Sommer 2017

1. *(30 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Aufgabenblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

	Wahr	Falsch
i) Sei $$P = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N} : (m \text{ teilt } p \Rightarrow (m = 1 \vee m = p))\}.$$ Dann ist $\lvert P\rvert < \infty$.	☐	☐
ii) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? $$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$$	☐	☐
iii) Sei X eine Menge und sei R die auf der Menge $\mathbb{P}X$ der Teilmengen von X definierte Relation gegeben durch $$ARB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$ Dann ist R transitiv.	☐	☐
iv) In jeder Gruppe $(G, \circ, e)$ gilt $$\forall a, b, c \in G : b = c \iff a \circ b = a \circ c$$	☐	☐
v) Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume. So sind $W_1 \cap W_2$ und $W_1 \cup W_2$ auch Unterräume von V.	☐	☐
vi) Die Menge $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 0\}$ ist ein Unterraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.	☐	☐
vii) Betrachten Sie die Unterräume $V_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$. Dann ist $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.	☐	☐
viii) Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dann ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = Bx\}$ ein Unterrraum von $\mathbb{K}^n$.	☐	☐
ix) Sei V ein Vektorraum. Je zwei Erzeugendensysteme von V haben dieselbe Kardinalität.	☐	☐

x) Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch ☐ ☐

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}).$$

$\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis von $\mathbb{C}^2$, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

xi) Sei V ein Vektorraum. Dann gilt: Jede Teilmenge von V ist entweder linear abhängig oder linear unabhängig. ☐ ☐

xii) Drei Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn jede der Mengen $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist). ☐ ☐

xiii) Sei V ein Vektorraum. Für jede Teilmenge $S \subset V$ sind folgende Aussagen äquivalent: ☐ ☐

- Kein Element von S ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von S.
- Jeder Vektor in V besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S.

xiv) Sei V ein endlichdimensionaler Vetorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume mit $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Dann gilt ☐ ☐

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) \cdot \dim(W_2).$$

xv) Die Abbildung $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch $T(f) = f'$ ist linear. ☐ ☐

xvi) Für die Matrix ☐ ☐

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 2$.

xvii) Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt: T ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. ☐ ☐

xviii) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Es gilt $\dim \mathrm{Ker}(T^2) \geq \dim \mathrm{Ker}(T)$. ☐ ☐

xix) Es gibt eine invertierbare, reelle 3×3 Matrix, die schiefsymmetrisch ist. ☐ ☐

xx) Die einzige reelle 2×2 Matrix A, die $A^2 = 0$ erfüllt, ist $A = 0$. ☐ ☐

xxi) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$. ☐ ☐

xxii) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt: $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$. ☐ ☐

Siehe nächstes Blatt!

xxiii) Der Rang einer Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente. ☐ ☐

xxiv) Eine Matrix ist genau dann nicht invertierbar wenn Zeilenrang $\neq$ Spaltenrang. ☐ ☐

xxv) Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $m > n$. Dann gilt $\det(AB^T) = 0$. ☐ ☐

xxvi) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. ☐ ☐

xxvii) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann gilt ☐ ☐

$$\det(A + B) = \det(B + A).$$

xxviii) Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $m < n$. Dann besitzt das System $AX = 0$ nichttriviale Lösungen. ☐ ☐

xxix) Sei $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und ☐ ☐

$$\mathrm{tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; A \mapsto \mathrm{tr}(A)$$

die Spur. Dann ist $\mathrm{tr} \in V^*$.

xxx) Sei $T : V \to V^*$ ein Isomorphismum, $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}^*$ eine geordnete Basis von V^*. Dann gilt $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$. ☐ ☐

Bitte wenden!

2. *(15 Punkte)*

a) Geben Sie die Definition einer Relation auf einer Menge M an. Geben Sie die Axiome an, die eine Relation erfüllen muss, damit es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Wir definieren eine Relation auf $\mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$ wie folgt: $A, B \in \mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{R})$ erfüllen $A \sim B$, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $Av = \lambda Bv$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.

c) Sei $A \in \mathrm{Gl}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von A.

Lösung

a) Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Eine Relation ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität: Der Graph der Identitätsabbildung ist eine Teilmenge von R.

Symmetrie: R ist invariant unter Transposition, d.h. $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$.

Transitivität $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

b) **Reflexivität:** Sei $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, dann ist $Av = 1 \cdot Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, und somit gilt $A \sim A$.

Symmetrie: Sei $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, sodass $A \sim B$ ist. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $\lambda \in \mathbb{R}^*$ existiert, sodass $Bv = \lambda Av$ ist. Nach Voraussetzung existiert ein $\mu \in \mathbb{R}^*$, sodass $Av = \mu Bv$, und somit für $\lambda = \mu^{-1}$ also $Bv = \lambda Av$.

Transitivität: Sei $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, sodass $B \sim C$ ist (und sei weiterhin $A \sim B$). Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $\lambda \in \mathbb{R}^*$ existiert, sodass $Av = \lambda Cv$ ist. Nach Voraussetzung existieren $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$, sodass $Av = \mu_1 Bv$ sowie $Bv = \mu_2 Cv$. Also ist $Av = \mu_1\mu_2 Cv$ und da $\mu_1\mu_2 \in \mathbb{R}^*$ ist, folgt $A \sim C$.

c) Angenommen $A \sim B$, dann ist jeder von 0 verschiedene Vektor ein Eigenvektor von $B^{-1}A$. Insbesondere besitzt $\mathbb{R}^n$ eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ bestehend aus Eigenvektoren von $B^{-1}A$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$, sodass $B^{-1}Av_i = \lambda_i v_i$ ist. Setze $v = v_1 + \cdots + v_n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}^*$, sodass $B^{-1}Av = \lambda v$. Dann folgt

$$0 = \lambda v - B^{-1}Av = \lambda \sum_{i=1}^{n} v_i - \sum_{i=1}^{n} B^{-1}Av_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) v_i.$$

Da nach Voraussetzung $v_1 \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, ist also $\lambda_i = \lambda$ für alle $1 \leq i \leq n$ und somit $B^{-1}Av = \lambda v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Es folgt $\lambda^{-1}A = B$ und somit gilt $A \sim B \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : B = \lambda A$. Andererseits ist klar, dass für $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ von der Form $B = \lambda^{-1}A$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$ gilt $Av = \lambda(\lambda^{-1}A)v = \lambda Bv$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Also ist

$$[A]_\sim = \{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

3. *(15 Punkte)* Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten.

Siehe nächstes Blatt!

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x$, $p_3(x) = 2x^2 + x$ eine Basis von V bilden.

b) Sei $T : V \to V$ die Abbildung $p(x) \mapsto x \cdot p'(x)$. Zeigen Sie, dass T eine wohldefinierte (d.h. $T(p) \in V$ für alle $p \in V$) lineare Abbildung ist.

c) Ist T invertierbar?

d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ von V.

e) Bestimmen Sie das Urbild von $\{x^2\}$ unter T.

Lösung

a) Sei $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$, dann ist $\mathcal{E}$ eine Basis von V und es ist $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ das Bild von $\mathcal{E}$ unter der Abbildung $S : V \to V$ mit Darstellungsmatrix

$$[S]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet $\det(S) = 1$ und somit ist S invertierbar. Da S invertierbar ist, bildet S Basen auf Basen ab und weil $\mathcal{E}$ eine Basis von V ist, ist somit $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

b) Wir wissen, dass die Ableitung linear ist (da punktweise linear: in der Analysis wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n + b_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

gilt, wann immer $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sind – die Studierenden müssen dies aber nicht ausführen). Die Abbildung $p \mapsto xp$ ist linear, da die Multiplikation im Ring $P(\mathbb{R})$ distributiv und kommutativ ist. Folglich ist die Abbildung $p \mapsto xp'(x)$ eine Komposition linearer Abbildungen und damit linear.

Wir wissen aus der Analysis, dass $\deg(p') = \deg(p) - 1$ gilt, wann immer p nicht konstant ist und für konstante p ist $p' = 0$. Insbesondere ist $p' \in P_{\leq 1}(\mathbb{R})$ wann immer $p \in P_{\leq 2}(\mathbb{R})$ ist und wegen $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$ für alle p, q folgt $\deg(xp') = \deg(x) + \deg(p') \leq 1 + 1 = 2$ für alle $p \in V$.

c) Wie oben erwähnt, gilt $\deg(Tp) = 1 + \deg(p')$. Da $\deg(p') \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ ist, gilt $\deg(Tp) \neq 0$. Folglich enthält das Bild von T keine von 0 verschiedenen konstanten Polynome und somit ist T nicht surjektiv. Insbesondere also nicht invertierbar.

d) Es ist

$$[I_V]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also nur $([I_V]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}})^{-1}$ berechnen. Man beachte, dass $[I_V]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = [S]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$. Gauss-

Elimination liefert

$$([S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}|I_4) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

und folglich ist

$$([I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e) Es ist $T^{-1}(x^2)$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Tp = x^2$ und somit von der Form $p_0 + \mathrm{Ker}(T)$ für ein beliebiges Polynom p_0, sodass $Tp_0 = x^2$ gilt. Wir haben bereits gesehen, dass $P_{\leq 0}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(T)$ und weil die Darstellungsmatrix von T bezüglich $\mathcal{E}$ die Form

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit Rang 2 besitzt, ist $\mathrm{Ker}(T)$ eindimensional und folglich $\mathrm{Ker}(T) = P_{\leq 0}(\mathbb{R})$. Es ist $T(\frac{1}{2}x^2) = x^2$ und folglich

$$T^{-1}(x^2) = \tfrac{1}{2}x^2 + \mathrm{Ker}(T) = \{\tfrac{1}{2}x^2 + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Bemerkung: Es gibt viele Lösungswege in für diese Teilaufgabe. Wichtig ist hier, dass das Argument vorhanden ist, warum alle Lösungen von dieser Form sind. Also muss bei Lösung einer DGL auch die Dimension des Lösungsraumes erwähnt werden.

Es reicht nicht, eine Lösung zu finden. Wir wollen alle, also das gesamte Urbild, wissen.

4. *(15 Punkte)*

a) Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und seien $G \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{K})$ und $F \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie $\mathrm{Ker}(L_{AF}) = F^{-1}\mathrm{Ker}(L_A)$ und $\mathrm{Im}(L_{GA}) = G\mathrm{Im}(L_A)$.

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Für $a, b, c \in \mathbb{K}$ definieren wir die Gerade

$$\mathcal{G}_{a,b,c} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid ax_1 + bx_2 = c\}.$$

b) Seien $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{K}^3$. Bestimmen Sie die Kardinalität von

$$\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}.$$

Lösung

a) Es ist

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(L_{AF}) &\Leftrightarrow L_{AF}v = 0 \Leftrightarrow L_A(L_F v) = 0 \Leftrightarrow L_F v \in \mathrm{Ker}(L_A) \\ &\Leftrightarrow v \in L_F^{-1}\mathrm{Ker}(L_A) = F^{-1}\mathrm{Ker}(L_A), \\ w \in \mathrm{Im}(L_{GA}) &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n : w = L_{GA}(v) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n : w = L_G(L_A v) = G(L_A v) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n : G^{-1}w = L_A v \Leftrightarrow G^{-1}w \in \mathrm{Im}(L_A) \\ &\Leftrightarrow w \in G\mathrm{Im}(L_A). \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid a_i x_1 + b_i x_2 = c_i \quad (i = 1, 2)\right\}$$

und somit ist $\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = z$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

“$\det(A) \neq 0$”: Falls A invertierbar (bzw. vollen Rang besitzt) ist, dann existiert genau eine Lösung $x = A^{-1}z$ und somit ist

$$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\{A^{-1}z\}| = 1.$$

“$\det(A) = 0$”: Falls A nicht invertierbar ist, existieren zwei Möglichkeiten:

- Wenn $\mathrm{Rang}(A) = 0$ ist, dann ist A die Nullmatrix und es existieren die folgenden Möglichkeiten:
  - Falls $z = 0$ ist, dann gilt $Ax = z$ für alle $x \in \mathbb{K}^2$ und somit ist

    $$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\mathbb{K}^2| = |\mathbb{K}|^2.$$

  - Falls $z \neq 0$ ist, dann ist $Ax \neq z$ für alle $x \in \mathbb{K}^2$ und somit ist

    $$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\emptyset| = 0.$$

- Falls $\mathrm{Rang}(A) = 1$, dann existieren zwei Optionen:
  - Falls $z \notin \mathrm{Im}(L_A)$, dann existiert keine Lösung und folglich ist

    $$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |\emptyset| = 0.$$

Bitte wenden!

– Falls $z \in \mathrm{Im}(L_A)$, dann ist die Menge der Lösungen von der Form $x_0 + \mathrm{Ker}(L_A)$, wobei x_0 eine beliebige Lösung von $Ax = z$ ist, und eine solche existiert. Da $\mathrm{Rang}(A) = 1$ ist, ist $\dim \mathrm{Ker}(L_A) = \dim \mathbb{K}^2 - \mathrm{Rang}(A) = 1$ und somit ist $\mathrm{Ker}(L_A) \cong \mathbb{K}$. Es folgt

$$|\mathcal{G}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{G}_{a_2,b_2,c_2}| = |x_0 + \mathrm{Ker}(L_A)| = |\mathrm{Ker}(L_A)| = |\mathbb{K}|,$$

wobei wir in der zweitletzten Gleichung verwendet haben, dass die Abbildung $v \mapsto x_0 + v$ eine Bijektion ist, da invertierbar mit Inversen $v \mapsto -x_0 + v$.

5. *(15 Punkte)* Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume von V.

a) Sei $\dim W_i = m_i, i = 1, 2$ mit $m_1 \leq m_2$. Beweisen Sie, dass $\dim(W_1 \cap W_2) \leq m_1$ und $\dim(W_1 + W_2) \leq m_1 + m_2$.

b) Definieren Sie was es heisst V ist die direkte Summe von W_1 und W_2.

c) Beweisen Sie die folgende Aussage: $V = W_1 \oplus W_2$ genau dann, wenn für alle $v \in V$ eindeutige $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ existieren, sodass $v = w_1 + w_2$ gilt.

d) Sei $W_1 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A_{ij} = 0 \,\text{falls}\, i \leq j\}$ und sei W_2 die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Sowohl W_1 wie auch W_2 sind Unterräume von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Beweisen Sie, dass
$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W_1 \oplus W_2.$$

Lösung

a) Es gilt
$$W_1 \cap W_2 \subset W_1 \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1 = m_1,$$
wie in der Vorlesung bewiesen.
Es gilt aufgrund der Dimensiosformel
$$\dim(W_1{+}W_2) = \dim(W_1){+}\dim(W_2){-}\dim(W_1{\cap}W_2) \leq \dim(W_1){+}\dim(W_2) = m_1{+}m_2.$$

b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei Unterräume. V ist die direkte Summe von W_1 und W_2, wenn gelten $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

c) Angenommen $V = W_1 \oplus W_2$, sei $v \in V$. Nach Voraussetzung ist $v = w_1 + w_2$ für zwei Vektoren $w_i \in W_i$. Seien $\tilde{w}_i \in W_i$, sodass $v = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, dann gilt also
$$w_1 - \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 - w_2$$
und da $w_i, \tilde{w}_i \in W_i$ sind, folgt $w_i - \tilde{w}_i \in W_i$ und also ist $w_1 - \tilde{w}_1 \in W_1$ und $w_1 - \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 - w_2 \in W_2$, sprich $w_1 - \tilde{w}_1 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Aus der Eindeutigkeit der additiven Inversen folgt $w_1 = \tilde{w}_1$ und folglich
$$v = w_1 + w_2 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = w_1 + \tilde{w}_2 \Rightarrow w_2 = \tilde{w}_2$$

Siehe nächstes Blatt!

aufgrund der Kürzungsregeln in Gruppen. Dies zeigt, dass die Darstellung $v = w_1 + w_2$ eindeutig ist.

Seien nun W_1, W_2 Unterräume von V, sodass jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig als Summe $v = w_1 + w_2$ mit $w_i \in W_i$ schreiben lässt. Dann gilt insbesondere $V = W_1 + W_2$. Wir müssen also nur folgern, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist. Sei nun $v \in W_1 \cap W_2$. Dann sind $v = w_1 + 0$ mit $v = w_1 \in W_1$ und $v = 0 + w_2$ mit $v = w_2 \in W_2$ zwei Zerlegungen. Da jede solche Zerlegung eindeutig durch v bestimmt ist, gilt also $w_2 = 0$ (bzw. $w_1 = 0$) und somit $v = 0$. Das zeigt $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

d) Sei $A \in W_1 \cap W_2$. Es gilt $A_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i \leq j \leq n$, da $A \in W_1$. Sei $j < i$, dann gilt wegen $A \in W_2$, dass $A_{ij} = A_{ji}$ und da $A_{ji} = 0$ ist, folgt $A_{ij} = 0$. Dies zeigt, dass $A = 0$ ist und somit gilt $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W_1 + W_2$ ist. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wir definieren Matrizen $U, S \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ durch

$$U_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \leq i \leq j \leq n \\ A_{ij} - A_{ji} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad S_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{falls } 1 \leq i \leq j \leq n \\ A_{ji} & \text{sonst} \end{cases}$$

und wir erhalten $A = U + S$, wobei $U \in W_1, S \in W_2$ nach Konstruktion.

6. *(15 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei W ein Unterraum.

a) Sei $W^\perp = \{f \in V^* \mid W \subset \operatorname{Ker}(f)\}$. Zeigen Sie, dass $W^\perp \subset V^*$ ein Unterraum ist.

b) Definieren Sie die Abbildung

$$\Phi : W^\perp \to (V/W)^*, \Phi(f)(v + W) = f(v) \quad (v \in V).$$

Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist.

c) Zeigen Sie, dass Φ linear ist.

d) Zeigen Sie, dass Φ invertierbar ist und dass somit gilt

$$(V/W)^* \cong W^\perp.$$

e) Sei $p : V \to V/W$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass p^* unter der Identifikation $(V/W)^* \cong W^\perp$ mit der Einbettung $i : W^\perp \hookrightarrow V^*$ übereinstimmt.

Lösung

a) Es ist $0 \in W^\perp$ und somit $W^\perp \neq \emptyset$. Seien $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Für $w \in W$ gilt

$$(f_1 + \alpha f_2)(w) = f_1(w) + \alpha f_2(w) = 0$$

und somit $f_1 + \alpha f_2 \in W^\perp$. Da $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig waren, ist $W^\perp$ also ein Unterraum von V^*.

b) Angenommen $v + W = v' + W$ und $f \in W^\perp$, dann ist $v' - v = w$ für ein $w \in W$ und folglich
$$f(v') = f(v + w) = f(v) + f(w) = f(v)$$
und somit ist $\Phi(f)(v+W)$ nicht abhängig von der Wahl des Repräsentanten von $v+W$. Insbesondere ist $\Phi(f)$ wohldefiniert.

c) Seien $f_1, f_2 \in W^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$, dann ist
$$\Phi(f_1+\alpha f_2)(v+W) = (f_1+\alpha f_2)(v) = f_1(v)+\alpha f_2(v) = \Phi(f_1)(v+W)+\alpha\Phi(f_2)(v+W).$$
Da v beliebig war, gilt also $\Phi(f_1 + \alpha f_2) = \Phi(f_1) + \alpha\Phi(f_2)$ und folglich ist Φ linear.

d) Sei $f \in \operatorname{Ker}(\Phi)$, dann ist $\Phi(f)(v + W) = f(v) = 0$ für alle $v \in V$, und folglich ist $f = 0$. Insbesondere ist Φ also injektiv.

Sei $g \in (V/W)^*$ und sei $p : V \to V/W$ die kanonische Projektion. Wir definieren $f \in V^*$ durch $f(v) = (g \circ p)(v)$. Da p und f linear sind, ist auch f linear und somit wohldefiniert. Für $w \in W$ gilt $f(w) = g(p(w)) = g(W) = 0$, da W das neutrale Element in V/W ist. Also ist $f \in W^\perp$. Wir berechnen
$$\Phi(f)(v + W) = f(v) = g(p(v)) = g(v + W)$$
und folglich ist $\Phi(f) = g$. Da g beliebig war, ist Φ surjektiv und also ein Isomorphismus.

e) Wir wissen aus der Vorlesung, dass $p^*(f) = f \circ p$ für alle $f \in (V/W)^*$ ist.

Unter der Identifikation $\Phi : W^\perp \xrightarrow{\sim} (V/W)^*$ erhalten wir für beliebige $f \in W^\perp$ und $v \in V$:
$$p^*(\Phi f)(v) = \Phi(f)(p(v)) = \Phi(f)(v + W) = f(v)$$
und somit ist $p^*(\Phi f) = f$, wie gewünscht.

7. *(15 Punkte)* Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

a) Seien $S, T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ nicht null und sei $\operatorname{Rang}(S) \neq \operatorname{Rang}(T)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{S, T\}$ linear unabhängig ist.

b) Seien $S, T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ nicht null und sei $\operatorname{nullity}(S) \neq \operatorname{nullity}(T)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{S, T\}$ linear unabhängig ist.

c) Geben Sie die Definition einer Projektion $P \in \operatorname{End}(V)$. Ist die Komposition zweier Projektionen wieder eine Projektion?

d) Seien $V_1, V_2 \subset V$, $W_1, W_2 \subset W$ Unterräume, sodass $V = V_1 \oplus V_2$ sowie $W = W_1 \oplus W_2$ gilt. Seien $P \in \operatorname{End}(V)$ und $Q \in \operatorname{End}(W)$ die Projektionen auf V_1 bzw. W_1 mit $\operatorname{Ker}(P) = V_2$ und $\operatorname{Ker}(Q) = W_2$.

Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\Phi, \Psi : \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(V, W)$ gegeben durch $\Phi(T) = TP$ und $\Psi(T) = QT$ Projektionen sind. Bestimmen Sie jeweils den Kern dieser Abbildungen.

Lösung

Siehe nächstes Blatt!

a) Sei $\mathrm{Rang}(S) < \mathrm{Rang}(T)$. Dann existiert ein $w \in \mathrm{Im}(T)$ mit $w \notin \mathrm{Im}(S)$. Sei $v \in V$, sodass $w = Tv$. Angenommen $\alpha S + \beta T = 0$, dann ist insbesondere $0 = \alpha Sv + \beta Tv = S(\alpha v) + \beta w$. Insbesondere ist also $-\beta w \in \mathrm{Im}(S)$ und folglich ist $\beta = 0$, da ansonsten $-\beta \in \mathbb{K}^*$ invertierbar ist und $w \in (-\beta)^{-1}\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(S)$ folt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $0 = \alpha S$. Da $S \neq 0$, ist also $\alpha = 0$. Insbesondere ist also $\{S, T\}$ linear unabhängig.

   Der Fall $\mathrm{Rang}(S) > \mathrm{Rang}(T)$ folgt analog nach Umbenennung der Abbildungen.

b) Sei $\mathrm{nullity}(S) < \mathrm{nullity}(T)$, dann folgt

$$\mathrm{Rang}(S) = \dim(V) - \mathrm{nullity}(S) > \dim(V) - \mathrm{nullity}(T) = \mathrm{Rang}(T)$$

   und folglich gilt $\mathrm{Rang}(S) \neq \mathrm{Rang}(T)$. Die Behauptung folgt also aus der vorangehenden Teilaufgabe.

   Der Fall $\mathrm{nullity}(S) > \mathrm{nullity}(T)$ folgt analog nach Umbenennung der Abbildungen.

c) Eine Abbildung $P \in \mathrm{End}(V)$ heisst Projektion, falls gilt $P^2 = P$. Im Allgemeinen ist die Komposition zweier Projektionen keine Projektion. Als Beispiel nehmen wir die Komposition der Projektionen $P_1, P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben wie oben durch die Zerlegungen

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 = \mathbb{R}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{R}(e_1 - e_2),$$

   $\mathrm{Ker}(P_1) = \mathbb{R}e_1$, $\mathrm{Im}(P_1) = \mathbb{R}e_2$, $\mathrm{Ker}(P_2) = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$, $\mathrm{Im}(P_2) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$. Man beachte, dass

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$$

   eine Zerlegung von e_1 in Summanden aus $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$ und $\mathbb{R}(e_1 - e_2)$ ist. Folglich ist

$$P_1P_2(e_1) = P_1\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)\big) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1$$

   und insbesondere

$$(P_1P_2)^2(e_1) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}P_1P_2(e_1) = \tfrac{1}{2}e_1 \neq \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1$$

   und somit ist $(P_1P_2)^2 \neq P_1P_2$, also P_1P_2 keine Projektion.

d) Es gilt $\Phi^2(T) = \Phi(\Phi(T)) = \Phi(TP) = TP^2 = TP = \Phi(T)$ und $\Psi^2(T) = \Psi(\Psi(T)) = \Psi(QT) = Q^2T = QT = \Psi(T)$, da $P^2 = P$ und $Q^2 = Q$.

   Wir wissen aus den Übungen, dass $V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$ und $W = \mathrm{Ker}(Q) \oplus \mathrm{Im}(Q)$ ist, wobei nach Voraussetzung $\mathrm{Im}(P) = V_1, \mathrm{Ker}(P) = V_2, \mathrm{Im}(Q) = W_1$ und $\mathrm{Ker}(Q) = W_2$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
T \in \mathrm{Ker}(\Phi) &\Leftrightarrow \forall v \in V : \Phi(T)(v) = T(Pv) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall v \in V : Pv \in \mathrm{Ker}(T)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Ker}(T)\\
&\Leftrightarrow V_1 \subset \mathrm{Ker}(T),\\
T \in \mathrm{Ker}(\Psi) &\Leftrightarrow \forall v \in V : \Psi(T)(v) = Q(Tv) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall v \in V : Tv \in \mathrm{Ker}(Q)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(Q)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) \subset W_2.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\Phi) =& \{T \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid V_1 \subset \operatorname{Ker}(T)\},\\ \operatorname{Ker}(\Psi) =& \{T \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Im}(T) \subset W_2\}.\end{aligned}$$