Prüfung
Analysis I/II D-BAUG
Lösung Winter 2017

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

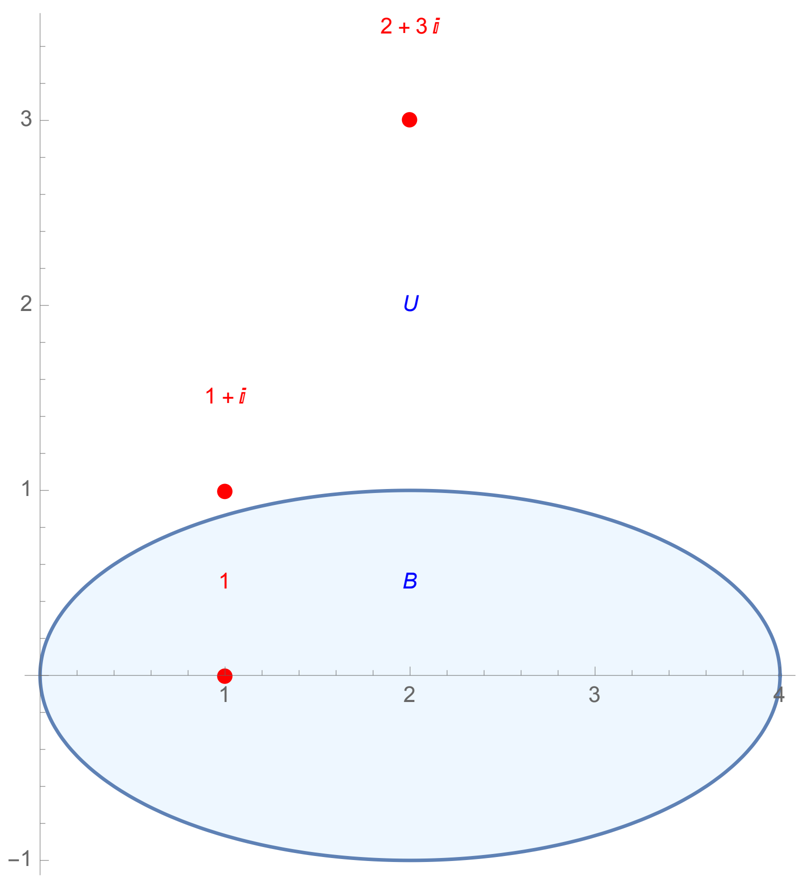
1. (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma(t) = 2\cos(4t) + 2 + i\sin(4t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Lösung:



b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - (4 + 4i)z^2 + (2 + 9i)z + (1 - 5i).$$

Lösung: Durch Einsetzen sieht man, dass 1 eine Nullstelle von $p(z)$ ist. Durch Polynomdivision erhält man

$$p(z) = (z - 1)(z^2 - (3 + 4i)z + (-1 + 5i)).$$

Die Nullstellen des letzten Terms bestimmt man dann mittels der Formel für Nullstellen quadratischer Gleichungen zu $1 + i$ und $2 + 3i$. Insgesamt erhält man also 1, $1 + i$ und $2 + 3i$ als komplexe Nullstellen von $p(z)$.

c) (3 Punkte) Die Kurve γ teilt die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in zwei Teilmengen: eine beschränkte Menge B und eine unbeschränkte Menge U.

Verwenden Sie Ihre Skizze aus Aufgabenteil **a)** um zu bestimmen, welche der in Aufgabenteil **b)** bestimmten Nullstellen in B und welche in U liegen.

Lösung: Die Nullstellen von $p(z)$ sind mit rot in der Zeichnung zu Aufgabenteil **a)** eingetragen. Offenbar ist 1 in B, und $1 + i$ und $2 + 3i$ in U.

2. (10 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) (3 Punkte)

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \mathrm{d}x$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \mathrm{d}x &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{u=\ln x}{=} [\ln|x|]_{x=e}^{e^2} + \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2 - 1 + [\ln|u|]_{u=1}^2 \\
&= 1 + \ln 2 - \ln 1 = 1 + \ln 2
\end{aligned}$$

b) (4 Punkte)

$$\int \frac{x^2 + x + 8}{x^3 - x^2 + 9x - 9}\,\mathrm{d}x$$

Lösung: Zunächst ist offensichtlich $x = 1$ eine Nullstelle des Nenners. Polynomdivision ergibt nun

$$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)\left(x^2 + 9\right),$$

sodass man den folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung wählt

$$\frac{x^2 + x + 8}{x^3 - x^2 + 9x - 9} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9}.$$

Es gilt

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + (9A-C)}{x^3 - x^2 + 9x - 9},$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man das LGS

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ C - B &= 1, \\ 9A - C &= 8. \end{aligned}$$

Dessen Lösung ist $A = 1, B = 0, C = 1$, sodass

$$\frac{x^2 + x + 8}{x^3 - x^2 + 9x - 9} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+9}$$

gilt.
Dies lässt sich nun integrieren

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 8}{x^3 - x^2 + 9x - 9}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c, \end{aligned}$$

wobei c eine reelle Konstante ist.

c) (3 Punkte)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - x}{\sin(x^3)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - x}{\sin(x^3)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) - x}{x^3 - \frac{x^9}{3!} + \ldots} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots}{x^3 - \frac{x^9}{3!} + \ldots} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \ldots}{1 - \frac{x^6}{3!} + \ldots} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. (10 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : [0,9] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 6\sqrt{9-x} + 3\sqrt{x}.$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen von f. Sie müssen den Ausruck **nicht** vereinfachen!

Lösung: Die Formel für die Krümmung des Funktionsgraphen an der Stelle x ist

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{9-x}}, \tag{2}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4x^{3/2}} - \frac{3}{2(9-x)^{3/2}}. \tag{3}$$

Damit ergibt sich folglich

$$\kappa(x) = \frac{-\frac{3}{4x^{3/2}} - \frac{3}{2(9-x)^{3/2}}}{\left(\left(\frac{3}{\sqrt{9-x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 1\right)^{3/2}}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Stellen $x \in \mathbb{R}$, an welchen die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ übereinstimmt. Berechnen Sie die Krümmung an diesen Stellen.

Lösung: Man sieht anhand von Formel (1), dass die Krümmung genau dann mit $f''(x)$ übereinstimmt, wenn $f'(x) = 0$ ist. Nach (2) ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{9-x}} \\ \iff \frac{1}{4x} &= \frac{1}{9-x} \\ \iff 4x &= 9-x \\ \iff x &= \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Die Krümmung an dieser Stelle ist dann gemäss (3)

$$\kappa\left(\frac{9}{5}\right) = f''\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{1}{144}\left(25\sqrt{5}\right).$$

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die globalen Maxima und Minima der Funktion f auf dem Intervall $[0,9]$.

Lösung: Aus 3b wissen wir bereits, dass der einzige kritische Punkt von f auf dem Intervall $[0, 9]$ bei $x = \frac{9}{5}$ liegt. Ausserdem ist die Krümmung an dieser Stelle negativ und gleich der zweiten Ableitung $f''\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{1}{144}\left(25\sqrt{5}\right) < 0$, sodass es sich um ein lokales Maximum handelt. Wir berechnen noch den Funktionswert

$$f\left(\frac{9}{5}\right) = 9\sqrt{5}.$$

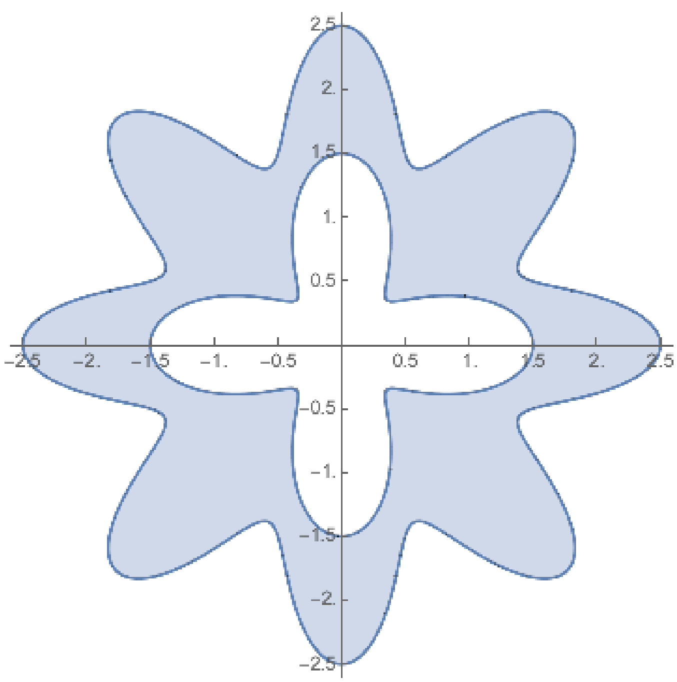
Es bleiben noch die Randpunkte zu untersuchen

$$\begin{aligned} f(0) &= 18, \\ f(9) &= 9. \end{aligned}$$

Da $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, gilt $9\sqrt{5} > 18 > 9$. Damit ist das globale Maximum von f auf dem Intervall $[0, 9]$ bei $\left(\frac{9}{5}, 9\sqrt{5}\right)$, und das globale Minimum bei $(9, 9)$.

4. **Multiple-Choice (10 Punkte):** Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

   a) Gegeben sei das folgende Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$:



Dann gilt für jede stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}$

$$\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \ldots$$

(I) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

(II) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4r)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4r)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$

(III) ☑

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

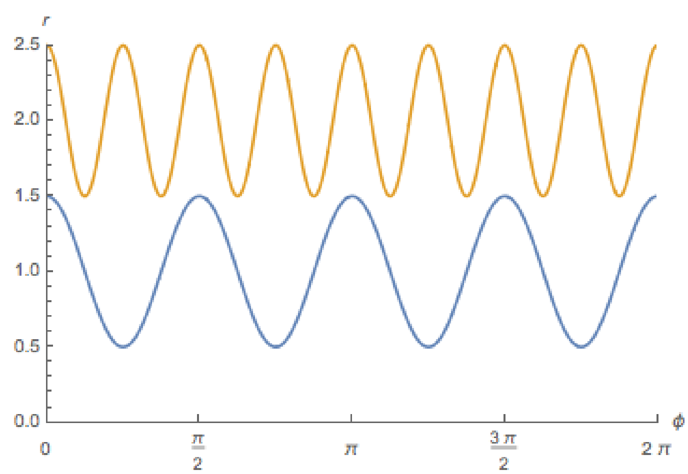
(IV) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

Lösung: Das Gebiet G ist das Bild des Normalbereichs vom Typ 1

$$N = \left\{(r,\phi)\,|\,0 \le \phi \le 2\pi,\, 1 + \frac{1}{2}\cos(4\phi) \le r \le 2 + \frac{1}{2}\cos(8\phi)\right\}$$

unter der Polarkoordinatentransformation. Hier ist ein Bild des begrenzten Bereichs in Polarkoordinaten:



b) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Oberfläche und $K = \partial S$ deren Rand mit der von S induzierten Orientierung. Dann gilt

$$\int_K \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = \ldots$$

(I) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

(II) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

(III) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

(IV) ☑

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

Lösung:

$$\int_{K=\partial S} \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \iint_S \underbrace{\operatorname{rot} \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix}} \cdot d\vec{S} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}$$

$$= \underset{\partial_x}{\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}} \times \underset{yz-y}{\begin{pmatrix} yz-y \\ xz+x \\ xy \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x-x \\ y-y \\ z+1-(z-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Wir betrachten die Funktion $g(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ und das Vektorfeld $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$. Weiter sei K die durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi$$

parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\int_K \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = \ldots$$

(I) ☑ -8

(II) ☐ -7

(III) ☐ 0

(IV) ☐ 6

Lösung:

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_K \nabla g \cdot d\vec{r} = g(\vec{r}(\pi)) - g(\vec{r}(0))$$

$$= g(0,2) - g(0,2) = 0 - 8 = -8$$

d) Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, dessen Rand durch eine einfache geschlossene Kurve K im Gegenuhrzeigersinn parametrisiert wird. Wir interpretieren D als eine dünne Platte mit Dichte $\rho \equiv 1$. Ferner wollen wir annehmen, dass auch die Gesamtmasse von D gleich 1 ist, d.h.

$$\iint_D 1 \, \mathrm{d}A = 1.$$

Welches der folgenden Integrale berechnet **NICHT** die x-Koordinate des Schwerpunktes von D?

(I) ☑

$$\frac{1}{2} \oint_K -xy \, \mathrm{d}x$$

(II) ☐

$$\oint_K -xy \, \mathrm{d}x$$

(III) ☐

$$\iint_D x \, \mathrm{d}A$$

(IV) ☐

$$\frac{1}{2} \oint_K x^2 \, \mathrm{d}y$$

Lösung:

~~Per Definition~~

Nach Vorlesung: $$x_S = \frac{\iint_D x \overbrace{\rho(x,y)}^{=1} dA}{\underbrace{\iint_D \rho(x,y)\, dA}_{=1}} = \cancel{\iint_D x\, dA} \iint_D x\, dA$$

$$= \oint_K \vec{V} \cdot d\vec{r},$$

wobei $\operatorname{rot}(\vec{V}) = x$

Es gilt $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} -xy \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial y}(-xy) = x$

$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} = x$

so dass

$$x_S = \oint_K \begin{pmatrix} -xy \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \oint_K -xy\, dx$$

und $$x_S = \oint_K \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \oint_K \frac{1}{2}x^2\, dy .$$

e) Was ist eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems?

$$y' = 2xy + e^{x^2+x}, \quad y(0) = 2$$

(I) ☐ $y(x) = 2e^{x^2}$

(II) ☑ $y(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2}$

(III) ☐ $y(x) = 2e^{x^2+x}$

(IV) ☐ $y(x) = e^{x^2+x}$

Lösung:

$$y(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2}$$

$$y'(x) = e^{x^2+x}(2x+1) + e^{x^2}(2x)$$

$$= 2x\left(e^{x^2+x} + e^{x^2}\right) + e^{x^2+x} = 2x\, y(x) + e^{x^2+x} \checkmark$$

5. **(12 Punkte)** In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

$$c = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x - e^x + 1}^{\to 0}}{\underbrace{x(e^x-1)}_{\to 0}} \underset{\text{l'H.}}{\overset{\text{de}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1 - e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x - 1 + xe^x}_{\to 0}} \underset{\text{l'H.}}{\overset{\text{de}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-e^x}^{\to -1}}{\underbrace{e^x + e^x + xe^x}_{\to 2}} = -\frac{1}{2}$$

b) Wir betrachten die Kurve K mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\sin(\pi t), \sinh t + \cosh t), \quad t \in [0, 1]$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Arbeit W des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang der Kurve K.

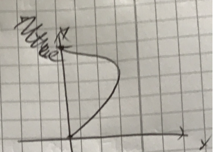
$$W = \boxed{\text{e}}$$

Lösung:

$$\left(f(x,y) = y\, \cancel{\exp}\, e^{x^2} \right)$$

$$\vec{F} = \left(\nabla f(x,y) = \right) \begin{pmatrix} 2xy\, e^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix}$$

$\vec{r}(t) = (\sin(\pi t), \sinh(t)\cosh(t))$



$$\operatorname{rot} F(x,y) = \partial_y (2xy\, e^{x^2}) - \partial_x (e^{x^2})$$

$$= 2x\, e^{x^2} - 2x\, e^{x^2} = 0$$

$\vec{r}(1) = (0, e)$ $\quad \vec{s}(t) = (0, t)$, $t \in [0, e]$ $\rightsquigarrow L$

$\dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$W = \int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{\text{rot}=0}{=} \int_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_0^e \left. \begin{pmatrix} 2xy\, e^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|_{\substack{x=0 \\ y=t}} dt$$

$$= \int_0^e 1 \, dt = e .$$

c) Bestimmen Sie den Parameter $C \in \mathbb{R}$ so, dass die Fläche

$$F_C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - 4x + y^2 - 8y + C \right\}$$

die xy-Ebene (tangential) berührt.

$C =$ $\boxed{20}$

Lösung:

$$z = (x-2)^2 + (y-4)^2 \cancel{+8}$$
$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16$$
$$= x^2 - 4x + y^2 - 8y + \underbrace{20}_{=C}$$

Bestimmen Sie ~~die~~ den Parameter C so, dass die Fläche $z = x^2 - 4x + y^2 - 8y + C$ die xy-Ebene berührt.

Lsg: $z = x^2 - 4x + y^2 - 8y + C$

$\iff C = -x^2 + 4x - y^2 + 8y + z$

$f(x,y,z) := -x^2 + 4x - y^2 + 8y + z$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x+4 \\ -2y+8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berührpunkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mit xy-Ebene

$$\iff z_0 = 0 \ \& \ \nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \& \ f(x_0,y_0,z_0) = C$$

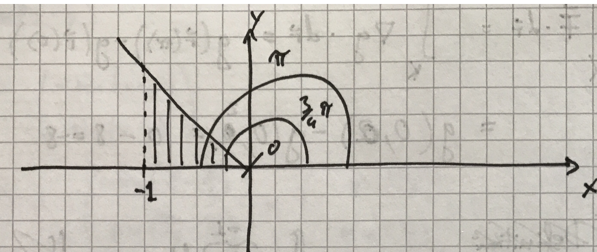
$$\iff \begin{cases} z_0 = 0 \\ -2x_0 + 4 = \lambda \cdot 0 \\ -2y_0 + 8 = \lambda \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 1 \\ f(x_0,y_0,z_0) = C \end{cases} \iff \begin{cases} z_0 = 0 \\ x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \\ (\lambda = 1) \end{cases}$$

$$C = f(x_0,y_0,z_0) \cancel{= -4 + 16 - 16 + 32 + 0}$$
$$= -x_0^2 + 4x_0 - y_0^2 + 8y_0 + z_0$$
$$= -4 + 8 - 16 + 32 + 0$$
$$= 20$$

d) Vervollständigen Sie den folgenden Wechsel in Polarkoordinaten (r, ϕ).

$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{-x} x^2 y + y^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_{0}^{\boxed{-\frac{1}{\cos\phi}}} \boxed{r^4 \sin\phi} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi.$$

Lösung:



$$-1 = x = r\cos(\varphi) \Rightarrow r = -\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} \underbrace{x^2y+y^3}_{=y(x^2+y^2)}\,dy\,dx = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\int_{0}^{-\frac{1}{\cos\varphi}} \underbrace{r^2\cdot r\sin\varphi\cdot r}_{=r^4\sin\varphi}\,dr\,d\varphi$$

6. (10 Punkte) Finden Sie den Punkt mit dem kleinsten Abstand zum Ursprung $(0,0,0)$ auf der Schnittkurve der Ebene $2y+4z = 5$ mit dem Kegel $4x^2+4y^2-z^2 = 0$.

Lösung:

$g_1(x,y,z) = 2y + 4z$

$g_2(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2$

$\nabla f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \\ -2z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \\ -2z \end{pmatrix} \\ 2y + 4z = 5 \\ 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I)} & 2x = 8\lambda_2 x \\ \text{II)} & 2y = 2\lambda_1 + 8\lambda_2 y \\ \text{III)} & 2z = 4\lambda_1 - 2\lambda_2 z \\ \text{IV)} & 2y + 4z = 5 \\ \text{V)} & 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

1) $\underline{x \neq 0}$: I) $\therefore\ 2 = 8\lambda_2 \ \therefore\ \lambda_2 = \frac{1}{4}$.

$\rightarrow$ II): $2y = \frac{\lambda_1}{2} + 2y \ \therefore\ \lambda_1 = 0$

$\rightarrow$ III): $2z = -\frac{1}{2}z \ \therefore\ z = 0$

$\rightarrow$ IV): $y = \frac{5}{2}$

$\rightarrow$ V): $0 = 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 4x^2 + 4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 > 0$ ↯.

2) $\boxed{x = 0}$: ~~II) $2y = 2\lambda_1 + 8\lambda_2 y$~~, ~~III) $2z = 4\lambda_1 - 2\lambda_2 z$~~ $\cdot(-2) \rightarrow$ ~~$2z - 4y = -2\lambda_2 z - 16\lambda_2 y$~~

$\rightarrow$ V) $z^2 = 4y^2 \ \therefore\ z = \pm 2y$

a) $\underline{z = 2y}$: $\rightarrow$ IV) $2y + 8y = 5 \ \therefore\ \boxed{y = \frac{1}{2}}$, $\therefore\ \boxed{z = 1}$ $\Big\}$ $f(0, \frac{1}{2}, 1) = \frac{5}{4}$

<u>Min</u>

II) $1 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2$

III) $2 = 4\lambda_1 - 2\lambda_2$ $\cdot(2)$ $\Big\}$ $5 = 10\lambda_1 \ \therefore\ \lambda_1 = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ III) $2 = 2 - 2\lambda_2 \ \therefore\ \lambda_2 = 0$ ✓

b) $\underline{z = -2y}$: $\rightarrow$ IV) $5 = 2y - 8y = -6y \ \therefore\ \boxed{y = -\frac{5}{6}}$

$\therefore\ \boxed{z = \frac{5}{3}}$

II) $-\frac{5}{3} = 2\lambda_1 - \frac{20}{3}\lambda_2$

III) $\frac{10}{3} = 4\lambda_1 - \frac{10}{3}\lambda_2$ $\cdot(-2) \rightarrow \frac{20}{3} = 10\lambda_2 \ \therefore\ \lambda_2 = \frac{2}{3}$

$\rightsquigarrow$ ✓

$$f\left(0,-\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2\left(\frac{1}{4}+1\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$>\frac{5}{4}$$

Max

7. **(10 Punkte)** Zu einem Parameter $a \geq 0$ betrachten wir einen Balken der Form

$$B(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - a \leq x \leq a - y^2, 0 \leq z \leq 7\}$$

in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(a)$ des Balkens $B(a)$ bezüglich der z-Achse in Abhängigkeit von dem Parameter $a \geq 0$.

Lösung: Die Formel für das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ist laut Vorlesung

$$I_z(a) = \int_{B(a)} r_z(x, y, z)^2 \cdot \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V,$$

wobei $r_z(x, y, z)^2 = x^2 + y^2$ den quadrierten Abstand des Punktes (x, y, z) zur z-Achse bezeichnet. Da $\rho = 1$ konstant ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_z(a) &= \int_{B(a)} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^7 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{y^2-a}^{a-y^2} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 7 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=y^2-a}^{a-y^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 14 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{a^3}{3} - a^2y^2 + ay^4 + ay^2 - \frac{y^6}{3} - y^4 \,\mathrm{d}y \\
&= 14 \left[\frac{1}{3}\left(a^3y - a^2y^3 + \frac{3ay^5}{5} + ay^3 - \frac{y^7}{7} - \frac{3y^5}{5}\right)\right]_{y=-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \\
&= \frac{8}{15}a^{5/2}(8a + 7).
\end{aligned}$$

8. **(10 Punkte)** Wir betrachten die Fläche

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 2\}$$

und das Vektorfeld

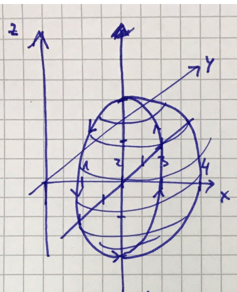
$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{xy} \cos z \\ x^2 z \\ xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_H \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S},$$

wobei H so orientiert sein soll, dass der Normalenvektor immer eine nichtnegative x-Komponente hat.

Lösung:



$$H = \{(x,y,z) \mid (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \geq 2\}$$

$$\gamma(t) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xy}\cos z \\ x^2 z \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\int_H \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \ldots$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} e^{xy}\cos z \\ x^2 z \\ xy \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=2 \\ y=2\cos t \\ z=2\sin t}} = \begin{pmatrix} e^{4\cos t}\cos(2\sin t) \\ 8\sin t \\ 4\cos t \end{pmatrix}$$

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{4\cos t}\cos(2\sin t) \\ 8\sin t \\ 4\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -16\sin^2 t + 8\cos^2 t\, dt = -64\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt + 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$

$$= -32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = -32 \cdot \frac{\pi}{4} = -8\pi.$$

9. (10 Punkte) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' \cdot x = \sqrt{1+y^2}, & \text{für alle } x > 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Lösung:

Lösen Sie das folgende AWP.

$$\begin{cases} y' \cdot x = \sqrt{1+y^2}, & x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Lsg: $y' \cdot x = \sqrt{1+y^2}$

$$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_1^x \frac{y'(s)}{\sqrt{1+y^2(s)}}\, ds = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds = \ln|x| - \ln|1| \overset{x>0}{=} \ln(x)$$

$$\int_0^y \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arsinh}(y) - \underbrace{\operatorname{arsinh}(0)}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \sinh(\ln(x)) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln(x)} - e^{-\ln(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$