Name: ________________ Legi: ________________

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

Lösung August 2019

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

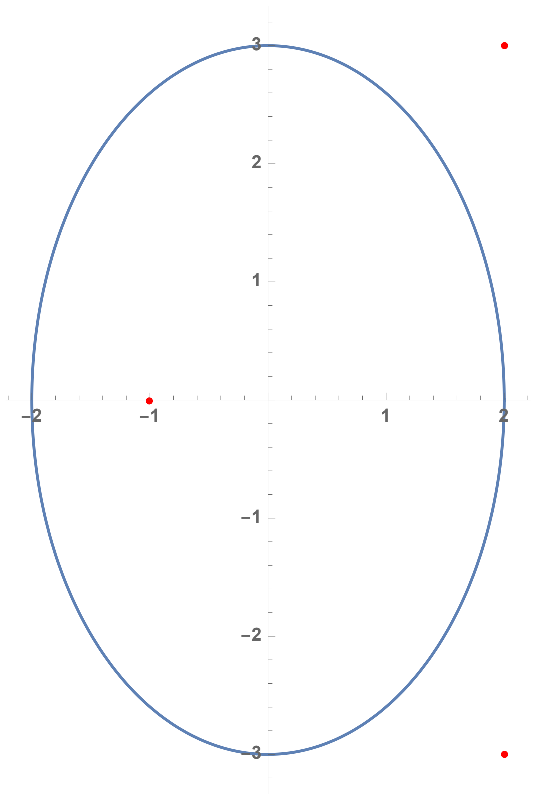
1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Kurve

$$\gamma(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t)\,i, \quad t \in [0, 2\pi],$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Lösung:



b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - 3z^2 + 9z + 13.$$

Lösung: Man erkennt, dass $z = -1$ eine Nullstelle ist. Polynomdivision ergibt

$$(z^3 - 3z^2 + 9z + 13)/(z + 1) = z^2 - 4z + 13.$$

Mithilfe der Mitternachtsformel ergeben sich die anderen Nullstellen zu

$$z = 2 \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i.$$

c) **(2 Punkte)** Die Kurve γ aus Aufgabenteil **a)** teilt die komplexe Ebene in eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ und eine unbeschränkte Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Welche der in Aufgabenteil **b)** bestimmten Nullstellen liegen im beschränkten Teil B?

Lösung: Die Nullstelle -1 liegt in B.

2. (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) **(3 Punkte)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)}$$

Lösung: Wir wenden die Regel von de L'Hospital zweimal an:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)} &= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2x\cos(x^2)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) **(3 Punkte)**

$$\int_0^\infty \frac{1}{x + x\ln(x)^2} \, \mathrm{d}x$$

Lösung:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x + x\ln(x)^2} \, dx = [\arctan(\ln(x))]_{x=0}^\infty = \pi.$$

c) **(4 Punkte)**

$$\int \frac{10x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \, \mathrm{d}x$$

Name: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Legi: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Lösung: Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners. Man sieht, dass $x = 1$ eine Nullstelle ist. Polynomdivision ergibt

$$(x^3 - x^2 - 4x + 4)/(x - 1) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Somit sind die Nullstellen des Nenners durch $x = 1$, $x = 2$ und $x = -2$ gegeben. Daher wählen wir

$$\frac{10x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}$$

als Ansatz für die Partialbruchzerlegung. Wir bringen die rechte Seite auf einen Nenner und erhalten

$$\frac{10x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{(A + B + C)x^2 + (B - 3C)x + (-4A - 2B + 2C)}{x^3 - x^2 - 4x + 4}.$$

Mittels Koeffizientenvergleich der Zähler erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B + C &= 10, \\ B - 3C &= -7, \\ -4A - 2B + 2C &= -6. \end{aligned}$$

Auflösen nach A, B, C ergibt, $A = 1, B = 5, C = 4$. Daher ist

$$\frac{10x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{x - 2} + \frac{4}{x + 2}.$$

Integriert man die einzelnen Summanden, so erhält man

$$\begin{aligned} &\int \frac{10x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{x - 2} + \frac{4}{x + 2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x - 1| + 5\ln|x - 2| + 4\ln|x + 2| + k \end{aligned}$$

mit $k \in \mathbb{R}$ beliebig.

3. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Berechnen Sie mittels der geometrischen Reihe eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2}.$$

Was ist der Konvergenzbereich?

Lösung: Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{1-(-4x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-4x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 4^k x^{2k}.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. Daher konvergiert die obige Reihe genau dann, wenn $\left|-4x^2\right| < 1$, d.h. wenn $|x| < \frac{1}{2}$. Der Konvergenzbereich ist daher $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe des Aufgabenteils **a)** eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$g(x) = \arctan(2x).$$

Was ist der Konvergenzbereich?

Lösung: Wir leiten $g(x)$ ab und erhalten

$$g'(x) = \frac{2}{1+4x^2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-4x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k}.$$

Diese Reihe konvergiert, wie bereits in Aufgabenteil a) erörtert, auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dort können wir gliedweise integrieren, und erhalten

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}(2x)^{2k+1},$$

da $g(0) = \arctan(0) = 0$. Weil $g'(x)$ auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ konvergiert, gilt dies auch für $g(x)$. Jedoch ist das noch nicht der maximale Konvergenzbereich! Für $|x_0| = \frac{1}{2}$ erhält man nämlich

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}(2x_0)^{2k+1} = 2x_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}(4x_0^2)^k = \pm\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1},$$

welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Der Konvergenzbereich ist daher $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

c) **(2 Punkte)** Leiten Sie mit Hilfe des Aufgabenteils **b)** eine Reihendarstellung für π her.

Hinweis: arctan(1) =?

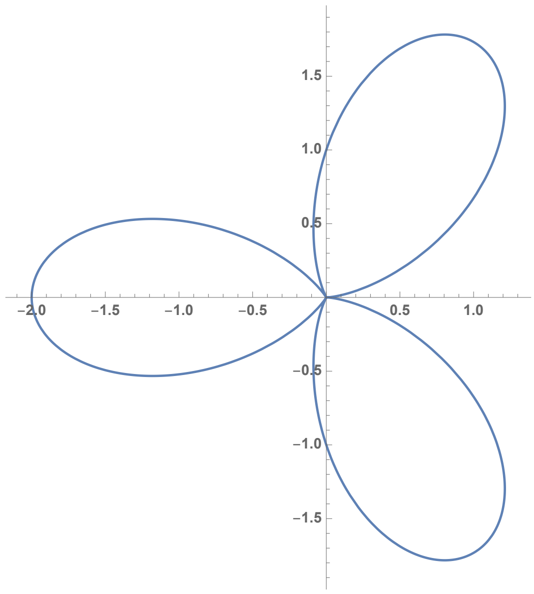
Lösung: Es gilt $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Löst man nach π auf, so erhält man mit Aufgabenteil b)

$$\pi = 4\arctan(1) = 4\,g(\tfrac{1}{2}) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

a) Welche Parametrisierung in Polarkoordinaten beschreibt die folgende Kurve?



(A) ✗

$$R(\varphi) = 1 + \sin(6\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(B) ✗

$$R(\varphi) = 1 + \sin(6\varphi - \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(C) ✓

$$R(\varphi) = 1 + \sin(3\varphi - \tfrac{\pi}{2}), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(D) ✗

$$R(\varphi) = 1 + \sin(3\varphi - \tfrac{3\pi}{2}), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Lösung: (C) ist die einzige Parametrisierung, für die $R(\pi) = 2$ gilt, wie in der Abbildung.

b) Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen mit $\kappa(t)$ die Krümmung der Kurve γ an der Stelle $\gamma(t)$ für $t \in [0,1]$.
Wie gross ist die Krümmung der Kurve

$$c(t) = 3\gamma(t) = (3x(t), 3y(t)), \quad t \in [0,1],$$

an der Stelle $c(t)$?

(A) ✓ $\frac{1}{3}\kappa(t)$

(B) ✗ $3\kappa(t)$

(C) ✗ $\frac{1}{9}\kappa(t)$

(D) ✗ $9\kappa(t)$

Lösung: Die Krümmung von $c(t) = \lambda \cdot \gamma(t)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\lambda^2 \cdot y''(t)x'(t) - \lambda^2 \cdot y'(t)x''(t)}{\left((\lambda \cdot x'(t))^2 + (\lambda \cdot y'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\lambda}\frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda}\kappa(t). \end{aligned}$$

Mit $\lambda = 3$ ergibt sich (A).

c) Es sei γ ein geschlossener Weg in der Ebene und $\vec{F}$ ein Vektorfeld. Die Arbeit von $\vec{F}$ entlang von γ sei 2. Welche Eigenschaft kann $\vec{F}$ besitzen?

(A) ✓ $\vec{F}$ ist quellenfrei.

(B) ✗ $\vec{F}$ ist wirbelfrei.

(C) ✗ $\vec{F}$ ist konservativ.

(D) ✗ $\vec{F}$ kann keine der obigen Eigenschaften haben.

Lösung: Zum Beispiel kann man als geschlossenen Weg den Einheitskreis K wählen $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$, und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\pi}(-y, x).$$

Dann gilt $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$, aber

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2.$$

d) Sei

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x + e^y z \\ 2y + \sinh(xz) \\ z + \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld und sei

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

der Würfel mit Seitenlänge 1. Was ist der Fluss von $\vec{F}$ nach aussen durch den Rand ∂K des Würfels K?

(A) ✗ 0

(B) ✗ 4

(C) ✓ 6

(D) ✗ 8

Lösung: Es gilt $\operatorname{div}(\vec{F}) = 6$ und es folgt mit dem Satz von Stokes

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iiint_K \operatorname{div}(\vec{F}) dV = 6 \operatorname{vol}(K) = 6.$$

e) Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$, sodass $y(x) = e^{2x}$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist

$$y''(x) - 5y'(x) + ky(x) = 0.$$

(A) ✗ -14

(B) ✗ -6

(C) ✗ -4

(D) ✓ 6

Lösung: Wir suchen k, sodass 2 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\operatorname{Ch}(X) = X^2 - 5X + k$$

ist. Nach der Mitternachtsformel sind die beiden Nullstellen von $\operatorname{Ch}(X)$ durch

$$\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{25-4k}}{2}$$

gegeben. Setzt man

$$2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{25-4k}}{2},$$

so folgt $k = 6$.

5. (12 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Die reellen Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllen $(A - B\,i)^{807} = 4020 + 2060\,i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie

$$2e^{-\pi i}(A + B\,i)^{807}$$

in der Form $x + y\,i$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{-8040 + 4120\,i}$$

Lösung: Es gilt

$$2e^{-i\pi}(A+i\cdot B)^{807} = -2\overline{(A-i\cdot B)}^{807} = -2(4020-2060\,i) = -8040+i\,4120.$$

b) Sei $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 2z^2$ und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 17\}$. Finden Sie eine Parametrisierung der Geraden n, welche die Fläche S im Punkt $(1,1,3) \in S$ trifft und dort senkrecht auf der Tangentialebene von S steht. Geben Sie ihr Ergebnis in der Form

$$n(t) = (A, B, C) + t \cdot (D, E, F), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ an.

Bemerkung: Die Parametrisierung ist hier nicht eindeutig. Es werden Punkte auf jede korrekte Parametrisierung vergeben.

$$n(t) = \boxed{(1,1,3) + t\cdot(2,-4,12) \quad \text{(zum Beispiel)}}$$

Lösung: Die Gerade $n(t)$ ist genau dann senkrecht zur Tangentialebene an S im Punkt $P = (1,1,3)$, wenn es ein $\lambda \neq 0$ gibt, sodass $\nabla F(P) = \lambda \cdot$

(D, E, F). Es gilt $\nabla F(x, y, z) = (2x, -4y, 4z)$ und wir können zum Beispiel

$$(D, E, F) = \nabla F(P) = (2, -4, 12)$$

setzen. Wenn wir wollen, dass $n(t)$ für $t = 0$ durch $P = (1, 1, 3)$ geht, so können wir zudem

$$(A, B, C) = P = (1, 1, 3)$$

setzen.

c) Sei $\vec{F}(x, y) = (2y + \pi, 3x - \pi^2)$ ein Vektorfeld und $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis.
Berechnen Sie die Arbeit von $\vec{F}$ längs K im Gegenuhrzeigersinn:

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{\pi}$$

Lösung: Wenden wir den Satz von Green auf die Einheitskreisscheibe D an, so ergibt sich

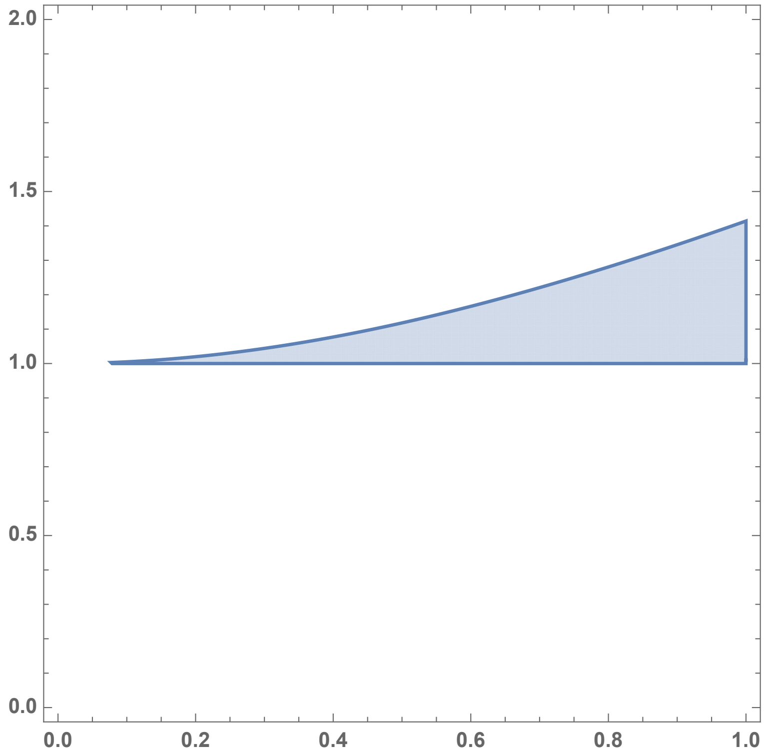
$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D V_x - U_y \,\mathrm{d}A = \iint_D 1 \,\mathrm{d}A = \pi$$

d) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an.

$$\int_0^1 \int_1^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_1^{\boxed{\sqrt{2}}} \int_{\boxed{\sqrt{y^2 - 1}}}^1 f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Lösung: Wir integrieren hier die Funktion $f(x, y)$ über die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq \sqrt{1 + x^2}\}$$



Löst man die Kurve $y = \sqrt{1+x^2}$ nach x auf, so erhält man $x = \pm\sqrt{y^2-1}$. Daher ist die Menge D auch durch

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq \sqrt{2}, \sqrt{y^2-1} \leq x \leq 1\}$$

gegeben. Die Antwort folgt nun mit Fubini.

6. (10 Punkte) Finden Sie die globalen Extremstellen und -werte der Funktion $f(x,y,z) = (x+z)^2$ auf der Menge

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 25\}.$$

Lösung: Wir wollen Lagrange-Multiplikatoren verwenden. Dazu berechnen wir

$$\nabla f(x,y,z) = 2(x+z, 0, x+z),$$
$$\nabla g(x,y,z) = 2(x,y,z).$$

Lokale Extrema von f auf D müssen daher das Gleichungssystem

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z),$$
$$g(x,y,z) = 25,$$

erfüllen. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x + z &= \lambda x, \\ 0 &= \lambda y, \\ x + z &= \lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 25. \end{aligned}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach λ.

(a) Angenommen $\lambda \neq 0$: Dann folgt aus der zweiten Gleichung, dass $y = 0$. Subtrahiert man die erste von der dritten Gleichung und teilt durch λ, so folgt, dass $x = z$ gelten muss. Mit der letzten Gleichung erhält man $x = z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}5$. Einsetzen in f ergibt

$$f(\tfrac{\sqrt{2}}{2}5, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}5) = f(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}5, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}5) = 50.$$

(b) Angenommen $\lambda = 0$: Dann ist das Gleichungssystem äquivalent zu

$$\begin{aligned} x + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 25. \end{aligned}$$

Dies beschreibt den Schnitt $K = E \cap D$ der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ durch den Ursprung mit der Sphäre D mit Radius 5. Auf diesem Grosskreis K gilt $f(x, y, z) = (x + z)^2 = 0$.

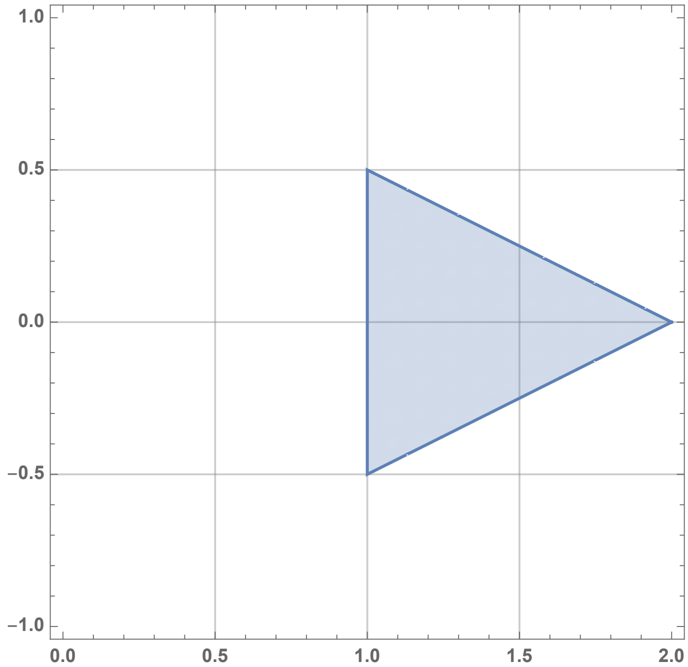
Daher hat f auf D die globalen Maxima $(\frac{\sqrt{2}}{2}5, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}5)$ und $(-\frac{\sqrt{2}}{2}5, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}5)$. Zudem sind alle Punkte auf dem Grosskreis globale Minima von f.

7. (10 Punkte) Wir betrachten die Menge

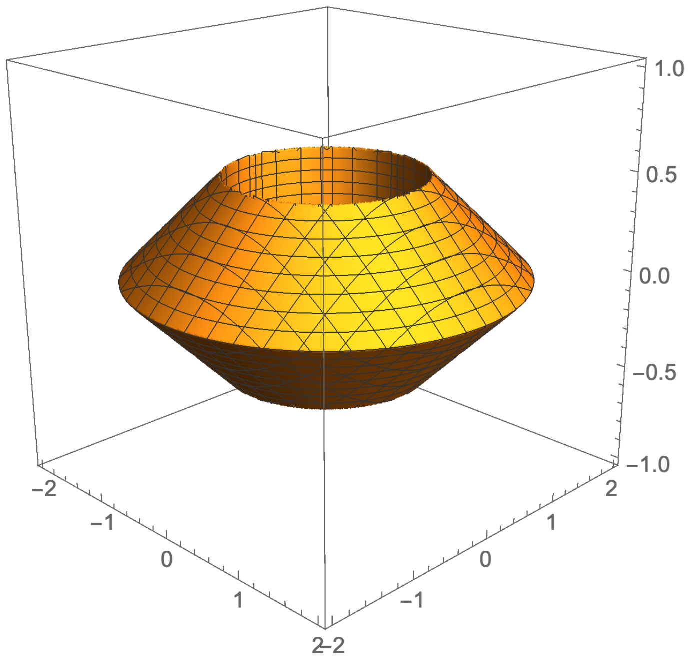
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1, -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

a) (2 Punkte) Skizzieren Sie eine zweidimensionale Fläche, sodass D der Rotationskörper um die z-Achse dieser Fläche ist.

Lösung: Wir zeichnen in den Koordinaten (r, z), wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Als Rotationskörper ergibt sich dann:



b) **(4 Punkte)** Berechnen Sie das Volumen von D.

Lösung: Die Menge D ist in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gegeben durch die Gleichungen

$$-1 + \tfrac{r}{2} \leq z \leq 1 - \tfrac{r}{2}, r \geq 1.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(D) &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-1+\frac{r}{2}}^{1-\frac{r}{2}} r dz dr d\varphi \\
&= 2\pi \int_1^2 r(2-r) dr \\
&= 2\pi \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_1^2 \\
&= 2\pi \left(3 - \frac{7}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

c) **(4 Punkte)** Die Dichte von D sei konstant 1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment von D bezüglich der z-Achse.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_D r^2 \, \mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-1+\frac{r}{2}}^{1-\frac{r}{2}} r^3 dz dr d\varphi \\
&= 2\pi \int_1^2 2r^3 - r^4 dr \\
&= 2\pi \left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^5}{5} \right]_1^2 \\
&= 2\pi \left[\frac{8}{5} - \frac{3}{10} \right]_1^2 = \frac{13\pi}{5}.
\end{aligned}$$

8. **(10 Punkte)** Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\cosh(x) \\ y \sinh(x) - y \sin(x) \sin(yz) \\ z \sin(x) \sin(yz) + y e^{xy} + 2z \end{pmatrix}$$

und die Fläche

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Die Fläche H sei so orientiert, dass der Normalenvektor stets eine nicht-negative x-Komponente hat.

Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch H.

Lösung:

***Variante A (Stokes)*:**

Wir betrachten die Halbkugel mit Radius 3

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Der Rand von B besteht aus H und der Kreisscheibe

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Daher können wir schreiben

$$\iint_H \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{n} - \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{n}.$$

Die Aussennormale zu D ist $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ und es gilt

$$\vec{F}(0, y, z) \cdot \vec{n} = -F_1(0, y, z) = 1.$$

Somit ergibt sich

$$\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = 9\pi.$$

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iiint_B \operatorname{div}(\vec{F}) \, \mathrm{d}V,$$

und man berechnet leicht

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2.$$

Somit gilt

$$\iiint_B \operatorname{div}(\vec{F}) \, \mathrm{d}V = 2 \cdot \operatorname{vol}(B) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi,$$

und

$$\iint_H \vec{F} \cdot d\vec{n} = 36\pi - 9\pi = 27\pi.$$

***Variante B (Parametrisierung)*:**

DIESE VARIANTE IST NICHT EMPFEHLENSWERT! Wir skizzieren hier die Vorgehensweise lediglich zur besseren Verständlichkeit der Korrekturschemas.

Die Fläche $\boldsymbol{H}$ ist die Hälfte mit nicht-negativer x-Koordinate einer Sphäre mit Radius 3 um den Ursprung $(0, 0, 0)$. Wir verwenden daher Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 3\sin\theta\cos\varphi \\ 3\sin\theta\sin\varphi \\ 3\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun

$$H = \{\vec{r}(\theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi, -\tfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}\}.$$

Der Normalenvektor zu $\boldsymbol{H}$ ist nun gegeben durch

$$\vec{n}(\theta, \varphi) = \pm\partial_\theta\vec{r}(\theta, \varphi) \times \partial_\varphi\vec{r}(\theta, \varphi) = \pm \begin{pmatrix} 9\cos(\varphi)\sin^2(\theta) \\ 9\sin(\varphi)\sin^2(\theta) \\ 9\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Nach Aufgabenstellung soll $\boldsymbol{H}$ so orientiert sein, dass der Normalenvektor nicht-negative x-Koordinate hat. Daher ist das positive Vorzeichen zu wählen.

Das Flussintegral ergibt sich nun zu

$$\iint_H \vec{F} \cdot d\vec{n} = \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(\theta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\theta, \varphi)\, d\varphi\, d\theta$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(\theta, \varphi)) = \big(& -\cosh(3\cos(\varphi)\sin(\theta)), \\ & 3\sin(\varphi)\sin(\theta)(\sinh(3\cos(\varphi)\sin(\theta)) - \sin(3\cos(\varphi)\sin(\theta)) \\ & \quad \sin(9\sin(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta))), \\ & 3(\sin(\varphi)\sin(\theta)e^{9\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin^2(\theta)} \\ & \quad + \cos(\theta)(\sin(3\cos(\varphi)\sin(\theta))\sin(9\sin(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta)) + 2))\big),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(\theta,\varphi))\cdot\vec{n}(\theta,\varphi) =& 9\sin(\theta)\big(3\cos(\theta)(\sin(\varphi)\sin(\theta)e^{9\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin^2(\theta)}\\ &+\cos(\theta)(\sin(3\cos(\varphi)\sin(\theta))\sin(9\sin(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta))+2))\\ &+3\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta)(\sinh(3\cos(\varphi)\sin(\theta))\\ &-\sin(3\cos(\varphi)\sin(\theta))\sin(9\sin(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta)))\\ &-\cos(\varphi)\sin(\theta)\cosh(3\cos(\varphi)\sin(\theta))\big).\end{aligned}$$

Setzt man ein und berechnet das Integral, so erhält man

$$\int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{F}(\vec{r}(\theta,\varphi))\cdot\vec{n}(\theta,\varphi)\,d\varphi\,d\theta = 27\pi.$$

9. (10 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''(x) - 7y''(x) + 24y'(x) - 18y(x) = 90\cos(3x).$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung: Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$y''' - 7y'' + 24y' - 18y = 0.$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\mathrm{Ch}(X) = X^3 - 7X^2 + 24X - 18.$$

Offenbar ist $X = 1$ eine Nullstelle, und mittels der Mitternachtsformel ergeben sich weitere Nullstellen bei $3 + 3i$ und $3 - 3i$. Somit wird der Lösungsraum der homogenen Differentialgleichungen durch die Funktionen $e^x, \cos(3x)e^{3x}, \sin(3x)e^{3x}$ aufgespannt.

Nun zur partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: Das Störglied auf der rechten Seite ist $90\cos(3x)$. Wir wählen daher als Ansatz $y(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$. Wir berechnen die Ableitungen

$$\begin{aligned}y'(x) &= 3b\cos(3x) - 3a\sin(3x),\\ y''(x) &= -9b\sin(3x) - 9a\cos(3x),\\ y'''(x) &= -27b\cos(3x) + 27a\cos(3x).\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$y''' - 7y'' + 24y' - 18y = 45((b-a)\sin(3x) + (a+b)\cos(3x)) \stackrel{!}{=} 90\cos(3x).$$

Daher muss $a = b = 1$ gelten, und $y(x) = \cos(3x) + \sin(3x)$ ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = \cos(3x) + \sin(3x) + c_3 e^x + c_1 e^{3x}\sin(3x) + c_2 e^{3x}\cos(3x)$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

b) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung, welche beschränkt auf $[0, +\infty)$ ist.

Lösung: Die zuvor bestimmte partikuläre Lösung $y(x) = \cos(3x) + \sin(3x)$ ist beschränkt auf $[0, +\infty)$.