Prüfungsaufgaben

1. *(30 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Aufgabenblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

	Wahr	Falsch
i) Seien A und B zwei beliebige Mengen. Wenn $A \cap B = A \cup B$, dann gilt $A = B$.	☐	☐
ii) Sei X eine beliebige Menge, seien $A, B \subset X$, dann gilt $$A \cap (B \cup A)^c = \emptyset.$$	☐	☐
iii) Die Vorschrift $G = \mathbb{N}, a * b := \min\{a, b\}$ definiert eine Gruppe $(G, *)$.	☐	☐
iv) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subset X$, dann gilt $$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$	☐	☐
v) Seien $p_1, p_2 \in P(\mathbb{R})$ mit $\deg(p_1) = \deg(p_2) = n$, dann ist $$\deg(p_1 + p_2) = n.$$	☐	☐
vi) Sei U ein Unterraum eines Vektorraumes V und $v, w \in V$, $v \neq w$. Es ist möglich, dass die Nebenklasse $v + U$ in $w + U$ enthalten ist.	☐	☐
vii) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $$\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{span}(S_1) \cup \operatorname{span}(S_2).$$	☐	☐
viii) Seien V ein Vektorraum, $S \subset V$ eine Teilmenge und W ein Unterraum von V. Wenn $S \subset W$, dann gilt $W \subset \operatorname{span}(S)$.	☐	☐
ix) Sei V ein Vektorraum mit einem unendlichen Erzeugendensystem. Dann ist V unendlich-dimensional.	☐	☐

Bitte wenden!

Wahr Falsch

x) Seien $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ linear unabhängig. Dann ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig. ☐ ☐

xi) Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei geordnete Basen eines Vektorraumes V. Dann sind die Mengen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gleich. ☐ ☐

xii) Seien V ein Vektorraum und $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume mit $\dim W_i = m_i$ für $i = 1, 2$ und sei $W_1 \oplus W_2 = V$. So gilt ☐ ☐

$$\dim (W_1 \oplus W_2) = m_1 + m_2.$$

xiii) Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume mit $\dim(U_1) = 1, \dim(U_2) = 2$. Dann gilt ☐ ☐

$$V = U_1 + U_2.$$

xiv) Seien V und W Vektorräume, $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$ beliebig. Dann existiert eine lineare Abbildung $T : V \to W$ mit $T(v_1) = w_1$ und $T(v_2) = w_2$. ☐ ☐

xv) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $W \subset V$ ein nichttrivialer Unterraum. So ist ☐ ☐

$$\dim (V/W) = \frac{\dim(V)}{\dim(W)}.$$

xvi) Sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Falls das Bild von T eine Basis von W enthält, ist T surjektiv. ☐ ☐

xvii) Jeder Unterraum eines Vektorraumes V ist der Kern einer linearen Abbildung $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ für einen geeigneten Vekorraum W. ☐ ☐

xviii) Jede Basiswechselmatrix ist invertierbar. ☐ ☐

xix) Seien U, V, W Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Gegeben seien lineare Abbildungen $T : U \to V$ und $S : V \to W$, dann gilt ☐ ☐

$$[S \circ T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \, [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

xx) Seien V, W endlichdimensional, $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ so gilt: T ist genau dann injektiv, wenn die duale Abbildung $T^* : W^* \to V^*$ surjektiv ist. ☐ ☐

xxi) Die Transponierte einer Elementarmatrix ist wieder eine Elementarmatrix. ☐ ☐

Siehe nächstes Blatt!

Wahr Falsch

xxii) Sei $A \in M_{n\times 1}(K)$ und $B \in M_{1\times n}(K)$ mit $n > 1$. Dann ist es möglich, dass $\mathrm{Rang}(AB) = n$. ☐ ☐

xxiii) Die Elementarmatrizen in $M_{n\times n}(K)$ zusammen mit der Matrixmultiplikation bilden eine Gruppe. ☐ ☐

xxiv) Für eine quadratische Matrix A gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ☐ ☐

$$\mathrm{Rang}\left(A^n\right) \geq \mathrm{Rang}\left(A^{n+1}\right).$$

xxv) Seien $A, B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, dann gilt ☐ ☐

$$\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA).$$

xxvi) Das inhomogene System $AX = b$ habe mindestens zwei Lösungen. Dann ist der Kern von L_A mindestens zweidimensional. ☐ ☐

xxvii) Sei $(A'|b')$ entstanden aus $(A|b)$ durch eine endliche Folge von elementaren Spaltenumformungen. Dann sind die Systeme $(A'|b')$ und $(A|b)$ äquivalent. ☐ ☐

xxviii) Sei A eine $n \times n$ Matrix von Rang n. Dann ist die Zeilenstufenform von A die Identitätsmatrix I_n. ☐ ☐

xxix) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\det(A^T) = -\det(A)$. ☐ ☐

xxx) Sei E eine Elementarmatrix, so gilt $\det(E) = \pm 1$. ☐ ☐

2. *(15 Punkte)*

a) Sei M eine Menge. Geben Sie die Definition einer Äquivalenzrelation auf M.

b) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so gilt $\forall a, b \in M : [a] \cap [b] \neq \emptyset \Leftrightarrow [a] = [b]$.

c) Betrachten Sie die folgende Relation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder } x_1 = x_2 = 0 \\ \text{oder es gilt } x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0 \wedge \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.

d) Finden Sie eine explizite Beschreibung der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus Teil c) und charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen geometrisch.

3. *(15 Punkte)*

a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Beweisen Sie, dass die Schnittmenge einer beliebigen, nicht-leeren Menge von Unterräumen von V wieder ein Unterraum ist.

b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier Unterräume eines Vektorraumes im Allgemeinen kein Unterraum ist.

c) Beweisen Sie folgende Aussage: Sei V ein nicht-trivialer, endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $S \subset V$ eine Teilmenge. Wenn sich jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination der Elemente von S darstellen lässt, dann ist S eine Basis von V.

d) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = 4$. Dann gibt es ein $f \in V^*$ mit $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

4. *(15 Punkte)*

a) Seien V, W Vektorräume über K und $T \in \text{Abb}(V, W)$ beliebig. Wann ist T eine lineare Abbildung? Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom(V, W)} \neq \emptyset$.

b) Geben Sie (ohne Beweis) die natürliche Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Abb}(V, W)$ an und zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(V, W) \subset \mathrm{Abb}(V, W)$ ein Unterraum ist.

c) Sei nun $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ die Abbildung definiert durch $T(M) = MA$ für alle $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, wobei $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}}$ von T für die geordnete Basis

$$\mathcal{B} = \left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Siehe nächstes Blatt!

5. *(15 Punkte)* Im Folgenden sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Wir definieren für Endomorphismen von V die *Spur* durch

$$\operatorname{tr}(T) := \operatorname{tr}([T]_{\mathcal{B}}) \quad \big(T \in \operatorname{End}(V)\big),$$

wobei die Spur einer Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ definiert ist durch $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

a) Zeigen Sie, dass für $S, T \in \operatorname{End}(V)$ gilt $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$.

b) Zeigen Sie, dass die Spur $\operatorname{tr} : \operatorname{End}(V) \to K$ linear und von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ unabhängig ist.

c) Sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass für die zu T duale Abbildung $T^* \in \operatorname{End}(V^*)$ gilt $\operatorname{tr}(T^*) = \operatorname{tr}(T)$.

6. *(15 Punkte)*

a) Beweisen Sie: Das Gleichungssystem $AX = b$ besitzt mindestens eine Lösung genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A \mid b)$.

b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 3 & 4 & 4\lambda - 2 \\ -3 & -\lambda - 3 & -2\lambda^2 + 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem $AX = b$ in Abhängigkeit des Parameters λ.

7. *(15 Punkte)*

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix.

1. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$.
2. Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass die Aussage für gerade n nicht gelten muss.

b) Wir definieren $A_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wie folgt: Auf und unterhalb der Diagonalen ist jeder Eintrag gleich 1 und oberhalb der Diagonalen sind alle Einträge gleich 5:

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & 5 & \dots & 5 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A_n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

c) Seien $A, B \in \operatorname{Gl}_n(\mathbb{R})$. Berechnen Sie

$$\det(BA^TB^{-1}) \cdot \det\big((B^{-1})^T A^{-1} (BA^T)^T + I_n\big) \cdot \det(A^{-1}).$$