

Auswertung und Lösung

Mathematik I: Analysis I (401-0251-00L)

Abgaben: 117/277

Maximal erreichte Punktzahl: 24

Minimal erreichte Punktzahl: 3

Durchschnitt: 13

Frage 1 (0.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Wurzel aus 36 ...

- 0.0% gibt es nicht.
Doch, die gibt es.
- 70.9% ist gleich ± 6 .
Falsch. Eine Wurzel kann nicht negativ sein.
- 29.1%** ist gleich 6.
- 0.0% ist gleich -6 .
Falsch. Eine Wurzel kann nicht negativ sein.
- 0.0% Keine der obigen Antworten ist richtig.

Die Quadratwurzel aus a ist die nichtnegative reelle Zahl x mit $x^2 = a$.

Frage 2 (0.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche der folgenden Rechenregeln stimmt für alle reellen Zahlen a und b ?

- 6.8% $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
Nein, finden Sie ein einfaches Gegenbeispiel.
- 3.4% $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Nein, finden Sie ein einfaches Gegenbeispiel.
- 6.0% $(a+b)(c+d) = ac + bd$
Sie vergessen die Zwischenterme!
- 29.1% $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$
Nein. Jedoch gilt $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.
- 54.7% Keine.

Frage 3 (0.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Für welche reellen Zahlen x ist die Ungleichung $|x - 2| \leq 3$ erfüllt?

- 0.9% Die Ungleichung ist niemals erfüllt.
- 41.0% $x \leq 5$
Überlegen Sie sich, dass die Lösungsmenge sowohl nach oben als auch nach unten begrenzt sein muss.
- 4.3% $x \in [-3, 3]$
Offenbar ist -3 keine Lösung.
- 3.4% $x \geq -1$
Überlegen Sie sich, dass die Lösungsmenge sowohl nach oben als auch nach unten begrenzt sein muss.
- 50.4% Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt:

$$|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow (x - 2 \leq 3 \wedge -(x - 2) \leq 3) \Leftrightarrow (x \leq 5 \wedge -1 \leq x) \Leftrightarrow x \in [-1, 5].$$

Frage 4 (3.4 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Für welches gegebene n ist $\cos \frac{\pi}{n} > \sin \frac{\pi}{n}$?

- 8.5% $n = 2$
- 5.1% $n = 3$
- 6.8% $n = 4$
- 61.5%** $n = 5$
- 14.5% Für keines dieser n .

Es entspricht $\frac{\pi}{4}$ dem Winkel 45° . Machen Sie sich z.B. am Einheitskreis klar, dass sich dort die Sinus- und Cosinuskurve schneiden.

Frage 5 (8.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

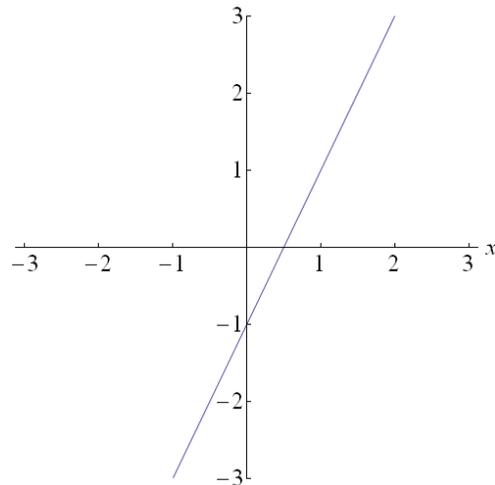
Sei $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; dann gilt für $\cos(\alpha)$:

- 14.5% Es kann über $\cos(\alpha)$ keine Aussage getroffen werden.
- 38.5% $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Dies ist *eine* Möglichkeit, aber nicht die einzige.
- 7.7% $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Dies ist *eine* Möglichkeit, aber nicht die einzige.
- 21.4%** $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oder $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 9.4% $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ oder $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$

Hier kommt die Identität $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ zur Anwendung.

Frage 6 (0.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Wie lautet die Gleichung der Geraden auf dem Bild?



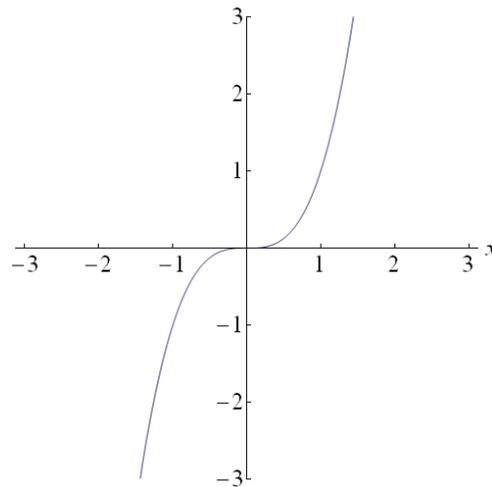
- 9.4% $y = \frac{1}{2}x - 1$
- 1.7% $y = \frac{1}{2}x + 1$
- 84.6% $y = 2x - 1$
- 1.7% $y = 2x + 1$
- 2.6% Keine der obigen Antworten ist richtig.

Der y -Achsenabschnitt b kann direkt abgelesen werden und ist $b = -1$. Die Steigung ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$, folglich erhalten wir $y = 2x - 1$.

Frage 7 (0.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Zeichnung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$.

Durch Verschieben um 2 Einheiten nach rechts erhalten wir den Graphen einer neuen Funktion g . Wie lautet die Funktionsgleichung von g ?



68.4% $g(x) = (x - 2)^3$

9.4% $g(x) = (x + 2)^3$

4.3% $g(x) = x^3 - 2$

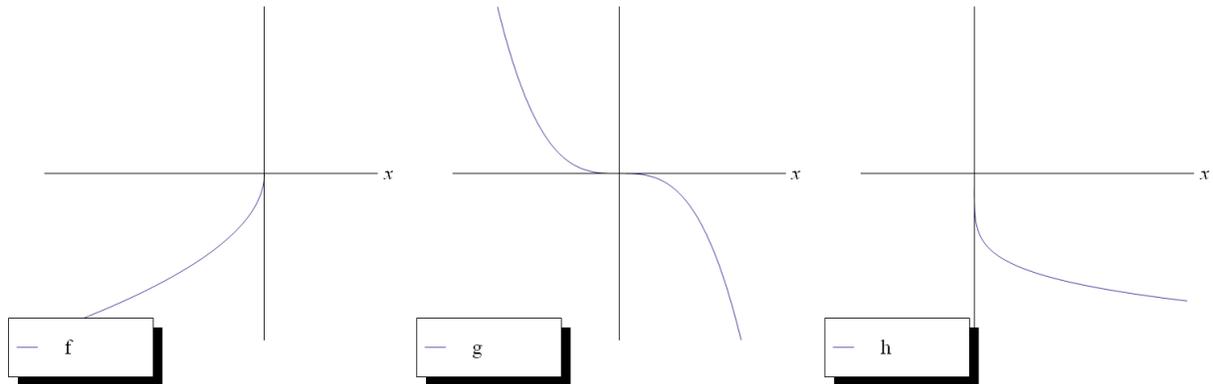
9.4% $g(x) = x^3 + 2$

8.5% Keine der obigen Antworten ist richtig.

Eine Verschiebung um 2 nach rechts bedeutet, dass die neue Funktion g den Wert $f(x)$ erst bei $x + 2$ annimmt:
 $g(x + 2) \stackrel{!}{=} f(x)$ für alle $x \Leftrightarrow g(x) = f(x - 2)$. D.h., in $f(x)$ ist die Variable x durch $x - 2$ zu ersetzen.

Frage 8 (0.9 % haben diese Frage nicht beantwortet)

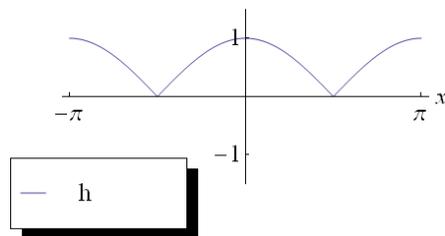
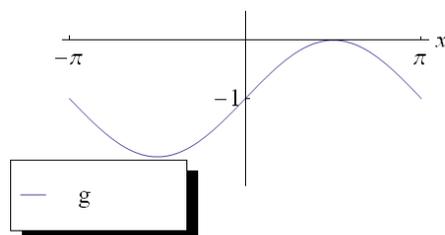
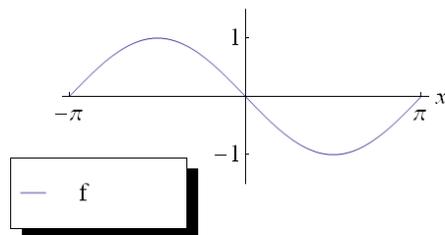
Welche drei Funktionen f , g , h gehören zu den drei folgenden Kurven?



- 3.4% $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}, g(x) = x^3, h(x) = -x^{\frac{1}{5}}$
Nein. Der Graph der Funktion g ist an der y -Achse gespiegelt.
- 6.8% $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, g(x) = -x^3, h(x) = x^{-\frac{1}{5}}$
Nein. Die Wurzel ist für negative Zahlen nicht definiert, sodass f falsch ist.
- 1.7% $f(x) = -x^{-\frac{1}{2}}, g(x) = x^3, h(x) = -x^{\frac{1}{5}}$
Nein. Siehe oben.
- 9.4% $f(x) = -(-x)^{-\frac{1}{2}}, g(x) = -x^3, h(x) = x^{-5}$
Nein. Für die Funktion h ist $h(x)$ positiv, falls x positiv ist.
- 77.8% $f(x) = -(-x)^{\frac{1}{2}}, g(x) = -x^3, h(x) = -x^{\frac{1}{5}}$
Richtig!

Frage 9 (1.7 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche drei Funktionen f, g, h gehören zu den drei folgenden Graphen?



- 7.7% $f(x) = \sin(x)$
 $g(x) = \sin(x) - 1$
 $h(x) = |\cos(x)|$

Nein. Man sieht z.B., dass f nicht die Form von $\sin(x)$, sondern von $\sin(-x)$ hat.

- 5.1% $f(x) = \sin(-x)$
 $g(x) = \cos(x) - 1$
 $h(x) = \cos|x|$

Nein. Z.B. gilt $\cos|x| = \cos(x) < 0, x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, was nicht h entspricht.

- 13.7% $f(x) = \sin(-x)$
 $g(x) = \sin(x) - 1$
 $h(x) = \cos|x|$

Nein. Z.B. gilt $\cos|x| = \cos(x) < 0, x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, was nicht h entspricht.

- 66.7% $f(x) = \sin(-x)$
 $g(x) = \sin(x) - 1$

$$h(x) = |\cos(x)|$$

Richtig!

- 5.1% Keine der Antworten ist korrekt.
Doch, eine der Antworten ist richtig.

Frage 10 (6.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welche Periode hat die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$?

- 5.1% Es liegt keine Periode vor!
12.8% 2π
45.3% π
17.1% $\frac{\pi}{2}$
13.7% 4π

Eine Funktion f hat genau dann Periode p , wenn für alle x gilt: $f(x) = f(x + p)$. Für die Sinus-Funktion gilt für alle x : $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$. In der Aufgabe folgt

$$f(x) = \sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi)) = f(x + \pi).$$

Die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$ hat die Periode π .

Frage 11 (2.6 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$ beträgt

- 57.3%** $\frac{1}{5}$.
22.2% 0.
4.3% ∞ .
2.6% $\frac{1}{32}$.
11.1% $-\frac{1}{21}$.

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21} \stackrel{=}{\underbrace{\hspace{1.5cm}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^3}}{10 + \frac{1}{n^2} + \frac{21}{n^3}} = \frac{1}{5}$$

Zähler und Nenner
dividiert durch n^3

Frage 12 (2.6 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ beträgt

13.7% $\frac{1}{2}$.

58.1% $\frac{2}{3}$.

11.1% 2.

5.1% $\frac{3}{2}$.

9.4% ∞ .

Für die betrachtete geometrische Reihe gilt

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n.$$

Sei $q := \frac{q_{n+1}}{q_n}$. Dann ist $q = -\frac{1}{2}$. Da $|q| < 1$, konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$.

Frage 13 (4.3 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$ beträgt

47.0% 0.

23.1% $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2.6% $\frac{1}{2}$.

6.0% $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

17.1% ∞ .

Erweitern des Zählers und Nenners mit $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ ergibt:

$$\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{(2+h) - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}.$$

Damit erhalten wir für den Grenzwert

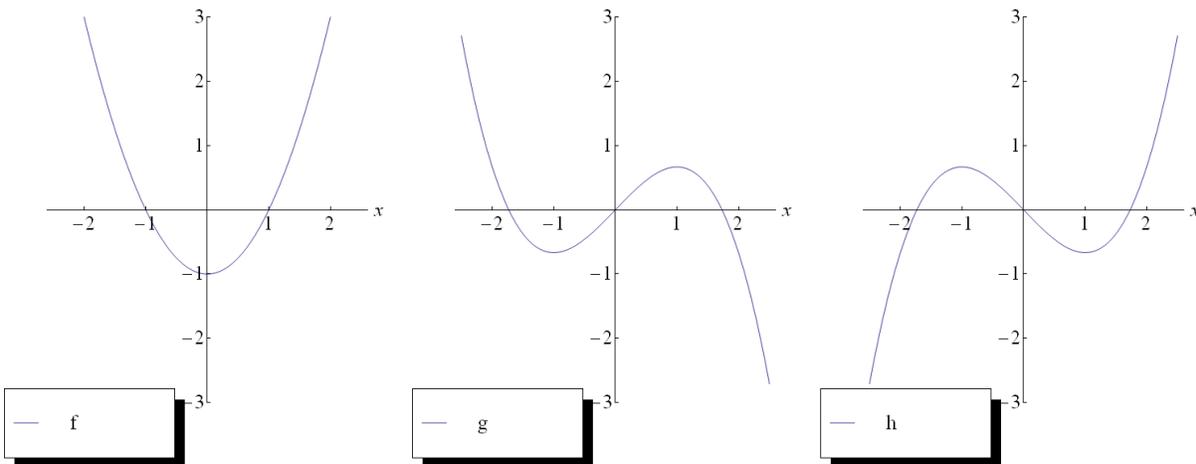
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ein anderes Argument lautet: Der Grenzwert ist der Differentialquotient der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle 2, und es gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, und damit

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Frage 14 (4.3 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die drei Graphen stellen die Funktionen f, g und h dar. Welche Aussage ist richtig?



- 4.3% $f' = g$
Nein. Z.B. ist die Steigung von f bei $x = -2$ negativ, aber $g(-2) > 0$.
- 6.8% $g' = f$
Nein. Z.B. ist die Steigung von g bei $x = -2$ negativ, aber $f(-2) > 0$.
- 13.7% $f' = h$
Nein. Z.B. wechselt die Ableitung von f zwischen -2 und -1 das Vorzeichen nicht, da die Steigung dort immer negativ verläuft. Aber es ist $g(-2) > 0$ und $g(-1) < 0$.
- 52.1% $h' = f$
Richtig!
- 18.8% $g' = h$
Nein. Die Ableitung von g im Nullpunkt ist positiv, aber $h(0) = 0$.

Frage 15 (1.7 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei f die Funktion mit $f(x) = e^{2x}$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung f' ?

12.8% $f'(x) = 2xe^{2x-1}$

1.7% $f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

71.8% $f'(x) = 2e^{2x}$

9.4% $f'(x) = e^{2x}$

2.6% Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt: $f'(x) = (e^{2x})' \underset{\text{Kettenregel}}{=} 2e^{2x}$.

Frage 16 (3.4 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei $f(x) = \ln(\sin(x))$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

21.4% $f'(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

42.7% $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

7.7% $f'(x) = \ln(\cos(x))$

13.7% $f'(x) = \frac{1}{x} \sin(x) + \ln(\cos(x))$

11.1% $f'(x) = \cos(x) \ln(\sin(x))$

Die Aufgabenstellung ist unpräzise formuliert. Für $\ln(y)$ muss $y > 0$ erfüllt sein, was in unserem Fall auf die Bedingung $\sin(x) > 0$ führt. Der Definitionsbereich für f ist also einzuschränken, wir betrachten im Folgenden deshalb $D_f :=]0, \pi[$. Damit ist dann für $x \in D_f$ $\sin(x) > 0$ erfüllt. Die Anwendung der Kettenregel ergibt nun

$$f'(x) = (\ln(\sin(x)))' = \cos(x) \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Frage 17 (6.0 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Steigung der Tangente in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\cos(3x)$ ist ...

- 20.5% Die Tangente existiert nicht.
- 11.1% 1.
- 41.0% -3.
- 6.0% $3 \sin(3)$.
- 15.4% 3.

Die Steigung der Tangente m_t an den Graphen einer Funktion f in einem Punkt x_0 ist gleich dem Wert der Ableitungsfunktion f' in x_0 , das heisst, $m_t = f'(x_0)$. Hier ist $f(x) = -\cos(3x)$ und $f'(x) = 3 \sin(3x)$, und damit die Steigung gleich

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot (-1) = -3.$$

Frage 18 (3.4 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x + 7$ ist ...

- 6.8% eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = e^x$.
Nein, für f gilt $f'(x) = e^x + x \cdot e^x \neq g(x)$.
- 10.3% die Ableitung der Funktion g mit $g(x) = e^x + 7x$.
Nein, für g gilt $g'(x) = e^x + 7 \neq f(x)$.
- 16.2% eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = e^x + x \cdot e^x$.
Richtig, es gilt nach Produkt- und Summenregel $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x + 0 = g(x)$.
- 32.5% die Ableitung der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + 7x$.
Nein, es gilt nach Produkt- und Summenregel $g'(x) = xe^x + \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + 7$.
- 30.8% Alle obigen Aussagen sind falsch.

Frage 19 (7.7 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Das Integral $\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$ beträgt

- 36.8% 2.
- 6.8% -2.
- 4.3% 4.
- 7.7% $-\frac{1}{2}$.
- 36.8% Keine der obigen Antworten ist richtig.

Das Integral berechnet sich durch:

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^\pi = -2(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1) = 2.$$

Frage 20 (8.5 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

- 24.8% $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$
- 15.4% $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$
- 19.7% $f'(x) = \cos(x)$
- 21.4% $f'(x) = \sin(x)$
- 10.3% Keine der Gleichungen ist korrekt.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.

Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)dt = -\cos t \Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

Frage 21 (7.7 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welches Paar von Gleichungen bzw. Parameterdarstellungen definiert Geraden, die nicht zueinander senkrecht sind?

17.9% $y = \frac{1}{3}x; 3x + y - \frac{1}{4} = 0$

17.1% $\begin{cases} x = \frac{3}{4}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}; \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$

31.6% $y = \frac{2}{3}x + 1; x = -\frac{3}{2}y - 9$

17.1% $y = -\frac{1}{4}x; x = \frac{1}{4}y + 4$

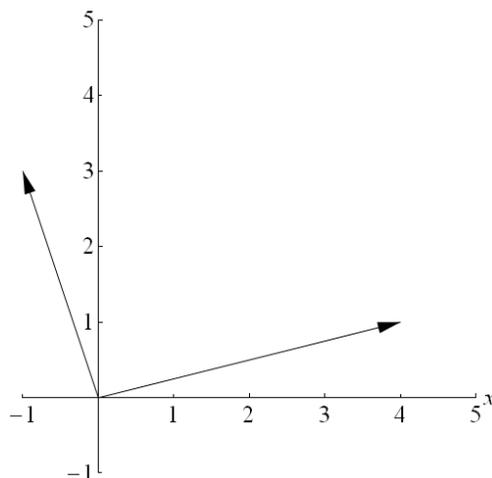
8.5% $y = x; y = 1 - x$

Zwei Geraden $g_1 : y = m_1x + b_1$ und $g_2 : y = m_2x + b_2$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das Produkt der beiden Steigungen gleich minus eins ist: $m_1 \cdot m_2 = -1$. In den fünf Beispielen trifft dies nur für $m_1 = \frac{2}{3}$ und $m_2 = -\frac{3}{2}$ nicht zu.

Beachten Sie, dass die Gleichungen in die richtige Form gebracht werden müssen.

Frage 22 (1.7 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Welcher Vektor entspricht der Summe der beiden Vektoren im Bild?



5.1% $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.6% $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

3.4% $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.7% $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

85.5% Keine der obigen Antworten ist richtig.

Die beiden Vektoren im Bild haben die Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir bezeichnen sie mit \vec{v} und \vec{w} . Dann ist

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + (-1) \\ 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösungsmöglichkeit wird nicht angeboten.

Frage 23 (2.6 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{a}| =$

- 6.0% 1.
0.0% 2.
72.6% 3.
12.0% 9.
6.8% Keines davon.

Der Betrag eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ berechnet sich durch

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In unserem Fall rechnen wir nach, dass $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ gilt.

Frage 24 (2.6 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

- 6.0% $\sqrt{6}$.
76.9% 6.
0.0% 36.
0.0% $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
14.5% $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist die Summe der Produkte der jeweiligen Koordinaten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6.$$

Beachten Sie mit Blick auf die vorherige Aufgabe, dass $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ gilt.

Frage 25 (4.3 % haben diese Frage nicht beantwortet)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} =$

55.6% $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

15.4% $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9.4% $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

15.4% 0.

0.0% 2.

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ berechnet sich durch:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Setzen Sie nun die Koordinaten ein und erhalten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.