

Comment l'expansion est-elle utile ici?

C'est l'interprétation spectrale de la propriété d'expansion qui est cruciale.

## Comment l'expansion est-elle utile ici?

C'est l'interprétation spectrale de la propriété d'expansion qui est cruciale. Elle permet de déduire la propriété suivante : si

$$\lambda_1(\Gamma_q) \geq \delta$$

pour tout  $q \geq 1$  (et  $\delta < 1$ ),

## Comment l'expansion est-elle utile ici?

C'est l'interprétation spectrale de la propriété d'expansion qui est cruciale. Elle permet de déduire la propriété suivante : si

$$\lambda_1(\Gamma_q) \geq \delta$$

pour tout  $q \geq 1$  (et  $\delta < 1$ ), alors pour toute matrice  $B \in \mathcal{A}$  et tout  $N \geq 1$ , on a

$$\left| \frac{1}{4^N} |\{(B_1, \dots, B_N) \in \mathcal{S}^N \mid B_1 \cdots B_N \equiv B \pmod{q}\}| - \frac{1}{|\mathcal{A}_q|} \right| \leq (1 - \delta)^N.$$

## Comment l'expansion est-elle utile ici?

C'est l'interprétation spectrale de la propriété d'expansion qui est cruciale. Elle permet de déduire la propriété suivante : si

$$\lambda_1(\Gamma_q) \geq \delta$$

pour tout  $q \geq 1$  (et  $\delta < 1$ ), alors pour toute matrice  $B \in \mathcal{A}$  et tout  $N \geq 1$ , on a

$$\left| \frac{1}{4^N} |\{(B_1, \dots, B_N) \in \mathcal{S}^N \mid B_1 \cdots B_N \equiv B \pmod{q}\}| - \frac{1}{|\mathcal{A}_q|} \right| \leq (1 - \delta)^N.$$

Cela veut dire que, dans les produits de matrices définissant un élément compliqué de  $\mathcal{A}$ , chaque réduction modulo  $q$  a « autant de chance » d'apparaître, tant que  $q$  n'est pas trop grand par rapport à la longueur  $N$  du produit  $B_1 \cdots B_N$ .

## Comment l'expansion est-elle utile ici?

C'est l'interprétation spectrale de la propriété d'expansion qui est cruciale. Elle permet de déduire la propriété suivante : si

$$\lambda_1(\Gamma_q) \geq \delta$$

pour tout  $q \geq 1$  (et  $\delta < 1$ ), alors pour toute matrice  $B \in \mathcal{A}$  et tout  $N \geq 1$ , on a

$$\left| \frac{1}{4^N} |\{(B_1, \dots, B_N) \in \mathcal{S}^N \mid B_1 \cdots B_N \equiv B \pmod{q}\}| - \frac{1}{|\mathcal{A}_q|} \right| \leq (1 - \delta)^N.$$

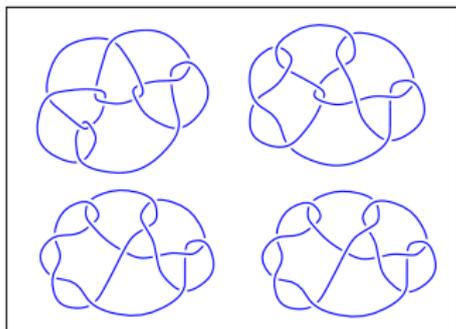
Cela veut dire que, dans les produits de matrices définissant un élément compliqué de  $\mathcal{A}$ , chaque réduction modulo  $q$  a « autant de chance » d'apparaître, tant que  $q$  n'est pas trop grand par rapport à la longueur  $N$  du produit  $B_1 \cdots B_N$ . Précisément, comme  $|\mathcal{A}_q| \leq q^{16}$ , l'erreur est négligeable tant que

$$(1 - \delta)^N \leq 10^{-10} q^{-16}$$

ce qui veut dire que  $q$  peut-croître exponentiellement par rapport à  $N$ , parce que  $\delta$  est indépendant de  $q$ .

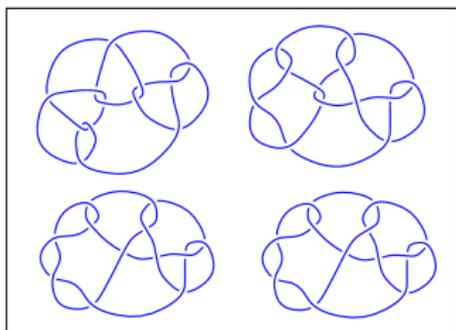
## Application : des nœuds compliqués

Vers 1980, Gromov demanda s'il existe des nœuds qui sont extrêmement compliqués : il serait impossible de les plonger dans l'espace de sorte que leur *distorsion* soit petite.



## Application : des nœuds compliqués

Vers 1980, Gromov demanda s'il existe des nœuds qui sont extrêmement compliqués : il serait impossible de les plonger dans l'espace de sorte que leur *distorsion* soit petite.



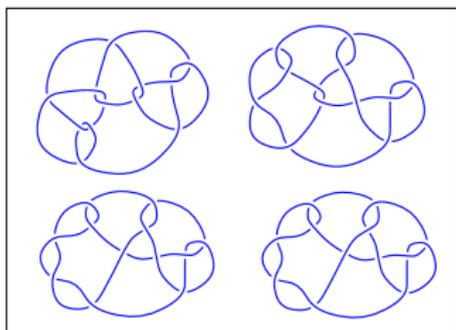
La *distorsion* d'un nœud  $N$  est un invariant défini par Gromov :

$$\delta(N) = \min_{\substack{\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{réalisant } N}} \sup_{\substack{(x,y) \in \gamma \\ x \neq y}} \frac{d_\gamma(x,y)}{\|x-y\|},$$

où  $d_\gamma(x,y)$  est la distance *le long du nœud* entre  $x$  et  $y$  et  $\|x-y\|$  est la distance euclidienne.

## Application : des nœuds compliqués

Vers 1980, Gromov demanda s'il existe des nœuds qui sont extrêmement compliqués : il serait impossible de les plonger dans l'espace de sorte que leur *distorsion* soit petite.



La *distorsion* d'un nœud  $N$  est un invariant défini par Gromov :

$$\delta(N) = \min_{\substack{\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{réalisant } N}} \sup_{\substack{(x,y) \in \gamma \\ x \neq y}} \frac{d_\gamma(x,y)}{\|x-y\|},$$

où  $d_\gamma(x,y)$  est la distance *le long du nœud* entre  $x$  et  $y$  et  $\|x-y\|$  est la distance euclidienne.

Dire que  $\delta(N)$  est « grand » signifie que, quelque soit la manière dont on place le nœud dans l'espace, il y aura des points « proches » dans l'espace qui sont « loins » le long du nœud.

## Gromov-Guth (and Pardon)

Gromov demande :

*Does every isotopy class of knots in  $\mathbf{R}^3$  have a representative in  $\mathbf{R}^3$  with distortion  $< 100$ ?*

## Gromov-Guth (and Pardon)

Gromov demande :

*Does every isotopy class of knots in  $\mathbf{R}^3$  have a representative in  $\mathbf{R}^3$  with distortion  $< 100$ ?*

Le problème est difficile car il existe une infinité de nœuds tels que  $\delta(N) < 100$ .

## Gromov-Guth (and Pardon)

Gromov demande :

*Does every isotopy class of knots in  $\mathbf{R}^3$  have a representative in  $\mathbf{R}^3$  with distortion  $< 100$ ?*

Le problème est difficile car il existe une infinité de nœuds tels que  $\delta(N) < 100$ .

Mais la réponse est « Non » !

## Gromov-Guth (and Pardon)

Gromov demande :

*Does every isotopy class of knots in  $\mathbf{R}^3$  have a representative in  $\mathbf{R}^3$  with distortion  $< 100$ ?*

Le problème est difficile car il existe une infinité de nœuds tels que  $\delta(N) < 100$ .

Mais la réponse est « Non » !

**Théorème** (Pardon 2010, Gromov-Guth 2011). Pour tout  $D \geq 1$ , il existe des nœuds  $N$  tels que  $\delta(N) \geq D$ .

## Gromov-Guth (and Pardon)

Gromov demande :

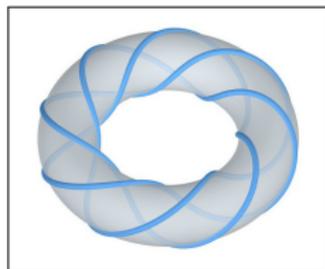
*Does every isotopy class of knots in  $\mathbf{R}^3$  have a representative in  $\mathbf{R}^3$  with distortion  $< 100$ ?*

Le problème est difficile car il existe une infinité de nœuds tels que  $\delta(N) < 100$ .

Mais la réponse est « Non » !

**Théorème** (Pardon 2010, Gromov-Guth 2011). Pour tout  $D \geq 1$ , il existe des nœuds  $N$  tels que  $\delta(N) \geq D$ .

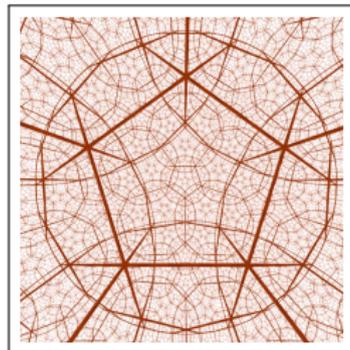
La preuve de Pardon est constructive et directe : pour les nœuds toriques  $T_{p,q}$ , il minore la distorsion en fonction de  $p$  et  $q$ .  
(Voir <http://images.math.cnrs.fr/Des-Noeuds-Indetordables.html>)



$T_{8,3}$ ; image B. Klöckner

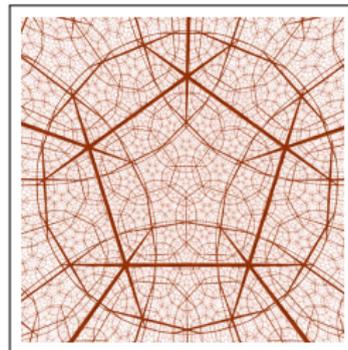
## L'argument de Gromov et Guth

Les nœuds considérés par Gromov et Guth proviennent, de manière délicate, de certaines formes géométriques  $M$  de dimension 3 (*variétés hyperboliques compactes*).



## L'argument de Gromov et Guth

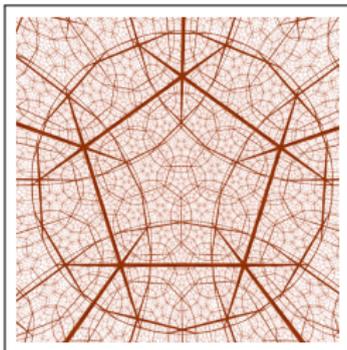
Les nœuds considérés par Gromov et Guth proviennent, de manière délicate, de certaines formes géométriques  $M$  de dimension 3 (*variétés hyperboliques compactes*).



À certaines suites particulières  $(M_n)$  de telles variétés sont aussi associés naturellement des graphes  $\Gamma_n$ , (*indépendamment* de la construction de nœuds  $N_n$ ).

## L'argument de Gromov et Guth

Les nœuds considérés par Gromov et Guth proviennent, de manière délicate, de certaines formes géométriques  $M$  de dimension 3 (*variétés hyperboliques compactes*).



À certaines suites particulières  $(M_n)$  de telles variétés sont aussi associés naturellement des graphes  $\Gamma_n$ , (*indépendamment* de la construction de nœuds  $N_n$ ).

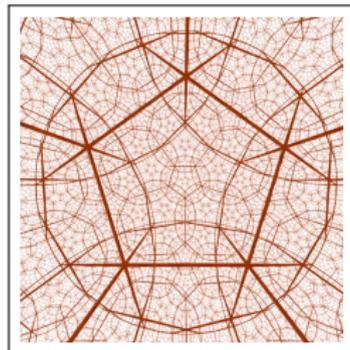
Gromov et Guth montrent qu'il existe  $\alpha > 0$  telle que

$$\delta(N_n) \geq \alpha |S_n| h(\Gamma_n)$$

pour tout  $n$ , où  $S_n$  est l'ensemble des sommets de  $\Gamma_n$ .

## L'argument de Gromov et Guth

Les nœuds considérés par Gromov et Guth proviennent, de manière délicate, de certaines formes géométriques  $M$  de dimension 3 (*variétés hyperboliques compactes*).



À certaines suites particulières  $(M_n)$  de telles variétés sont aussi associés naturellement des graphes  $\Gamma_n$ , (*indépendamment* de la construction de nœuds  $N_n$ ).

Gromov et Guth montrent qu'il existe  $\alpha > 0$  telle que

$$\delta(N_n) \geq \alpha |S_n| h(\Gamma_n)$$

pour tout  $n$ , où  $S_n$  est l'ensemble des sommets de  $\Gamma_n$ .

Finalement, ils savent que  $(\Gamma_n)$  forme une suite de graphes expanseurs, pour des raisons subtiles proches de celles utilisées par Margulis (« Propriété  $(\tau)$  de Lubotzky » ; Selberg, Clozel).

## Et quelques questions sans réponses... connues

- ▶ Obtenir des estimations « raisonnables » pour la constante de Cheeger d'expandeurs tels que les graphes de Cayley du groupe de matrices modulo  $p$  premier engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$$

(connu :  $\lambda_1 \geq 2^{-2^{80}}$  ; si 3 est remplacé par 1, environ 1/100...)

## Et quelques questions sans réponses... connues

- ▶ Obtenir des estimations « raisonnables » pour la constante de Cheeger d'expandeurs tels que les graphes de Cayley du groupe de matrices modulo  $p$  premier engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$$

(connu :  $\lambda_1 \geq 2^{-2^{80}}$  ; si 3 est remplacé par 1, environ 1/100...)

- ▶ Trouver des *algorithmes* efficaces de navigation dans des expandeurs ; par exemple, trouver un algorithme efficace pour écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & (p-1)/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en produit de longueur proportionnelle à  $\log p$  des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp 3 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$$

## Et quelques questions sans réponses... connues

- ▶ Obtenir des estimations « raisonnables » pour la constante de Cheeger d'expandeurs tels que les graphes de Cayley du groupe de matrices modulo  $p$  premier engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$$

(connu :  $\lambda_1 \geq 2^{-2^{80}}$  ; si 3 est remplacé par 1, environ 1/100...)

- ▶ Trouver des *algorithmes* efficaces de navigation dans des expandeurs ; par exemple, trouver un algorithme efficace pour écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & (p-1)/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en produit de longueur proportionnelle à  $\log p$  des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp 3 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$$

- ▶ Et trouver de nouvelles applications !

## Quelques références

- ▶ (Expanseurs en général) S. Hoory, N. Linial et A. Wigderson : *Expander graphs and their applications*, Bull. AMS 43 (2006), 439–561.
- ▶ (Empilements apolloniens) E. Fuchs : *Counting problems in Apollonian packings*, Bull. AMS 50 (2013), 229–266 ; A. Kontorovich : *From Apollonius to Zaremba: local-global phenomena in thin orbits*, Bull. AMS 50, (2013), No. 2, 187–228.
- ▶ (Applications) A. Lubotzky : *Expander graphs in pure and applied mathematics*, AMS Colloquium Lectures 2011, Bull. AMS 49 (2012), 113–162.
- ▶ (Applications arithmétiques) *Crible en expansion*, Séminaire Bourbaki, exposé 1028 ; dans Astérisque 348 (2012), 17–64.

## Quelques références

- ▶ (Expansions en général) S. Hoory, N. Linial et A. Wigderson : *Expander graphs and their applications*, Bull. AMS 43 (2006), 439–561.
- ▶ (Empilements apolloniens) E. Fuchs : *Counting problems in Apollonian packings*, Bull. AMS 50 (2013), 229–266 ; A. Kontorovich : *From Apollonius to Zaremba: local-global phenomena in thin orbits*, Bull. AMS 50, (2013), No. 2, 187–228.
- ▶ (Applications) A. Lubotzky : *Expander graphs in pure and applied mathematics*, AMS Colloquium Lectures 2011, Bull. AMS 49 (2012), 113–162.
- ▶ (Applications arithmétiques) *Crible en expansion*, Séminaire Bourbaki, exposé 1028 ; dans Astérisque 348 (2012), 17–64.

Plus généralement : allez au séminaire Bourbaki (Institut Henri Poincaré, quatre séances par an) pour apprendre ce qui se passe en mathématiques...