Lineare Algebra I – Sommer 2018

1. *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:
- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

(i) Sei X eine Menge und seien $A, B, C \subseteq X$ Teilmengen. Dann gilt
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$$

(ii) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, dann definiert
$$\mathcal{P}_\sim = \{[x] | x \in X\}$$
eine Partition von X.

(iii) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ sei gegeben die Relation $\sim$, wobei für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ ungerade ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$.

(iv) Die Menge $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der reellen 2×2 Matrizen versehen mit Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ist ein Körper.

(v) Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Dann sind $W_1 \cap W_2 \subseteq V$ und $W_1 \cup W_2 \subseteq V$ auch Unterräume von V.

(vi) Sei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen, so ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ein Unterraum des Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(vii) Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn $\langle W \rangle = W$.

(viii) Seien gegeben die Unterräume
$$V_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y + z = 0\}$$
des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Dann gilt $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

(ix) Sei V ein Vektorraum und seien $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ Teilmengen. Wenn S_2 linear unabhängig ist, so ist S_1 auch linear unabhängig.

(x) Sei V ein Vektorraum und $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge. Sei T ein Endomorphismus von V. Dann ist $T(S)$ auch linear unabhängig.

(xi) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $W = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = -v\}$. Dann gilt $W \subseteq \mathrm{Im}(A)$.

(xii) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt
$$V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T).$$

Bitte wenden!

(xiii) Sei $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Seien des Weiteren $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ und $\mathrm{Im}(T) \neq \{0\}$. Dann ist $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) \neq \{0\}$.

(xiv) Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$m \geq \dim\left({}^{\mathbb{K}^n}\!/_{\mathrm{Ker}(A)} \right).$$

(xv) Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\dim(V) > \dim(W)$. Dann gilt $\mathrm{Rang}(T) = \dim(W)$.

(xvi) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ invertierbar, dann ist auch $A + A^{-1}$ invertierbar.

(xvii) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume, sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann ist T genau dann invertierbar, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

(xviii) Die Elementarmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zusammen mit der Matrixmultiplikation bilden eine Gruppe.

(xix) Sei $E \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Elementarmatrix, sei $b \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann hat $EX = b$ eine Lösung.

(xx) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + \det(A) - \det(A - I_2).$$

(xxi) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A^T)}$$

(xxii) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $L_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim \mathrm{Ker}(L_A) = 2 - \det(A).$$

(xxiii) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $A^T = -A$. Dann gilt $\det(A) = 0$.

(xxiv) Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $m < n$, dann hat $AX = 0$ nicht-triviale Lösungen.

(xxv) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume. Dann gilt

$$\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim\big(\mathrm{Hom}(W^*, V^*)\big)$$

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** *(3 Punkte)* Wir definieren auf $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Relation durch

$$A \sim B \iff \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B) \qquad \big(A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})\big).$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiert.

b) *(6 Punkte)* Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass $AF \sim A$ gilt.

c) *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse $[A]$ von $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gegeben ist durch

$$[A] = \{AF | F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgende Aussage verwenden. Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ surjektiv. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wenn die Einschränkung $T|_U : U \to W$ eine Bijektion ist, dann gilt

$$V = U \oplus \operatorname{Ker}(T).$$

3. **a)** *(3 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und sei U ein Unterraum von W. Zeigen Sie, dass $T^{-1}(U)$ ein Unterraum von V ist.

b) *(6 Punkte)* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sei $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis von $L_A^{-1}(U)$.

c) *(6 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ so, dass $\dim(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\dim(T^{-1}(U)) = \operatorname{nullity}(T) + \dim(\operatorname{Im}(T) \cap U).$$

4. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$, $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Sei $T^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ gegeben durch

$$(T^* f)(v) = f(Tv) \quad (f \in W^*, v \in V).$$

a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie: Wenn T surjektiv ist, dann ist T^* injektiv.

b) *(6 Punkte)* Sei $T : V \to W$ ein injektiver Homomorphismus und sei $U \subseteq W$ ein Unterraum mit der Eigenschaft $W = U \oplus \operatorname{Im}(T)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : W \to V$ gegeben durch $w = u + Tv \mapsto v$ ein wohldefinierter Homomorphismus ist.

c) *(5 Punkte)* Zeigen Sie: Wenn T injektiv ist, dann ist T^* surjektiv.

5. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) *(8 Punkte)* Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung von A.

b) *(7 Punkte)* Benützen Sie die LR-Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem

$$Av = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

zu lösen.

Sollten Sie die LR-Zerlegung von A nicht gefunden haben, lösen Sie das Gleichungssystem

$$Bv = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für die Matrix B unter Verwendung der LR-Zerlegung

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. **a)** *(4 Punkte)* Geben Sie die Definition der Determinanten aus der Vorlesung wieder.

b) *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ gilt:

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Hinweis: Für $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K}), N \in M_{m\times m}(\mathbb{K}), U \in M_{n\times m}(\mathbb{K}), V \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} M & U \\ 0 & N \end{pmatrix} = \det(M)\det(N) = \det \begin{pmatrix} M & 0 \\ V & N \end{pmatrix}.$$

Sie können diese Aussage ohne Beweis verwenden.

c) *(5 Punkte)* Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$$

genau dann invertierbar ist, wenn $n+1$ nicht durch p teilbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).