Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

7. August 2018

Analysis I & II
Prüfung

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

- Prüfungsdauer: **240 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: 4 A4-Blätter (= 8 Seiten) selber verfasst. Eine Formelsammlung gemäss der in der Vorlesung verteilten Liste. Es sind keine Taschenrechner erlaubt.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Leginummer. Lassen Sie an den Rändern ca. 2 cm für die Korrektur frei.
- Begründen Sie Ihre Lösungen (Ausnahmen: Aufgabe 4 und Aufgabe 5). Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen. Wenn Sie ein Resultat aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welches Sie sich beziehen!
- Aufgabe 4 ist eine Multiple-Choice-Aufgabe. Zu jeder Frage gibt es **nur eine richtige Antwort**. Weitere Details: siehe Aufgabe.
- In Aufgabe 5 wird **nur das Endergebnis** bewertet. Der Lösungsweg wird nicht berücksichtigt. Weitere Details: siehe Aufgabe.
- **Keine rote oder grüne Farbe, kein Tipp-Ex.**
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.

Tabelle keinesfalls ausfüllen!

A	Pkt.	Kont.
1	[10]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[12]	
6	[10]	
7	[10]	
8	[10]	
9	[10]	
Tot.	[92]	

Vollst.	
Note	

Aufgabe 1. (10 Punkte)

(a) [**4 Punkte**] Skizzieren Sie die Menge

$$\{(1 + \cos t) + (1 + \sin t)\, i \mid t \in \mathbb{R}\}\,. \tag{1}$$

Lösung: Die Menge (1) beschreibt einen Kreis mit der Gleichung

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

in der xy-Ebene. Der Kreis hat Mittelpunkt $(1, 1)$ und Radius 1.

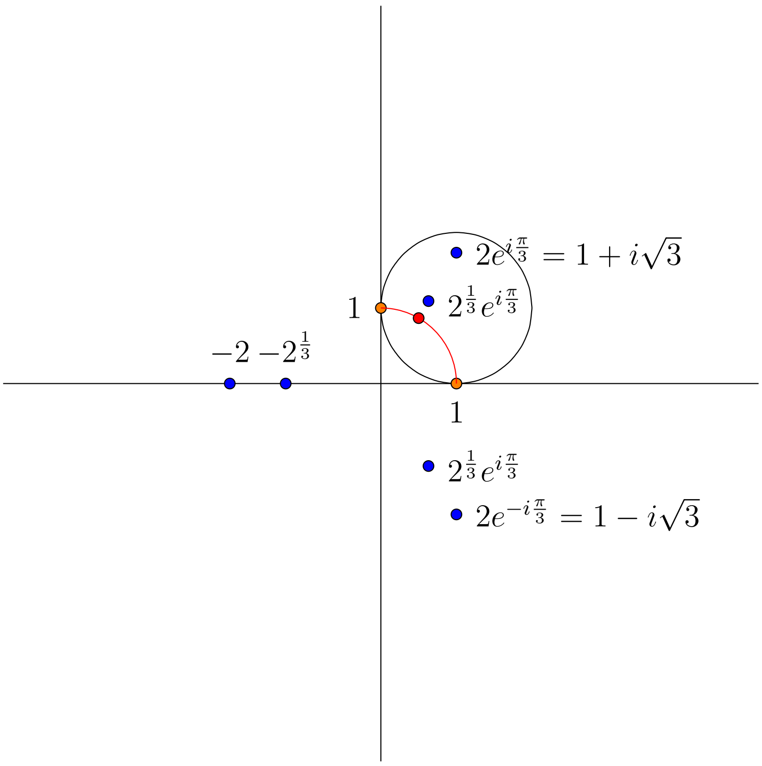


Abbildung 1: Der Kreis (1), die Lösungen der Gleichung (2) (in Blau) und ein Viertel des Einheitskreises (in Rot).

(b) [**4 Punkte**] Lösen Sie die Gleichung

$$z^6 + 10z^3 + 16 = 0. \tag{2}$$

Die Lösungen können in Polar- oder kartesischen Koordinaten angegeben werden.

Lösung: Durch die Substitution $u = z^3$ kann die Gleichung (2) in eine quadratische Gleichung für u überführt werden:

$$u^2 + 10u + 16 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung lauten

$$u_\pm = -\frac{10}{2} \pm \frac{\sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = -5 \pm 3, \text{ also } -8 \text{ und } -2.$$

Da $u = z^3$, findet man für z also die Lösungen

$$\begin{aligned}
2e^{\pi i} &= -2,\\
2e^{\pi i + \frac{2}{3}\pi i} &= 1 - i\sqrt{3},\\
\tfrac{1}{2^{\frac{2}{3}}}(1 + i\sqrt{3}) 2e^{\pi i + \frac{4}{3}\pi i} &= 1 + i\sqrt{3},\\
2^{\frac{1}{3}} e^{\pi i} &= -2^{\frac{1}{3}},\\
2^{\frac{1}{3}} e^{\pi i + \frac{2}{3}\pi i} &= \tfrac{1}{2^{\frac{2}{3}}}(1 - i\sqrt{3}),\\
2^{\frac{1}{3}} e^{\pi i + \frac{4}{3}\pi i} &= \tfrac{1}{2^{\frac{2}{3}}}(1 + i\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

(c) [**2 Punkte**] Entscheiden Sie für jede der Lösungen der Gleichung (2), ob sie im Inneren der Menge (1) liegt.

Lösung: Die Punkte im Inneren des durch (1) beschriebenen Kreises sind genau diejenigen Punkte, welche

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$$

erfüllen. Da der hierdurch beschriebene Kreis im 1. Quadranten liegt, kommen bis auf $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$ keine der Lösungen von (2) in Frage (alle anderen liegen außerhalb des 1. Quadranten). Es gilt nun:

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{und} \quad (1-1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 < (2-1)^2 = 1.$$

Somit liegt also $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ im Inneren. Der Punkt $e^{i\frac{\pi}{3}}$ (vgl. den roten Punkt auf dem Viertelkreis in Abbildung 1) liegt auf dem Einheitskreis und damit (gemäß Abbildung 1) ebenfalls im Kreis um $(1,1)$ mit Radius 1. Da der Punkt $2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$ auf der Verbindungsstrecke zwischen $e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ liegt, befindet er sich ebenfalls im Inneren des Kreises um $(1,1)$ mit Radius 1. D.h. $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$ sind genau diejenigen der Lösungen der Gleichung (2), welche sich im Inneren des Kreises (1) befinden.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Berechnen Sie

(a) [**3 Punkte**] das unbestimmte Integral $\int \frac{-x^2-x+4}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

Lösung: Mit Partialbruchzerlegung: Es gilt $x^3-3x^2+2x = x(x^2-3x+2)$. Man findet, dass die Nullstellen von x^2-3x+2 die Zahlen 1 und 2 sind. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{-x^2-x+4}{x^2-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Dies liefert

$$-x^2-x+4 = A(x^2-3x+2)+B(x^2-2x)+C(x^2-x) = (A+B+C)x^2+(-3A-2B-C)x+2A.$$

Koeffizientenvergleich liefert nun

$$\begin{cases} -1 &= A+B+C, \\ -1 &= -3A-2B-C, \\ 4 &= 2A \end{cases}$$

Die dritte Gleichung liefert, dass $A = 2$ ist. Damit sieht man durch Addition der ersten beiden Gleichungen, dass

$$-B-4 = -B-2A = -2,$$

also $B = -2$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt zu guter Letzt, dass $C = -1-A-B = -1-2+2 = -1$. Damit ist also

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2-x+4}{x^3-3x^2+2x}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{-1}{x-2}\right) dx \\ &= 2\ln(|x|) - 2\ln(|x-1|) - \ln(|x-2|) + C. \end{aligned}$$

(b) [**4 Punkte**] das uneigentliche Integral $\int_0^1 (\ln(x))^2\,dx$

Lösung:

$$\int_0^1 (\ln(x))^2\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 (\ln(x))^2\,dx.$$

Partielle Integration liefert nun für jedes $a \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \int_a^1 |\ln(x)|^2\,dx &= \ln(x)\cdot x\,(\ln(x)-1)\Big|_{x=a}^{x=1} - \int_a^1 (\ln(x)-1)\,dx \\ &= (\ln(x)\cdot x\,(\ln(x)-1) - x\ln(x) + 2x)\Big|_{x=a}^{x=1} \end{aligned}$$

Mit der Regel von l'Hopital kann man sehen, dass

$$\lim_{a\to 0} a\ln(a)^2 = 0 = \lim_{a\to 0} a\ln(a).$$

Folglich ist

$$\int_0^1 (\ln(x))^2\,dx = 2.$$

(c) [**3 Punkte**] den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x\tan(x)}$

Lösung: Mit zweimaliger Anwendung der Regel von l'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\tan(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\tan(x)+\frac{x}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{\frac{2}{\cos^2(x)}+\frac{2x\sin(x)}{\cos^3(x)}} \\ &= \frac{\lim_{x\to 0}(-\cos(x))}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\cos^2(x)}+\frac{2x\sin(x)}{\cos^3(x)}\right)} = \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Die Kurve K sei in Polarkoordinaten durch

$$R(\phi) = e^{\phi}, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

gegeben.

(a) [**2 Punkte**] Stellen Sie K in kartesischen Koordinaten dar.

Lösung: In kartesischen Koordinaten kann K wie folgt parametrisiert werden:

$$r(t) = (R(t)\cos(t), R(t)\sin(t)) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) [**4 Punkte**] Berechnen Sie die Krümmung κ.

Tipp: Die Krümmung einer Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t).}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Bekanntlich gilt für die Krümmung von $t \mapsto (x(t), y(t))$ die Formel

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Im vorliegenden Fall haben wir

$$\begin{array}{rclcrcl} x(t) & = & e^t\cos(t) & \text{und} & y(t) & = & e^t\sin(t), \\ \dot{x}(t) & = & e^t(\cos(t) - \sin(t)) & \text{und} & \dot{y}(t) & = & e^t(\cos(t) + \sin(t)), \\ \ddot{x}(t) & = & -2e^t\sin(t) & \text{und} & \ddot{y}(t) & = & 2e^t\cos(t). \end{array}$$

Eingesetzt in die Krümmungsformel (3) ergibt dies

$$\kappa(t) = e^{-t}\frac{2\left(\cos(t) - \sin(t)\right)\cos(t) + 2\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\sin(t)}{\left((\cos(t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) + \sin(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}.$$

(c) [**4 Punkte**] Geben Sie eine Parametrisierung des Schmiegekreises an K bei $\phi = \pi$ an.

Lösung:

Es gilt $r(\pi) = (-e^\pi, 0)$ und $\dot{r}(\pi) = (-e^\pi, -e^\pi)$. Folglich ist der Normalenvektor an K bei $\phi = \pi$ gegeben durch $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Da der Radius des Schmiegekreises $\frac{1}{\kappa(t)}$ beträgt, liegt Mittelpunkt des gesuchten Schmiegekreises bei

$$(-e^\pi, 0) + \frac{1}{\kappa(\pi)} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = (-e^\pi, 0) + e^\pi(1, -1) = (0, -e^\pi).$$

Die Gleichung des Schmiegekreises lautet damit

$$x^2 + (y + e^\pi)^2 = 2e^{2\pi}.$$

Eine mögliche Parametrisierung ist

$$\sigma(t) = (\sqrt{2}e^\pi \cos(t), -e^\pi + \sqrt{2}e^\pi \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

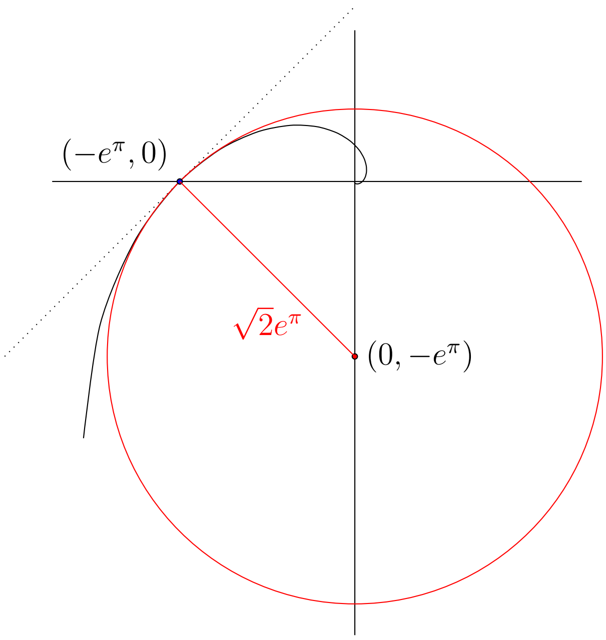
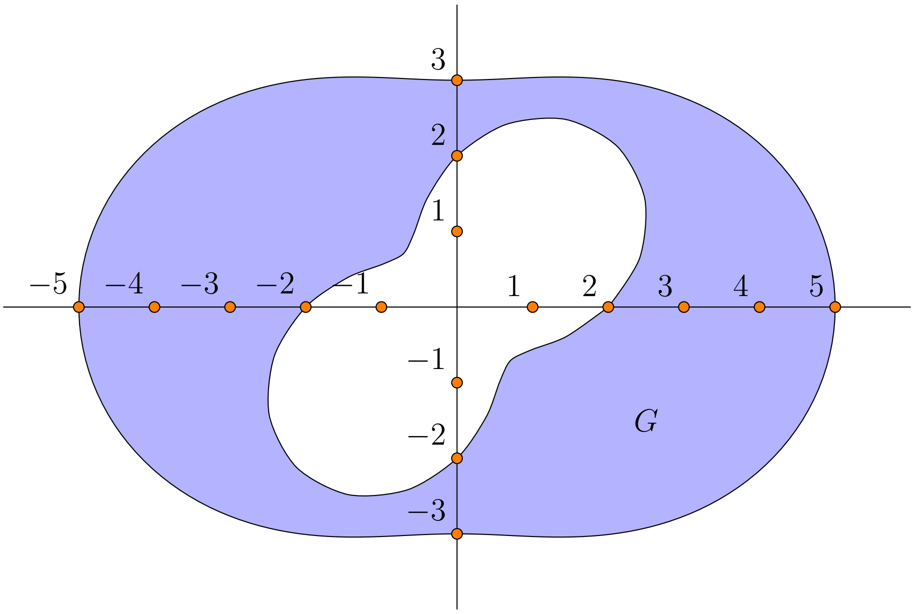


Abbildung 2: Schmiegekreis (rot) und Tangente (gepunktet) an die Kurve K (schwarz) im Punkt $(-e^\pi, 0)$

Aufgabe 4. Multiple-Choice-Aufgaben (10 Punkte)

Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt **2 Punkte**. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt **0 Punkte**.

1. Gegeben sei das folgende Gebiet G in $\mathbb{R}^2$.



Dann gilt für jede stetige Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$

☐ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\sin(2\phi)}^{4+\cos(2\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,dr\,d\phi$

Erklärung: Das Flächenelement $dr\,d\phi$ ist falsch. Es müsste $r\,dr\,d\phi$ lauten.

☐ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\cos(2\phi)}^{4+\sin(2\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r\,dr\,d\phi$

Erklärung: Die Kurven (und damit auch das Gebiet G) sind falsch parametrisiert. Man kann dies z.B. an $\phi = 0$ erkennen.

☐ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\sin(\phi)}^{4+\cos(\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,dr\,d\phi$

Erklärung: Die Kurven (und damit auch das Gebiet G) sind falsch parametrisiert. Man kann dies z.B. an $\phi = \pi$ erkennen. Zudem ist das Flächenelement inkorrekt.

■ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\sin(2\phi)}^{4+\cos(2\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r\,dr\,d\phi$

Erklärung: Die innere Kurve ist in Polarkoordinaten gegeben durch $R(\phi) = 2+\sin(2\phi)$, die äußere durch $R(\phi) = 4+\cos(2\phi)$. Die Variablen-Transformationsformel erfordert, dass das Flächenelement $r\,dr\,d\phi$ beträgt.

2. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $K = \partial S$ ihr Rand mit der induzierten Orientierung. Dann gilt:

$$\int_K \begin{pmatrix} z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \dots$$

■ $2\iint_S \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

□ $2\iint_S \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

□ $2\iint_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

□ $2\iint_S \begin{pmatrix} -x \\ -z \\ -y \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

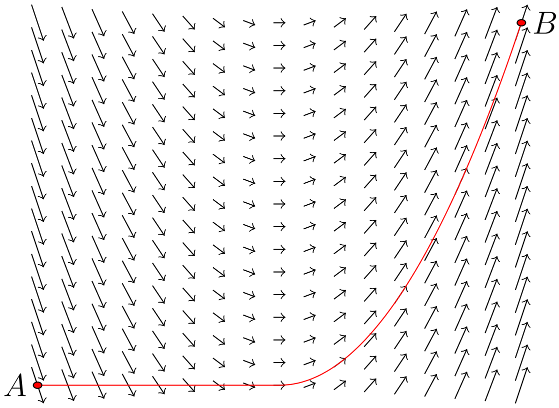
Erklärung: Nach dem Satz von Stokes ist

$$\int_K \begin{pmatrix} z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \begin{pmatrix} z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}.$$

Es gilt zudem

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(y^2 - z^2) - \partial_z(x^2 - y^2) \\ \partial_z(z^2 - x^2) - \partial_x(y^2 - z^2) \\ \partial_x(x^2 - y^2) - \partial_y(z^2 - x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

3. Welche Aussage über die Arbeit W des glatten Vektorfeldes entlang des eingezeichneten Weges von A nach B trifft zu?



- ■ W ist positiv.
- □ W ist negativ.
- □ W ist null.
- □ Es kann keine Aussage über das Vorzeichen von W getroffen werden.

Erklärung: Die Abbildung zeigt, dass die Komponente des Vektorfeldes in Richtung des Weges von A nach B niemals negativ (und mindestens auf der rechten Hälfte strikt positiv) ist. Folglich ist die Arbeit W positiv.

4. Der Laplaceoperator Δ ist definiert durch $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, der Gradientenoperator ∇ ist durch $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ gegeben und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\Delta(fg) = ...$

- □ $g\Delta f + f\Delta g$
- □ $f\nabla g + g\nabla f$
- ■ $g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f\Delta g$
- □ $g\Delta f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f\Delta g$

5. Für welche der folgenden Funktionen ist es **unmöglich**, Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ zu wählen, sodass die Funktion selbst sowie e^{2x} Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (***)$$

sind?

- ☐ e^{-x}

  Erklärung: e^{2x} und e^{-x} lösen beide (***) für $a = -1$, $b = -2$.

- ☐ xe^{2x}

  Erklärung: e^{2x} und xe^{2x} lösen beide (***) für $a = -4$, $b = 4$.

- ■ $\sin(x)$

  Erklärung: Sollen e^{2x} und $\sin(x)$ die Gleichung (***) lösen, so müssen 2 und i Nullstellen des charakteristischen Polynoms von (***) sein. Da aber reelle Koeffizienten angenommen wurden, sind die beiden Nullstellen entweder reell oder komplex konjugierte echt komplexe Zahlen. Weder das eine noch das andere träfe auf 2 und i zu.

- ☐ $\sinh(2x)$

  Erklärung: Da $\sinh(x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$ ist, lösen e^{2x} und $\sinh(2x)$ beide die Differentialgleichung (***) für $a = 0$, $b = -4$.

Aufgabe 5. (12 Punkte)

In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt **3 Punkte**. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt **0 Punkte**.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

1. $$\int_0^2 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,r\,dr\,d\phi$$

   Lösung: Es gilt:

   $$\int_0^2 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\cos(\phi)}} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,r\,dr\,d\phi$$

2. Berechnen Sie die Arbeit W des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ entlang der Kurve
   $$\vec{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in [0,1].$$

   $$W = \boxed{}$$

   Lösung: Es gilt:

   $$W = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - t^4 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t^2 - t^4 + 4t^4)\,dt$$
   $$= \int_0^1 (t^2 + 3t^4)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \boxed{\frac{14}{15}}$$

3. Es gilt $(2-3i)^9 = -86158 - 56403i$.

   $$\mathrm{Re}\left(-i(2+3i)^9\right) = \boxed{}$$

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}-i(2+3i)^9 &= -i\left(\overline{2-3i}\right)^9 = (-i)\cdot\overline{(2-3i)^9} = (-i)\cdot\overline{-86158-56403i}\\ &= -i(-86158+56403i) = 56403+86158i,\end{aligned}$$

d.h.

$$\operatorname{Re}\left(-i(2+3i)^9\right) = \boxed{56403}$$

4. Die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = g - \varrho\dot{x}(t)^2$$

kann zur Modellierung eines freien Falls mit Reibung genutzt werden. $x(t)$ gibt dabei die Entfernung zu einem Referenzpunkt zur Zeit t an, g ist die Erdbeschleunigung, ϱ ein Maß für den Luftwiderstand. Wie groß ist die *Endgeschwindigkeit* $\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)$, wenn $x(0)=0$ und $\dot{x}(0)=0$?

Tipp: Wenn die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ *praktisch konstant* ist für große t, wie verhält sich dann $\ddot{x}(t)$ für $t\to\infty$?

$$\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t) = \boxed{}$$

Lösung: Die gegebene Differentialgleichung kann als Gleichung für $y(t)=\dot{x}(t)$ betrachtet werden. Sie hat die Gleichgewichtslösungen $\pm\sqrt{\frac{g}{\varrho}}$. Da diese nicht geschnitten werden können, verbleibt die Lösung mit $y(0)=0$ immer innerhalb des Intervalls $(-\sqrt{\frac{g}{\varrho}},\sqrt{\frac{g}{\varrho}})$. Damit ist stets $\dot{y}(t)>0$. Demnach ist $y(t)$ eine monoton wachsende und stetige Funktion, der Grenzwert $\lim_{t\to\infty}y(t)$ existiert also. Folglich existiert auch

$$\lim_{t\to\infty}\dot{y}(t) = g - \varrho\left[\lim_{t\to\infty}y(t)\right]^2.$$

Wäre dieser Grenzwert verschieden von null, so stünde dies im Widerspruch dazu, dass $y(t)$ für $t\to\infty$ beschränkt bleibt. Folglich ist $\lim_{t\to\infty}\dot{y}(t)=0$ und $\lim_{t\to\infty}y(t)=\pm\sqrt{\frac{g}{\varrho}}$. Da $\ddot{y}(t)>0$ für alle $t>0$, scheidet die negative Wurzel aus und es muss gelten, dass

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = \boxed{\sqrt{\tfrac{g}{\varrho}}}$$

Alternative Lösung: Die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = g - \varrho\dot{x}(t)^2$ zweiter Ordnung für $x(t)$ ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für $y(t) = \dot{x}(t)$, nämlich $\dot{y}(t) = g - \varrho y(t)^2$. Diese kann mit Separation der Variablen gelöst werden ($y(0) = 0$ nach Voraussetzung):

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t 1\,ds = \int_0^t \frac{y(s)}{g-\varrho y(s)^2}\,ds = \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{g-\varrho y^2} = \frac{1}{g}\int_0^{y(t)} \frac{dy}{1-\frac{\varrho}{g}y^2} \\ &= \frac{1}{g}\int_0^{\sqrt{\frac{\varrho}{g}}y(t)} \sqrt{\frac{g}{\varrho}}\frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{\sqrt{\varrho g}}\int_0^{\sqrt{\frac{\varrho}{g}}y(t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)dz \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varrho g}}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Bigg]_{z=0}^{z=\sqrt{\frac{\varrho}{g}}y(t)}. \end{aligned}$$

Umstellen liefert

$$e^{2t\sqrt{\varrho g}} = \frac{1+\sqrt{\frac{\varrho}{g}}y(t)}{1-\sqrt{\frac{\varrho}{g}}y(t)} \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \sqrt{\frac{g}{\varrho}}\frac{e^{2t\sqrt{\varrho g}}-1}{e^{2t\sqrt{\varrho g}}+1},$$

woraus sich $\lim_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{\frac{g}{\varrho}}$ ergibt. Dies war gesucht.

Anmerkung: Dass die Integrationen und Vorzeichenwahlen gerechtfertigt waren, liegt daran, dass die gesuchte Lösung $y(t)$ aufgrund der Differentialgleichung für $t \in (0,\infty)$ immer zwischen 0 und $\sqrt{\frac{g}{\varrho}}$ verläuft.

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy,$$

wobei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4x^2 + y^2 \leq 80,\ y \leq 4 + x^2\}$ ist.

Lösung: Kritische Punkte im Inneren von D: Es gilt

$$\nabla f(x,y) = (y,x)$$

Damit gibt es im Inneren von D genau einen kritischen Punkt, $(0,0)$. Die Funktion f hat an dieser Stelle den Funktionswert 0.

Es bleibt der Rand ∂D von D zu untersuchen. Wir zerlegen den Rand in

$$E = \partial D \cap \left\{4x^2 + y^2 = 80\right\} \quad \text{und} \quad P = \partial D \cap \left\{y = 4 + x^2\right\}.$$

Man bemerke, dass sich E und P in den Punkten $(2,8)$ und $(-2,8)$ schneiden.

Kritische Punkte im Inneren von E: Dazu verwenden wir Lagrangemultiplikatoren:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \nabla f(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} \tag{4}$$

muss gleichzeitig mit $4x^2 + y^2 = 80$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten. Dividiert man die zweite durch die erste Zeile in (4) (dies ist erlaubt, da $y = 0$ oder $x = 0$ sofort $x = y = 0$ nach sich zöge, was allerdings im Widerspruch zur Bedingung $4x^2 + y^2 = 80$ stünde), so erhält man

$$\frac{y}{x} = 4\frac{x}{y} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y^2}{x^2} = 4.$$

Daraus folgt unter Verwendung von $4x^2 + y^2 = 80$, dass $y^2 = 40$, $x^2 = 10$ und somit $y = \pm 2\sqrt{10}$, $x = \pm\sqrt{10}$ (mit allen vier möglichen Kombinationen). Die Funktionswerte von f an diesen Stellen sind

$$f(\sqrt{10}, 2\sqrt{10}) = f(-\sqrt{10}, -2\sqrt{10}) = 20, \tag{5}$$

$$f(-\sqrt{10}, 2\sqrt{10}) = f(\sqrt{10}, -2\sqrt{10}) = -20. \tag{6}$$

Kritische Punkte im Inneren von P: Hier parametrisieren wir einfach $y = 4 + x^2$, $x \in (-2,2)$. Es gilt:

$$\frac{d}{dx}\left[x(4 + x^2)\right] = \frac{d}{dx}\left[4x + x^3\right] = 4 + 3x^2,$$

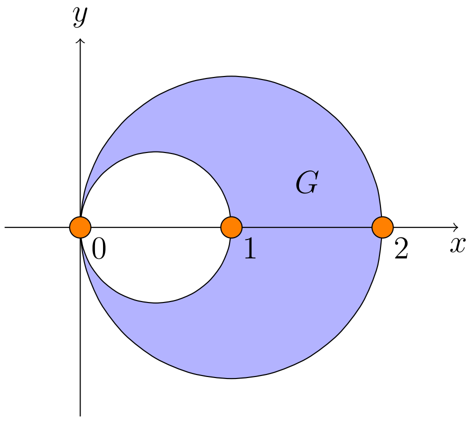
d.h. die Funktion ist monoton wachsend und nimmt ihre Extrema am Rand an, mit den Werten:

$$f(-2,8) = -16 \quad \text{und} \quad f(2,8) = 16. \tag{7}$$

Der Vergleich von (7), (5) und $f(0,0) = 0$ liefert, dass f globale Minima bei $(-\sqrt{10}, 2\sqrt{10})$ und $(\sqrt{10}, -2\sqrt{10})$ mit dem Funktionswert -20 und globale Maxima bei $(\sqrt{10}, 2\sqrt{20})$ und $(\sqrt{10}, 2\sqrt{10})$ mit dem Funktionswert 20 hat.

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Gebiets G, welches durch Entfernen des Kreises mit Radius $\frac{1}{2}$ um $(\frac{1}{2}, 0)$ aus dem Kreis mit Radius 1 um $(1, 0)$ entsteht, wenn die Dichtefunktion $\varrho(x, y) = x$ ist.



Tipp:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\, dx = \frac{3\pi}{16}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\, dx = \frac{5\pi}{32}$$

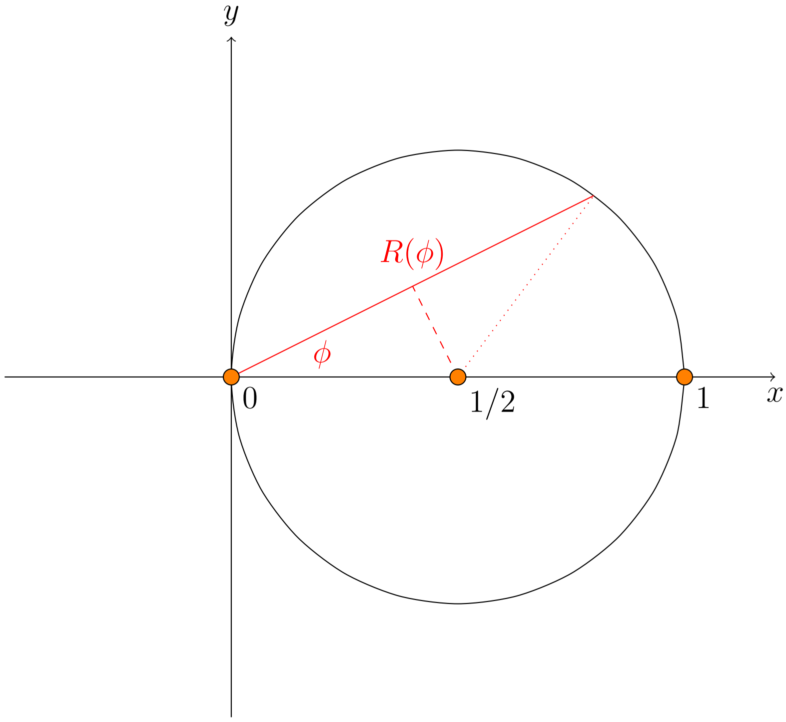
Lösung: Zur Bestimmung des Schwerpunkts (x_S, y_S) verwenden wir die Formel(n)

$$x_S = \frac{\iint_G x\rho(x, y)\, dx\, dy}{\iint_G \rho(x, y)\, dx\, dy}, \tag{8}$$
$$y_S = \frac{\iint_G y\rho(x, y)\, dx\, dy}{\iint_G \rho(x, y)\, dx\, dy}. \tag{9}$$

Aus Symmetriegründen ist $y_S = 0$ (denn bei der Berechnung von $\iint_G y\rho(x, y)\, dx\, dy$ in kartesischen Koordinaten liefert die Integration in y-Richtung für jedes x den Wert 0). Es bleibt also nur noch x_S zu berechnen. Dazu berechnen wir die Integrale in Zähler und Nenner von (8) mit Hilfe von Polarkoordinaten. Man bemerke, dass in den beiden nachstehenden Integralbechnungen – wiederum aus Symmetriegründen – jeweils zweimal das Integral über den Teil von G oberhalb der x-Achse berechnet wird. Die Polarkoordinatendarstellung[1] des Teils von G oberhalb der x-Achse erhält man wie folgt. Zunächst einmal zeigt die Zeichnung, dass wir nur Winkel $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$ betrachten müssen. Betrachtet man den ausgelassenen kleineren Kreis, dann erkennt man an der Zeichnung unten, dass

$$\frac{R(\phi)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \cos(\phi), \quad \text{also} \quad R(\phi) = \cos(\phi).$$

[1]Siehe Seite 35 des Integralrechnungskriptes für eine ähnliche Berechnung.



Der große Kreis, der G von außen umschließt, ergibt sich durch Streckung um den Faktor 2 aus dem kleinen Kreis (welcher gemäß obiger Überlegung und Zeichnung in Polarkoordinaten durch $R(\phi) = \cos(\phi)$ gegeben ist). Damit ist er in Polarkoordinaten durch $R(\phi) = 2\cos(\phi)$ dargestellt. die Punkte in dem Teil von G oberhalb der x-Achse unter dem Winkel ϕ sind also genau die Punkte, die $\cos(\phi) < r < 2\cos(\phi)$ erfüllen. Damit können wir nun die gesuchten Integrale wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\iint_G \rho(x,y)\,dx\,dy &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos(\phi)}^{2\cos(\phi)} r\cos(\phi)\cdot r\,dr\,d\phi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi)\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=\cos(\phi)}^{r=2\cos(\phi)} d\phi \\ &= \frac{14}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\phi)\,d\phi = \frac{14}{3}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{7}{8}\pi\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\iint_G x\rho(x,y)\,dx\,dy &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos(\phi)}^{2\cos(\phi)} r^2\cos^2(\phi)\cdot r\,dr\,d\phi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=\cos(\phi)}^{r=2\cos(\phi)} \cos^2(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(\phi)\,d\phi = \frac{15}{2}\cdot\frac{5\pi}{32} = \frac{75}{64}\pi.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Schwerpunkt

$$(x_S, y_S) = (\tfrac{75}{56}, 0).$$

Aufgabe 8. (10 Punkte)

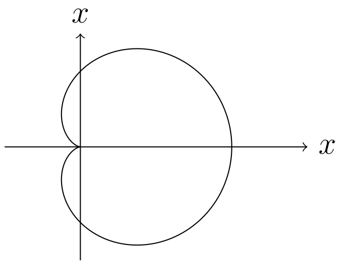
Sei

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y^3 + \cosh(2x) \\ x^3 + e^{\sin(2y)} \end{pmatrix}$$

ein 2-dimensionales Vektorfeld und K die Kardioide, die in Polarkoordinaten durch

$$R(\phi) = 1 + \cos(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

gegeben ist, siehe Bild. Berechnen Sie die Zirkulation von F entlang K.



Tipp:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx = \frac{3}{4}\pi.$$

Lösung: Nach dem Satz von Green gilt für die Zirkulation von $F = (U, V)$:

$$\begin{aligned}
\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint (V_x - U_y)\,dA = \iint (3x^2 + 3y^2)\,dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\phi)} 3r^2 \left(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right) r\,dr\,d\phi \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\phi)} r^3\,dr\,d\phi = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\phi))^4\,d\phi \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 + 4\cos^3(\phi) + 6\cos^2(\phi) + 4\cos(\phi) + \cos^4(\phi)\right)\,d\phi \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 + 6\cos^2(\phi) + \cos^4(\phi)\right)\,d\phi = \frac{3}{4}\left(2\pi + 6\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{105}{16}\pi.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die von der Kardioide K eingeschlossene Fläche mit Hilfe von Polarkoordinaten parametrisiert (dementsprechend die Integration) und es wurde verwendet, dass $\int_0^{2\pi} \cos^3(\phi)\,d\phi = \int_0^{2\pi} \cos(\phi)\,d\phi = 0$ aus Symmetriegründen gilt.

Aufgabe 9. (10 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 6y''(x) + 11y'(x) + 6y(x) = 12x + 1 + e^{-x}. \qquad (****)$$

(a) [7 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (****).

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0.$$

Die Nullstellen sind $-1, -2, -3$ (man finde eine durch Ausprobieren, den Rest durch Polynomdivision). Demnach lautet die allgemeine Lösung der zugehörigen **homogenen** Gleichung

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + Ce^{-3x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung (****) brauchen wir nur noch eine partikuläre Lösung von (****) zu finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Dx + E + Fxe^{-x}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $D, E, F \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die linke Seite von (****) liefert:

$$\begin{aligned} &y_p'''(x) + 6y_p''(x) + 11y_p'(x) + 6y_p(x) \\ &\quad = 6Dx + 6E + 11D + F\left[(3-x) + 6(x-2) + 11(1-x) + 6x\right]e^{-x} \\ &\quad = 6Dx + 6E + 11D + 2Fe^{-x}. \end{aligned}$$

Mit $F = \frac{1}{2}$, $D = 2$, $E = -\frac{7}{2}$ erhalten wir somit eine partikuläre Lösung von (****). Die allgemeine Lösung von (****) lautet demnach

$$y(x) = 2x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}xe^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-2x} + Ce^{-3x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}. \qquad (10)$$

(b) [3 Punkte] Finden Sie ein Polynom $f(x)$, sodass für jede Lösung $y(x)$ von (****) gilt, dass

$$\lim_{x\to\infty} |y(x) - f(x)| = 0.$$

Lösung: Man bemerke, dass

$$0 = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to\infty} e^{-3x}$$

gilt. Nach (10) können wir also $f(x) = 2x - \frac{7}{2}$ wählen. (Tatsächlich ist dies die einzig mögliche Wahl eines Polynoms mit den gewünschten Eigenschaften.)