Prüfung
Analysis I/II D-BAUG
Lösung Winter 2018

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

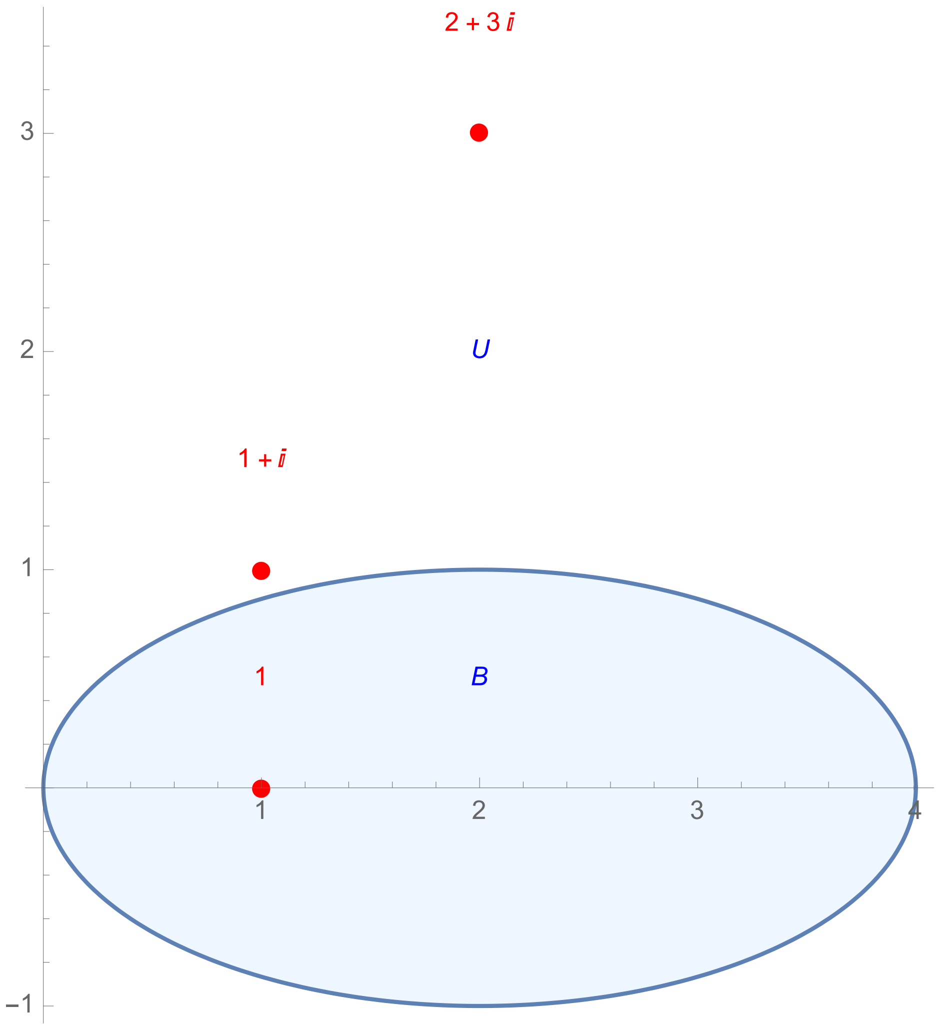
1. (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma(t) = 2\cos(4t) + 2 + i\sin(4t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Lösung:



b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - (4+4i)z^2 + (2+9i)z + (1-5i).$$

Lösung: Durch Einsetzen sieht man, dass 1 eine Nullstelle von $p(z)$ ist. Durch Polynomdivision erhält man

$$p(z) = (z-1)(z^2 - (3+4i)z + (-1+5i)).$$

Die Nullstellen des letzten Terms bestimmt man dann mittels der Formel für Nullstellen quadratischer Gleichungen zu

$$z = \frac{3+4i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3+4i}.$$

Um eine der quadratischen Wurzeln $w = \sqrt{-3+4i}$ zu bestimmen schreiben wir $w = u + iv$ und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ 2uv = 4 \end{cases}$$

mit der Lösung $u = 1, v = 2$ (oder $u = -1, v = -2$). Weitere Nullstellen sind also

$$z = \frac{3+4i}{2} + \frac{w}{2} = 2 + 3i$$

und

$$z = \frac{3+4i}{2} - \frac{w}{2} = 1 + i.$$

Insgesamt erhält man also 1, $1+i$ und $2+3i$ als komplexe Nullstellen von $p(z)$.

c) **(3 Punkte)** Die Kurve γ teilt die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in zwei Teilmengen: eine beschränkte Menge B und eine unbeschränkte Menge U.

Verwenden Sie Ihre Skizze aus Aufgabenteil **a)** um zu bestimmen, welche der in Aufgabenteil **b)** bestimmten Nullstellen in B und welche in U liegen.

Lösung: Die Nullstellen von $p(z)$ sind mit rot in der Zeichnung zu Aufgabenteil **a)** eingetragen. Offenbar ist 1 in B, und $1+i$ und $2+3i$ in U.

2. **(10 Punkte)** Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) **(3 Punkte)**

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \mathrm{d}x$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \mathrm{d}x &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{u=\ln x}{=} [\ln|x|]_{x=e}^{e^2} + \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2 - 1 + [\ln|u|]_{u=1}^2 \\
&= 1 + \ln 2 - \ln 1 = 1 + \ln 2
\end{aligned}$$

b) (4 Punkte)

$$\int \frac{x^2+x+8}{x^3-x^2+9x-9}\,\mathrm{d}x$$

Lösung: Zunächst ist offensichtlich $x = 1$ eine Nullstelle des Nenners. Polynomdivision ergibt nun

$$x^3-x^2+9x-9 = (x-1)\left(x^2+9\right),$$

sodass man den folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung wählt

$$\frac{x^2+x+8}{x^3-x^2+9x-9} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}.$$

Es gilt

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(9A-C)}{x^3-x^2+9x-9},$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man das LGS

$$\begin{aligned} A+B &= 1, \\ C-B &= 1, \\ 9A-C &= 8. \end{aligned}$$

Dessen Lösung ist $A = 1, B = 0, C = 1$, sodass

$$\frac{x^2+x+8}{x^3-x^2+9x-9} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+9}$$

gilt.
Dies lässt sich nun integrieren

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x+8}{x^3-x^2+9x-9}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c, \end{aligned}$$

wobei c eine reelle Konstante ist.

c) (3 Punkte)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)-x}{\sin\left(x^3\right)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)-x}{\sin\left(x^3\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)-x}{x^3-\frac{x^9}{3!}+\dots} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots}{x^3-\frac{x^9}{3!}+\dots} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}+\dots}{1-\frac{x^6}{3!}+\dots} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. (10 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 6\sqrt{9-x} + 3\sqrt{x}.$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen von f für $x \in (0, 9)$. Sie müssen den Ausruck **nicht** vereinfachen!

Lösung: Die Formel für die Krümmung des Funktionsgraphen an der Stelle x ist

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{9-x}}, \tag{2}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4x^{3/2}} - \frac{3}{2(9-x)^{3/2}}. \tag{3}$$

Damit ergibt sich folglich

$$\kappa(x) = \frac{-\frac{3}{4x^{3/2}} - \frac{3}{2(9-x)^{3/2}}}{\left(\left(\frac{3}{\sqrt{9-x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 1\right)^{3/2}}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Stellen $x \in (0, 9)$, an welchen die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ übereinstimmt. Berechnen Sie die Krümmung an diesen Stellen.

Lösung: Man sieht anhand von Formel (1), dass die Krümmung genau dann mit $f''(x)$ übereinstimmt, wenn $f'(x) = 0$ oder $f''(x) = 0$ ist, wobei letzteres hier nie eintritt, da $f''(x) < 0$ für alle $x \in (0, 9)$. Nach (2) ist $f'(x) = 0$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{9-x}} \\ \iff \frac{1}{4x} &= \frac{1}{9-x} \\ \iff 4x &= 9 - x \\ \iff x &= \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Die Krümmung an dieser Stelle ist dann gemäss (3)

$$\kappa\left(\frac{9}{5}\right) = f''\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{1}{144}\left(25\sqrt{5}\right).$$

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion f auf dem Intervall $[0, 9]$ und die zugehörigen Funktionswerte.

Lösung: Aus 3b wissen wir bereits, dass der einzige kritische Punkt von f auf dem Intervall $[0, 9]$ bei $x = \frac{9}{5}$ liegt. Ausserdem ist die Krümmung an dieser Stelle negativ und gleich der zweiten Ableitung $f''\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{1}{144}\left(25\sqrt{5}\right) < 0$, sodass es sich um ein lokales Maximum handelt. Wir berechnen noch den Funktionswert

$$f\left(\frac{9}{5}\right) = 9\sqrt{5}.$$

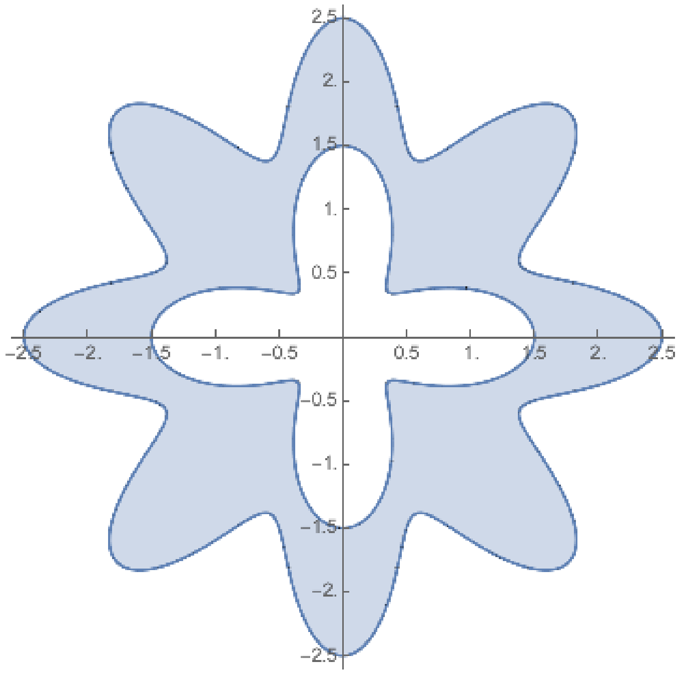
Es bleiben noch die Randpunkte zu untersuchen

$$f(0) = 18,$$
$$f(9) = 9.$$

Da $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, gilt $9\sqrt{5} > 18 > 9$. Damit ist das globale Maximum von f auf dem Intervall $[0, 9]$ bei $\left(\frac{9}{5}, 9\sqrt{5}\right)$, und das globale Minimum bei $(9, 9)$.

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Kreuzen Sie Ihre Antwort bitte **auf dem Aufgabenblatt** an. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort, mehrere Antworten oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

a) Gegeben sei das folgende Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$:



Dann gilt für jede stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}$

$$\iint_G f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \ldots$$

(I) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\, r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

(II) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4r)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4r)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\, r \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$

(III) ☑

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\, r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

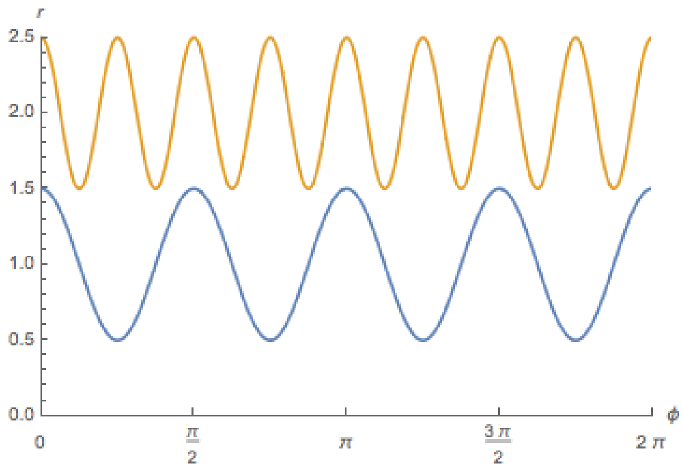
(IV) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

Lösung: Das Gebiet G ist das Bild des Normalbereichs vom Typ 1

$$N = \left\{(r,\phi) \mid 0 \le \phi \le 2\pi, 1 + \frac{1}{2}\cos(4\phi) \le r \le 2 + \frac{1}{2}\cos(8\phi)\right\}$$

unter der Polarkoordinatentransformation. Hier ist ein Bild des begrenzten Bereichs in Polarkoordinaten:



b) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Oberfläche und sei $K = \partial S$ ihr Rand mit der von S induzierten Orientierung. Dann gilt

$$\int_K \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \ldots$$

(I) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

(II) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

(III) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

(IV) ☑

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}$$

Lösung: Wir berechnen

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Stokes gilt dann

$$\int_K \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}.$$

c) Wir betrachten die Funktion $g(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ und das Vektorfeld $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$. Weiter sei K die durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\int_K \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = \ldots$$

(I) ☑ -8

(II) ☐ -7

(III) ☐ 0

(IV) ☐ 6

Lösung:

$$\int_K \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_K \nabla g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = g(\vec{r}(\pi)) - g(\vec{r}(0))$$
$$= g(0,0) - g(0,2) = 0 - 8 = -8.$$

d) Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, dessen Rand durch eine einfache geschlossene Kurve K im Gegenuhrzeigersinn parametrisiert wird. Wir interpretieren D als eine dünne Platte mit Dichte $\rho \equiv 1$. Ferner wollen wir annehmen, dass auch die Gesamtmasse von D gleich 1 ist, d.h.

$$\iint_D 1 \,\mathrm{d}A = 1.$$

Welches der folgenden Integrale berechnet **NICHT** die x-Koordinate des Schwerpunktes von D?

(I) ☑

$$\frac{1}{2} \oint_K -xy \,\mathrm{d}x$$

(II) ☐

$$\oint_K -xy \,\mathrm{d}x$$

(III) ☐

$$\iint_D x \,\mathrm{d}A$$

(IV) ☐

$$\frac{1}{2} \oint_K x^2 \,\mathrm{d}y$$

Lösung: Die x-Koordinate des Schwerpunktes ist nach Vorlesung gegeben durch

$$x_s = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}A}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}A} = \iint_D x \,\mathrm{d}A = \oint_K \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

wobei $\vec{F} = (U, V)$ ein Vektorfeld ist mit

$$V_x - U_y = x. \tag{4}$$

Sowohl

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

als auch

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}$$

erfüllen (4). Daher gilt

$$x_s = \oint_K \begin{pmatrix} -xy \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_K -xy \,\mathrm{d}x$$

und

$$x_s = \oint_K \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2} \oint_K x^2 \,\mathrm{d}y.$$

e) Welche Funktion ist die Lösung des folgenden Anfangswertproblems?

$$y' = 2xy + e^{x^2+x}, \quad y(0) = 2$$

(I) ☐ $y(x) = 2e^{x^2}$

(II) ☑ $y(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2}$

(III) ☐ $y(x) = 2e^{x^2+x}$

(IV) ☐ $y(x) = e^{x^2+x}$

Lösung: Es gilt für $y(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2}$

$$\begin{aligned} y(0) &= e^0 + e^0 = 2, \\ y'(x) &= e^{x^2+x}(2x+1) + 2xe^{x^2} \\ &= 2x\left(e^{x^2+x} + e^{x^2}\right) + e^{x^2+x} = 2x \cdot y(x) + e^{x^2+x} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

5. (12 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

$$c = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Lösung: Die Funktion f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ohne 0 als Komposition stetiger Funktionen. Wenn f auch in 0 stetig sein soll, so muss gelten

$$\begin{aligned} c &= \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x-1)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{e^x - 1 + xe^x} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ jeweils die Regel von de l'Hospital angewendet haben.

b) Wir betrachten die Kurve K mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\sin(\pi t), \sinh t + \cosh t), \quad t \in [0,1]$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Arbeit W des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang der Kurve K.

$W = \boxed{e-1}$

Lösung: Für $\vec{F}(x,y) = (U(x,y), V(x,y)) = (2xye^{x^2}, e^{x^2})$ gilt

$$V_x(x,y) - U_y(x,y) = \partial_x \left(e^{x^2}\right) - \partial_y \left(2xye^{x^2}\right) = 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0,$$

Da $\vec{F}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist, besitzt es daher ein Potential und die Arbeit längs eines Weges hängt nur von den Endpunkten ab. Man kann die Arbeit W längs K daher über jede Kurve L berechnen, welche vom Anfangspunkt von K zu deren Endpunkt läuft. Der Anfangspunkt von K ist

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ihr Endpunkt ist

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}.$$

Die Kurve L mit der Parametrisierung

$$\vec{s}(t) = (0,t), \qquad t \in [1,e]$$

verbindet daher die Endpunkte von K, und es gilt

$$\begin{aligned} W &= \int_K \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_1^e \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \cdot te^{0^2} \\ e^{0^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_1^e 1 \,\mathrm{d}t = e - 1. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie den Parameter $C \in \mathbb{R}$, so dass die Fläche

$$F_C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - 4x + y^2 - 8y + C\right\}$$

die xy-Ebene (tangential) berührt.

$C = \boxed{20}$

Lösung: Wir stellen die Flächengleichung zunächst nach dem Parameter C um und erhalten

$$C = -x^2 + 4x - y^2 + 8y + z.$$

Wir definieren

$$f(x, y, z) = -x^2 + 4x - y^2 + 8y + z$$

und berechnen

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x + 4 \\ -2y + 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In einem Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, in dem die xy-Ebene die Fläche $C = f(x, y, z)$ berührt, muss

$$z_0 = 0, \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -2x_0 + 4 \\ -2y_0 + 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten. Es folgt unmittelbar, dass $x_0 = 2$ und $y_0 = 4$. Der zugehörige Parameter berechnet sich somit zu

$$C = f(x_0, y_0, z_0) = f(2, 4, 0) = 20.$$

d) Vervollständigen Sie den folgenden Wechsel in Polarkoordinaten (r, ϕ).

$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{-x} x^2 y + y^3 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_{0}^{\boxed{-\frac{1}{\cos\phi}}} \boxed{r^4 \sin\phi} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi.$$

Lösung: Das Integral geht über das Gebiet

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [0, -x]\}.$$

Die vertikale Gerade $x = -1$ lässt sich in Polarkoordinaten parametrisieren durch

$$-1 = x = r\cos\phi \iff r = -\frac{1}{\cos\phi}.$$

Ferner gilt in Polarkoordinaten

$$x^2 y + y^3 = y(x^2 + y^2) = r\sin\phi \cdot r^2 = r^3 \sin\phi,$$

so dass mit dem Flächenelement $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ gilt

$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{-x} x^2 y + y^3 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_{0}^{-\frac{1}{\cos\phi}} r^4 \sin\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi.$$

6. (10 Punkte) Finden Sie den Punkt auf der Schnittkurve der Ebene $2y + 4z = 5$ mit dem Kegel $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, welcher den kleinsten Abstand zum Urpsrung $(0, 0, 0)$ hat.

Lösung: Wir wollen das Minimum bestimmen von

$$f(x, y, z) := \|x^2 + y^2 + z^2\|$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) := 2y + 4z \overset{!}{=} 5$$
$$g_2(x,y,z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 \overset{!}{=} 0.$$

Zunächst beobachtet man, dass $f(x,y,z)$ genau dann minimal ist, wenn $h(x,y,z) = f^2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ minimal ist, so dass wir anstelle von f die Funktion h unter obigen Nebenbedingungen minimieren können.

Wir wollen die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwenden. Dazu berechnen wir

$$\nabla h(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \\ -2z \end{pmatrix}.$$

Es muss gelten

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= 5, \\ g_2(x,y,z) &= 0, \\ \nabla h(x,y,z) &= \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z). \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2y + 4z &= 5, && (5) \\ 4x^2 + 4y^2 - z^2 &= 0, && (6) \\ 2x &= 8\lambda_2 x, && (7) \\ 2y &= 2\lambda_1 + 8\lambda_2 y, && (8) \\ 2z &= 4\lambda_1 - 2\lambda_2 z. && (9) \end{aligned}$$

Wir unterscheiden mehrere Fälle:

(a) $\underline{x \neq 0:}$ Aus (7) folgt $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Aus (8) folgt dann $\lambda_1 = 0$ und mit (9) $z = 0$. Einsetzen in (5) liefert $y = \frac{5}{2}$. Aber aus (6) folgt auch $y = 0$, so dass wir einen Widerspruch erhalten.

(b) $\underline{x = 0:}$ Aus (6) folgt $z^2 = 4y^2$, d.h. $z = \pm 2y$.
   i. $\underline{z = 2y:}$ Aus (5) folgt $y = \frac{1}{2}$ und somit $z = 1$. Ein Kandidat ist also $(0, \frac{1}{2}, 1)$.
   ii. $\underline{z = -2y:}$ Aus (5) folgt $y = -\frac{5}{6}$ und somit $z = \frac{5}{3}$. Ein weiterer Kandidat is also $(0, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3})$.

Wir vergleichen die Funktionswerte der beiden Kandidaten

$$\begin{aligned} h(0, \tfrac{1}{2}, 1) &= \frac{5}{4}, \\ h(0, -\tfrac{5}{6}, \tfrac{5}{3}) &= \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} > \frac{5}{4} = h(0, \tfrac{1}{2}, 1). \end{aligned}$$

Der Punkt mit minimalem Abstand ist damit $(0, \frac{1}{2}, 1)$.

7. (10 Punkte) Zu einem Parameter $a \geq 0$ betrachten wir einen Balken der Form

$$B(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - a \leq x \leq a - y^2, 0 \leq z \leq 7\}$$

in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(a)$ des Balkens $B(a)$ bezüglich der z-Achse in Abhängigkeit von dem Parameter $a \geq 0$.

Lösung: Die Formel für das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ist laut Vorlesung

$$I_z(a) = \int_{B(a)} r_z(x, y, z)^2 \cdot \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V,$$

wobei $r_z(x, y, z)^2 = x^2 + y^2$ den quadrierten Abstand des Punktes (x, y, z) zur z-Achse bezeichnet. Da $\rho = 1$ konstant ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_z(a) &= \int_{B(a)} x^2 + y^2\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^7 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{y^2-a}^{a-y^2} x^2 + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 7 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=y^2-a}^{a-y^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 14 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{a^3}{3} - a^2y^2 + ay^4 + ay^2 - \frac{y^6}{3} - y^4\,\mathrm{d}y \\
&= 14 \left[\frac{1}{3}\left(a^3y - a^2y^3 + \frac{3ay^5}{5} + ay^3 - \frac{y^7}{7} - \frac{3y^5}{5}\right)\right]_{y=-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \\
&= \frac{8}{15} a^{5/2}(8a + 7).
\end{aligned}$$

8. (10 Punkte) Wir betrachten den Körper

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^4 e^{z^2} \\ y^2 e^z \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ nach Aussen durch die Oberfläche von V.

Lösung: Nach dem Satz von Gauß gilt für den Fluss nach Aussen

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\,\mathrm{d}V.$$

Wir benutzen Zylinderkoordinaten um die z-Achse um V geeignet zu parametrisieren. Aus $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ und $x^2 + y^2 \geq 1$ folgt mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$1 \leq r \leq \sqrt{9 - z^2}.$$

Der Körper V ist in Zylinderkoordinaten deshalb gegeben durch

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2, \quad 1 \leq r \leq \sqrt{9-z^2}.$$

Ferner gilt

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 4x^3 e^{z^2} + 2ye^z + 3z^2.$$

Somit berechnet man

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}V \\
&= \int_0^2 \int_1^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{2\pi} \left(4r^3 \cos^3\phi \cdot e^{z^2} + 2r \sin\phi \cdot e^z + 3z^2\right) \cdot r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \int_1^{\sqrt{9-z^2}} 6\pi z^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\
&= 3\pi \int_0^2 8z^2 - z^4 \, \mathrm{d}z = 3\pi \left[\frac{8}{3}z^3 - \frac{z^5}{5}\right]_{z=0}^2 \\
&= 3\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{224}{5}\pi.
\end{aligned}$$

9. (10 Punkte) Wir betrachten die folgende inhomogene lineare Differentialgleichung vierten Grades

$$y''''(x) + y''(x) = 40\, e^{-2x}. \tag{DGL}$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Form einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (DGL).

Lösung: Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y''''(x) + y''(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\mathrm{Ch}(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1)$$

und hat eine doppelte Nullstelle bei 0 und jeweils eine einfache Nullstelle bei i und $-i$. Daher ist die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der homogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= C_1 e^{0\cdot x} + C_2 x e^{0\cdot x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) \\
&= C_1 + C_2 x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)
\end{aligned}$$

mit reellen Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung. Da -2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz $y_p(x) = Ae^{-2x}$ mit $A \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -2Ae^{-2x}, \\ y_p''(x) &= 4Ae^{-2x}, \\ y_p'''(x) &= -8Ae^{-2x}, \\ y_p''''(x) &= 16Ae^{-2x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (DGL) ergibt

$$40e^{-2x} = 16Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} = 20Ae^{-2x},$$

und es folgt $A = 2$. Somit ist $y_p(x) = 2e^{-2x}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (DGL).
Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = 2e^{-2x} + C_1 + C_2 x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

mit reellen Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

b) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (DGL), welche auf $[0, +\infty)$ beschränkt ist und die Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = -6, \\ y''(0) = 9, \end{cases}$$

erfüllt.
Lösung: Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = 2e^{-2x} + C_1 + C_2 x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

mit reellen Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. Diese ist genau dann auf $[0, +\infty)$ beschränkt, wenn $C_2 = 0$ ist. Um die übrigen Konstanten C_1, C_3 und C_4 zu berechnen, setzen wir die Anfangsbedingungen ein.

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) = 2 + C_1 + C_3, && (10) \\ -6 &= y'(0) = -4 + C_4, && (11) \\ 9 &= y''(0) = 8 - C_3. && (12) \end{aligned}$$

Aus (11) folgt $C_4 = -2$, und aus (12) folgt $C_3 = -1$. Einsetzen in (10) liefert schliesslich $C_1 = 1$.
Die gesuchte Lösung ist daher

$$y(x) = 2e^{-2x} + 1 - \cos(x) - 2\sin(x).$$