Musterlösung

2. **a)** Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Wir schreiben $a \sim b$ für $(a, b) \in R$. Eine Äquivalenzrelation M ist eine Relation auf M mit den folgenden Eigenschaften:

- R ist *reflexiv*, d.h. $\forall a \in M : a \sim a$,
- R ist *symmetrisch*, d.h. $\forall a, b \in M : a \sim b \Rightarrow b \sim a$, und
- R ist *transitiv*, d.h. $\forall a, b, c \in M : a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

b) Wir erinnern uns, dass $[a] = \{\, b \in M \mid a \sim b \,\}$.

“⇒” Sei $c \in [a] \cap [b]$, dann gelten $a \sim c$ und $b \sim c$. Symmetrie impliziert $c \sim b$ und Transitivität impliziert $a \sim b$ und aus Symetrie folgt also $b \sim a$. Sei $d \in [a]$, dann ist $a \sim d$, wegen Transitivität also $b \sim d$ und folglich $d \in [b]$. Dies zeigt $[a] \subset [b]$. Sei nun $d \in [b]$, dann ist $b \sim d$ und wegen Transitivität auch $a \sim d$. Also ist $d \in [a]$. Dies zeigt $[b] \subset [a]$.

“⇐” Da $a \sim a$, gilt $a \in [a]$. Falls $[a] = [b]$, dann folgt also $a \in [a] \cap [b]$.

c) **Reflexivität** Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Falls $x = 0$, dann ist $(0, y) \sim (0, y)$ nach Definition. Andernfalls gilt sicherlich $\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$ und somit $(x, y) \sim (x, y)$.

Symmetrie Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. Falls $x_1 = x_2 = 0$, dann $(0, y_2) \sim (0, y_1)$ und folglich $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$. Andernfalls gilt $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ und somit auch $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$, also ist $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$.

Transitivität Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$. Falls $x_1 = 0$, dann ist $x_2 = 0$ wegen $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und folglich auch $x_3 = 0$ wegen $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$. Wegen $(0, y_1) \sim (0, y_3)$ folgt $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$. Andernfalls folgen auf dieselbe Weise $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ und $x_3 \neq 0$. Wegen $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ gelten $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ und $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$. Insbesondere also $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_3}{x_3}$ und somit $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

d) Geometrisch beschreibt die Relation die Menge der Geraden durch den Ursprung. Genauer: Seien $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dann gilt $(x, y) \sim (x', y')$ genau dann, wenn (x, y) und (x', y') auf einer Gerade liegen, bzw. wenn $(x', y') = c(x, y)$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Sei also $(x, y) \sim (x', y')$. Falls $x = 0$, dann ist $x' = 0$. Da $y \neq 0$ und $y' \neq 0$, existiert $c \in \mathbb{R}$, so dass $y' = cy$ und also $(x', y') = (0, y') = (0, cy) = c(x, y)$. Andernfalls gilt $x \neq 0$, also auch $x' \neq 0$ und $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$. Es folgt $y' = \frac{x'}{x} y$ und $x' = \frac{x'}{x} x$, bzw. $(x', y') = \frac{x'}{x}(x, y)$. Somit haben wir gezeigt, dass (x', y') auf der Geraden durch den Ursprung und durch (x, y).

Es liege nun (x', y') auf der Geraden durch $(0, 0)$ und (x, y), d.h. $(x', y') = (cx, cy) = c(x, y)$. Falls $x = 0$, dann ist $x' = cx = 0$ und folglich $(x', y') = (0, cy) \sim (0, y) = (x, y)$. Andernfalls sind $x' = cx \neq 0$ sowie $x \neq 0$ und also $\frac{y'}{x'} = \frac{cy}{cx} = \frac{y}{x}$ und somit $(x', y') \sim (x, y)$.

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Falls $x = 0$, dann ist die Gerade durch $(0, 0)$ und (x, y) gegeben durch $\mathbb{R}(0, 1)$, und folglich $[(0, 1)] = [(x, y)]$. Falls $x \neq 0$, dann ist $x(1, \frac{y}{x})$ auf der Geraden durch $(0, 0)$ und (x, y), und folglich ist $[(1, \frac{y}{x})] = [(x, y)]$. Die Menge der Äquivalenzklassen ist also explizit gegeben durch

$$\big\{[(0, 1)]\big\} \sqcup \big\{[(1, r)] \mid r \in \mathbb{R}\big\}.$$

3. **a)** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge, so dass $U_i \subset V$ für jedes $i \in I$ ein Unterraum von V ist. Sei $W := \bigcap_{i \in I} U_i$. Wir zeigen, dass W ein Unterraum von V ist.

"$W \neq \emptyset$": $\forall i \in I : 0 \in U_i$, folglich $0 \in \bigcap_{i \in I} U_i = W$ und also $W \neq \emptyset$, da $I \neq \emptyset$.

"$v, w \in W, \lambda \in W \Rightarrow v + \lambda w \in W$": $v \in W, w \in W$ implizieren $v, w \in U_i$ für alle $i \in I$, und da U_i für jedes $i \in I$ ein Unterraum ist, gilt auch $v + \lambda w \in U_i$ für alle $i \in I$. Folglich ist $v + \lambda w \in \bigcap_{i \in I} U_i = W$.

b) Betrachte die beiden Unterräume

$$U_1 = \big\{(x, 0)^T \mid x \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ und } U_2 = \big\{(0, y)^T \mid y \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann ist $(1, 1) \notin U_1 \cup U_2$, da ansonsten entweder $(1, 1) = (x, 0)$ für ein $x \in \mathbb{R}$, oder $(1, 1) = (0, y)$ für ein $y \in \mathbb{R}$, was absurd ist, da $1 \neq 0$. Andererseits ist $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ eine Linearkombination von Elementen in $U_1 \cup U_2$. Wäre $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum, so wäre also $(1, 1) \in U_1 \cup U_2$. Widerspruch!

c) Eine Basis ist per Definition ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Nach Annahme ist S ein Erzeugendensystem von V. Wir müssen also nur zeigen, dass S linear unabhängig ist, d.h. 0 lässt sich nicht als nicht-triviale Linearkombination endlicher Teilmengen von S darstellen. Seien $u_1, \ldots, u_n \in S$ verschieden

Siehe nächstes Blatt!

und $0_V = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Da $\forall v \in V : 0_V = 0 \cdot v$, ist auch $0_V = \sum_{i=1}^n 0 \cdot u_i$. Wegen der Eindeutigkeit gilt also $\lambda_i = 0$ und da $u_1, \dots, u_n \in S$ beliebig waren, ist S somit linear unabhängig.

d) Da $f \in V^* = \operatorname{Hom}(V, K)$, gilt $\dim \operatorname{Im}(f) \leq \dim K = 1$. Wegen der Dimensionsformel ist also

$$\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim(V) - \dim \operatorname{Im}(f) \geq \dim(V) - 1 = 3.$$

Die Aussage ist also falsch.

4. a) $T \in \operatorname{Abb}(V, W)$ ist linear, falls für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda \in K$ gelten

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \\ T(\lambda v) &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

(Alternativ ist T linear, falls für alle $v_1, v_2 \in V$ und für alle $\lambda \in K$ gilt

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2).)$$

Die Abbildung $T_0 : V \to W$ definiert durch $T_0(v) = 0_W$ für alle $v \in V$ ist linear. Tatsächlich gelten für beliebige $v_1, v_2 \in V$ und beliebiges $\lambda \in K$: $T_0(v_1 + \lambda v_2) = 0_W$ und $T_0(v_1) + \lambda T_0(v_2) = 0_W + \lambda 0_W = 0_W$, also auch

$$T_0(v_1 + \lambda v_2) = T_0(v_1) + \lambda T_0(v_2).$$

Es ist also $T_0 \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und folglich $\operatorname{Hom}(V, W) \neq \emptyset$.

b) $\operatorname{Abb}(V, W)$ ist ein Vektorraum über K, wobei für $T, T_1, T_2 \in \operatorname{Abb}(V, W)$ sowie $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(v) &:= T_1(v) + T_2(v) \quad (v \in V) \\ (\lambda T)(v) &:= \lambda T(v) \quad (v \in V) \end{aligned}$$

Das neutrale Element in $\operatorname{Abb}(V, W)$ ist die Abbildung T_0 aus Teilaufgabe a), da $(T + T_0)(v) = T(v) + T_0(v) = T(v) + 0_W = T(v)$ für alle $v \in V$ und somit $T + T_0 = T$.

Wir haben in Teilaufgabe a) bereits gezeigt, dass $T_0 \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Somit reicht es zu zeigen, dass aus $T_1, T_2 \in \operatorname{Hom}(V, W), \lambda \in K$ folgt $T_1 + \lambda T_2 \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Seien $v_1, v_2 \in V$ beliebig und sei $\mu \in K$, dann ist

$$\begin{aligned} (T_1 + \lambda T_2)(v_1 + \mu v_2) &= T_1(v_1 + \mu v_2) + (\lambda T_2)(\mu v_2) \\ &= T_1(v_1) + \mu T_1(v_2) + \lambda T_2(v_1) + \mu \lambda T_2(v_2) \\ &= (T_1 + \lambda T_2)(v_1) + \mu (T_1 + \lambda T_2)(v_2) \end{aligned}$$

und somit ist $T_1 + \lambda T_2$ linear. Folglich ist $\operatorname{Hom}(V, W)$ ein Unterraum von $\operatorname{Abb}(V, W)$.

Bitte wenden!

c) Seien $M_1, M_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist wegen in der Vorlesung gezeigter Eigenschaften der Matrixmultiplikation

$$T(M_1 + \lambda M_2) = (M_1 + \lambda M_2)A = M_1 A + \lambda M_2 A = T(M_1) + \lambda T(M_2)$$

und somit T linear.

d) Wir erinnern uns, dass $[T]_{\mathcal{B}} = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$, wobei

$$T(E_j) = \sum_{i=1}^{4} t_{ij} E_i.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
T(E_1) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3E_1 + 2E_2 \\
T(E_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_1 + 4E_2 \\
T(E_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 3E_3 + 2E_4 \\
T(E_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -E_3 + 4E_4
\end{aligned}$$

und es folgt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Im Folgenden ist $n := \dim V$.

a) Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass $[TS]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}$. Es reicht also zu zeigen, dass für $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA).
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass $[\cdot]_{\mathcal{B}} : \mathrm{End}(V) \to M_{n\times n}(K)$ ein Isomorphismus ist und insbesondere linear. Es gilt also

$$\mathrm{tr}(T + \lambda S) = \mathrm{tr}([T]_{\mathcal{B}} + \lambda [S]_{\mathcal{B}})$$

und folglich reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ linear ist. Seien also $A, B \in M_{n\times n}(K)$ und $\lambda \in K$, dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A + \lambda B) &= \sum_{i=1}^{n} (A + \lambda B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + \lambda B_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \lambda \mathrm{tr}(B)\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Sei $\mathcal{C}$ eine weitere geordnete Basis von V, dann gilt:

$$\forall T \in \mathrm{End}(V) : [T]_{\mathcal{C}} = [I_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} [I_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}},$$

wobei $Q := [I_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Gl}_n(K)$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ ist. Es gilt $[I_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = Q^{-1}$ und folglich

$$\mathrm{tr}([T]_{\mathcal{C}}) = \mathrm{tr}(Q^{-1} [T]_{\mathcal{B}} Q) = \mathrm{tr}([T]_{\mathcal{B}} Q Q^{-1}) = \mathrm{tr}([T]_{\mathcal{B}})$$

unter Verwendung dessen, was wir in Teilaufgabe a) gezeigt haben.

c) Sei $\mathcal{B}^*$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis, dann haben wir in der Vorlesung bewiesen, dass $[T^*]_{\mathcal{B}^*} = [T]^T_{\mathcal{B}}$ und folglich ist

$$\mathrm{tr}(T^*) = \mathrm{tr}([T]^T_{\mathcal{B}})$$

und es reicht zu zeigen, dass

$$\forall A \in M_{n\times n}(K) : \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T).$$

Da $(A^T)_{ii} = A_{ii}$ für alle $1 \leq i \leq n$ folgt sofort

$$\mathrm{tr}(A^T) = \sum_{i=1}^{n} (A^T)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$

6. **a)** Seien $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$, dann besitzt $AX = b$ genau dann eine Lösung, wenn $b \in \mathrm{Im}(L_A)$, wobei $L_A : K^n \to K^m$ die Abbildung $L_A(x) := Ax$ ist. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass $\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{span}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$, wobei $A^{(j)}$ die j-te Spalte von A ist. Es folgt

$$\exists x \in K^n : Ax = b \Leftrightarrow b \in \mathrm{span}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \operatorname{span}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} = \operatorname{span}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b\} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}(L_A) = \operatorname{Im}(L_{(A|b)}) \\
&\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(L_A) = \dim \operatorname{Im}(L_{(A|b)}) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(L_A) = \operatorname{Rang}(L_{(A|b)}),
\end{aligned}
$$

wobei wir für die zweitletzte Äquivalenz verwendet haben, dass für einen endlichdimensionalen V Vektorraum und einen Unterraum $W \subset V$ genau dann $V = W$ gilt, wenn $\dim V = \dim W$.

b) Wir verwenden elementare Zeilenumformungen:

$$
\begin{aligned}
(A \mid b) &\xrightarrow[Z_3+3Z_1]{Z_2-3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -\lambda & -2\lambda^2+3\lambda+2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z_3+\lambda Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda+2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z_1-Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda+2 & -1-\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da $-\lambda^2 + \lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)$, müssen wir drei Fälle unterscheiden.

"$\lambda = 2$": Falls $\lambda = 2$, dann ist

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda+2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

und folglich $3 = \operatorname{Rang}(A \mid b) \neq \operatorname{Rang}(A) = 2$. Also besitzt das System $AX = b$ keine Lösung.

"$\lambda = -1$": Falls $\lambda = -1$, dann ist

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda+2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

und $2 = \operatorname{Rang}(A \mid b) = \operatorname{Rang}(A)$. Folglich besitzt $AX = b$ eine Lösung und für jede Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ ist die Lösungsmenge gegeben durch $x + \operatorname{Ker}(L_A)$. Wir berechnen $\operatorname{Ker}(L_A)$. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass

$$
\forall F \in Gl_m(K) \forall M \in M_{m\times n}(K) : \operatorname{Ker}(L_{FM}) = \operatorname{Ker}(L_M)
$$

folglich ist

$$
\operatorname{Ker}(L_A) = \operatorname{Ker}(L_B)
$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathrm{Rang}(B) = 2$, ist $\dim \mathrm{Ker}(L_B) = 1$ und also folgt aus $(-2, 3, 1)^T \in \mathrm{Ker}(L_B)$, dass

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren haben wir in der Vorlesung gezeigt, dass das Gleichungssystem $AX = b$ und das Gleichungssystem $BX = c$ mit $c = (2, -1, 0)$ äquivalent sind, sprich für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $Ax = b$ genau dann, wenn $Bx = c$. Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Lösungsmenge von $AX = b$ gegeben durch

$$\mathscr{L}_{AX=b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Alternativ bestimmt man die Lösungsmenge durch einsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{rcr} x + 2z & = & 2 \\ y - 3z & = & -1 \\ z & = & z \end{array}$$

und folglich ist $\mathscr{L}_{Ax=b} = \{(2, -1, 0) + z(-2, 3, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$.)

“$\lambda^2 - \lambda - 2 \neq 0$”: Falls $\lambda \neq 2$ und $\lambda \neq -1$, dann ist $\mathrm{Rang}(B) = 3$ und folglich $B \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, wobei mit $\delta := -\lambda^2 + \lambda + 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\delta^{-1} \\ 0 & 1 & (2 - \lambda)\delta^{-1} \\ 0 & 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen der Äquivalenz von $AX = b$ und $BX = c$ für $c = (2, -1, -\lambda - 1)^T$ und der Invertierbarkeit von B folgt $\mathscr{L}_{AX=b} = \mathscr{L}_{BX=c} = \{B^{-1}c\}$ und also

$$\mathscr{L}_{AX=b} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - 2\delta^{-1}(-\lambda - 1) \\ -1 + (2\lambda)\delta^{-1}(-\lambda - 1) \\ \delta^{-1}(-\lambda - 1) \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{\lambda - 2} \begin{pmatrix} 2\lambda - 6 \\ 4 - 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Lösen mittels einsetzen in ZSF (wie im Falle $\lambda = -1$) ist auch okay!)

7. **a)** i. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn $A^T = -A$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\det(A^T) = \det(A)$. Folglich

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

unter verwendung der Multilinearität und unter Verwendung von n ungerade folgt $\det(A) = -\det(A)$. Da $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist auch $\det(A) \in \mathbb{R}$ und es folgt $\det(A) = 0$.

ii. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -A$ und somit A schiefsymmetrisch. Andererseits ist $\det(A) = 0 - (-1) = 1$.

b) Wir wenden Spaltenumformungen der Form $S^{(j)} - 5S^{(1)}$ für $2 \leq j \leq n$ an und erhalten eine Matrix $\tilde{A}_n$, wobei für $2 \leq j \leq n$ gilt

$$(\tilde{A}_n)_{ij} = (S^{(j)} - 5S^{(1)})_i = (S^{(j)})_i - 5(S^{(1)})_i = \begin{cases} 5 - 5 = 0 & \text{falls } i < j \\ 1 - 5 = -4 & \text{sonst} \end{cases}$$

und insbesondere ist $\tilde{A}_n$ eine obere Dreiecksmatrix mit Eintrag

$$(\tilde{A}_n)_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \\ -4 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonaleinträge ist, und mit $\det(A_n) = \det(\tilde{A}_n)$ (was in der Vorlesung gezeigt wurde) folgt $\det(A_n) = (-4)^{n-1}$.

c) Wir schreiben $M^{-T} := (M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
&\det(BA^TB^{-1})\det(B^{-T}A^{-1}(BA^T)^T + I_n)\det(A^{-1}) \\
&\quad = \det(BA^TB^{-1})\det(B^{-T}A^{-1}AB^T + I_n)\det(A^{-1}) \\
&\quad = \det(BA^TB^{-1})\det(2I_n)\det(A^{-1}) \\
&\quad = \det(B)\underbrace{\det(A^T)}_{=\det(A)}\underbrace{\det(B^{-1})}_{=\det(B)^{-1}}(2^n)\underbrace{\det(A^{-1})}_{\det(A)^{-1}} = 2^n
\end{aligned}$$