Zwischenprüfung
Analysis I D-BAUG
Winter 2017

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

Version A

Wichtige Hinweise:

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine, ausser das verteilte Blatt mit Standardintegralen.
- Schreiben Sie Ihren Namen, Vornamen und Legi-Nummer in GROSSBUCHSTABEN auf Ihr Antwortblatt und kreuzen Sie Ihre Version der Prüfung an.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch, sodass wir sie kontrollieren können.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig.
- Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antwort erhalten Sie einen Abzug von $\frac{1}{3}$ Punkten. Wird eine Frage nicht beantwortet, erhalten Sie dafür 0 Punkte; also weder Plus- noch Minuspunkte.
- Achten Sie darauf, dass Sie das Antwortblatt sauber ausfüllen. Im Zweifelsfall gilt eine Antwort als falsch.
- Zur Korrektur eines gesetzten Kreuzchens verwenden Sie bitte Tipp-Ex. Sollten Sie selbst kein Tipp-Ex dabei haben melden Sie sich bitte; die Aufsicht in Ihrem Raum hat ein paar dabei.
- Tragen Sie am Ende der Prüfung die Anzahl der von Ihnen gemachten Kreuzchen als Prüfsumme unten auf dem Antwortblatt ein.

Viel Erfolg!

1. Was ist die (maximale) Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Bildmenge $B_f = \{f(x) \,|\, x \in D_f\}$ der Funktion

$$f(x) = \frac{x-4}{2x+1}?$$

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

√ (d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Man sieht leicht, dass

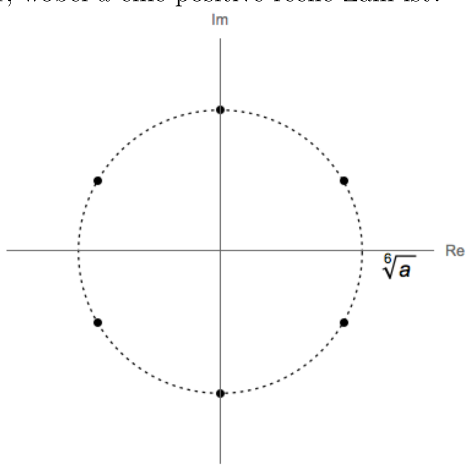
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{x + \frac{1}{2}}.$$

Somit ist f eine verschobene und verzerrte Hyperbel $g(x) = \frac{1}{x}$, so dass $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ und $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

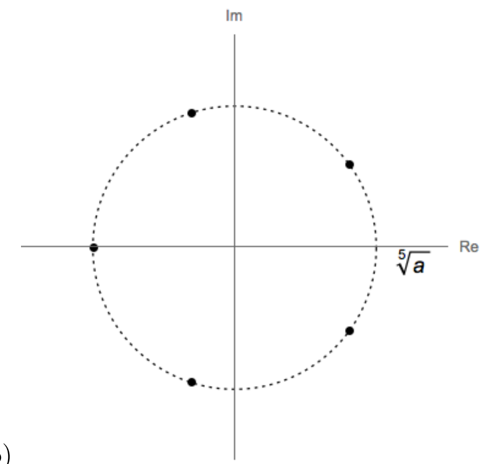
2. Welches der folgenden Bilder stellt die Lösungsmenge der Gleichung

$$z^6 - a = 0$$

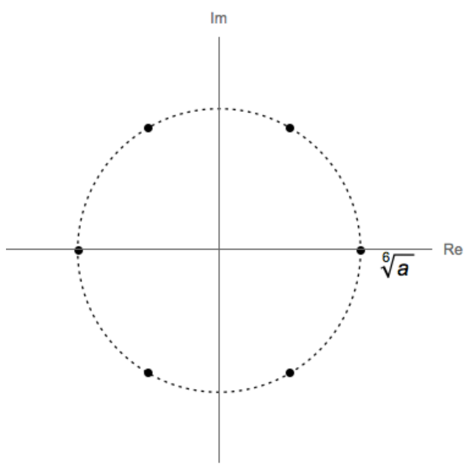
in $\mathbb{C}$ dar, wobei a eine positive reelle Zahl ist?



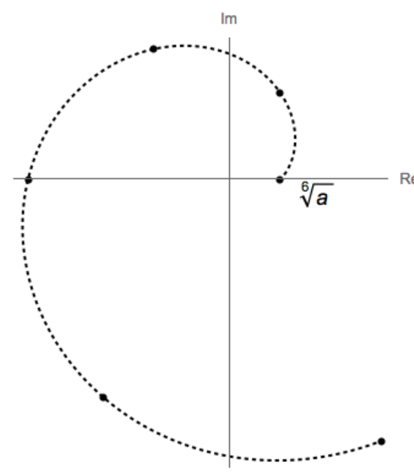
(a)



(b)



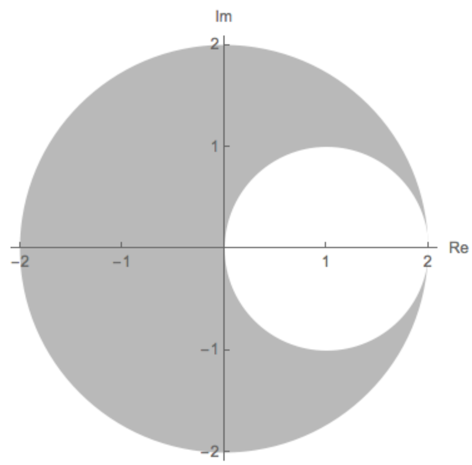
(c)



(d)

Alle Wurzeln haben Abstand $\sqrt[6]{a}$ von 0 und $\sqrt[6]{a} \in \mathbb{R}$ ist eine davon. Damit bleibt nur (c) als mögliche Lösung.

3. Welche der folgenden Mengen ist in diesem Bild der komplexen Ebene grau gefärbt?



√ (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 4\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 2\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| > 1 \text{ und } 2|z| < 1\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 1\}$

Die grau gefärbte Menge ist die Kreisscheibe mit Radius 2 um 0 ohne die Kreisscheibe mit Radius 1 um 1. Das ist als Menge geschrieben

$$\begin{aligned} &\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1\} \\ &\quad = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 4\}. \end{aligned}$$

4. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right) \cdot \left(\sqrt{2} + ib\right)$$

reell?

(a) 0

(b) 1

√ (c) $\sqrt{2}$

(d) 2

Es gilt

$$\exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right).$$

Also

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right) \cdot \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) \\ &= -2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Erinnerung: Es gibt nur eine richtige Antwort.

(a) Eine divergente Folge ist unbeschränkt.

√ (b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch

$$b_n = (-1)^n \sin(a_n)$$

eine Nullfolge.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch

$$b_n = a_n + \frac{n}{n+1}$$

eine Nullfolge.

(d) Eine Folge, welche positiv und beschränkt ist, ist auch konvergent.

Für $b_n = (-1)^n \sin(a_n)$ gilt

$$|b_n| = |\sin(a_n)| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

da $\sin(x)$ stetig ist und $\sin(0) = 0$.

6. Was ist der Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{3n^5 - \frac{1}{n}}{2n + 4\sqrt{n^{10}+3} + \sqrt{n}}$$

für n gegen unendlich?

(a) ∞

√ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{3}{2}$

(d) 0

Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^5 - \frac{1}{n}}{2n + 4\sqrt{n^{10}+3} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{3 - n^{-6}}{4\sqrt{1+3n^{-10}} + 2n^{-4} + n^{-9/2}} \to \frac{3}{4} \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

7. Was ist der Grenzwert der Folge

$$a_n = n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+\pi}\right)$$

für n gegen unendlich?

Hinweis: Approximieren Sie den Sinus durch ein Polynom.

(a) ∞

(b) 0

(c) 1

√ (d) π

Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+\pi}\right) \\ &= n \cdot \left(\frac{n\pi}{n^2+\pi} - \frac{1}{3!}\left(\frac{n\pi}{n^2+\pi}\right)^3 + \cdots\right) \\ &= \frac{n^2\pi}{n^2+\pi} - \frac{\pi^3}{3!}\frac{n}{(n+\pi/n)^3} + \cdots \to \pi \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

8. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ konvergiert.

√ (c) Keine der anderen Aussagen ist richtig.

(d) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

Für alle der anderen Aussagen ist die konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

ein Gegenbeispiel.

9. Was ist der Grenzwert der folgenden Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{18^n}}{6^n}$$

√ (a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

(b) $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

(d) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

Es gilt mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{18^n}}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3\sqrt{2}}{6}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

10. Welche der folgenden stückweise definierten Funktionen ist **NICHT** stetig?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < -2, \\ x^2 & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < 1, \\ x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

√ (c)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < -1, \\ x^2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < 0, \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Offenbar gilt $-(-1)^3 + 2(-1) = -1 \neq 1 = (-1)^2$.

11. Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

(a) $c = 2$

√ (b) $c = -\frac{1}{2}$

(c) $c = \frac{1}{2}$

(d) $c = 0$

Mit der Regel von de l'Hopital folgt

$$c \stackrel{!}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}.$$

12. Was ist die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \ln(\sin x) - x\cos x?$$

(a)

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} - \cos x + \sin x$$

√ (b)

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + x\sin x$$

(c)

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} - \cos x + x\sin x$$

(d)

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x - \sin x$$

Das folgt unmittelbar aus der Kettenregel und der Produktregel.

13. Wo liegt das Maximum und wo liegt das Minimum der Funktion

$$f(x) = (\cos(x) - 1)^2 + (\sin(x) - 1)^2$$

auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

(a) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{2}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{\pi}{4}$.

(b) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{2}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{\pi}{2}$.

√ (c) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{4}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{\pi}{2}$.

(d) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{4}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{3}{4}\pi$.

Die Funktion $f(x) = (\cos(x)-1)^2 + (\sin(x)-1)^2$ stellt den quadrierten Abstand zwischen dem Punkt $(\cos(x), \sin(x))$ auf dem Einheitskreis und dem Punkt $(1, 1)$ dar. Die Punkte $(\cos(x), \sin(x))$ mit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sind genau die Punkte des Einheitskreises mit positiver x-Koordinate, sozusagen die rechte Hälfte. Damit ist es klar, dass der minimale (quadrierte) Abstand im Punkt

$$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)),$$

also für $x = \pi/4$, angenommen wird, und der maximale im Punkt

$$(0, -1) = (\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2)),$$

also für $x = -\pi/2$.

14. Was ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3^{n-2}}$$

(a) 1

√ (b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{1}{2}$

Der Konvergenzradius berechnet sich zu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}} \cdot \frac{3^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}.$$

15. Was ist der Konvergenzbereich K der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}?$$

(a) $K = (\infty, 1]$

(b) $K = (-1, 1)$

(c) $K = [-1, 0)$

✓ (d) $K = (-\infty, 0)$

Wir substituieren $y = e^x$ und erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

welche für alle $y \in (-1, 1)$ konvergiert. Somit konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle x mit $e^x \in (-1, 1)$, d.h. für alle $x \in (-\infty, 0)$.

16. Was ist der Konvergenzbereich K der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (10x - 9)^n?$$

(a) $K = (0, 1)$

(b) $K = \left(-1, -\frac{4}{5}\right)$

✓ (c) $K = \left(\frac{4}{5}, 1\right)$

(d) $K = \left(\frac{9}{10}, 1\right)$

Wir substituieren $y = 10x - 9$ und erhalten die geometrische Reihe. Diese konvergiert für alle $y \in (-1, 1)$. Die ursprüngliche Reihe konvergiert somit für alle $x \in \left(\frac{4}{5}, 1\right)$.

17. Was ist die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cosh(x) + \cos(x))$$

an der Entwicklungsstelle 0?

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

√ (c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$$

Die Potenzreihendarstellung von $\cos(x)$ und $\cosh(x)$ sind

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Daraus folgt durch gliedweises addieren

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cosh(x) + \cos(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

18. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \cos(x^3)$. Was ist der Koeffizient vor x^7 in der Taylorentwicklung

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

von F um 0?

(a) 1

(b) $\frac{1}{7}$

√ (c) $-\frac{1}{14}$

(d) $-\frac{1}{2}$

Es gilt

$$f(x) = \cos\left(x^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n}$$

und somit

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6n+1} \frac{x^{6n+1}}{(2n)!} + C \\ &= C + x - \frac{x^7}{7 \cdot (2!)} + \cdots \end{aligned}$$

Der gesuchte Koeffizient ist also $-\frac{1}{14}$.

19. In Polarkoordinaten ist die *logarithmische Spirale* gegeben durch

$$r(\varphi) = e^{\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Was ist dann der Grenzwert der Krümmung $\kappa(\varphi)$ dieser Spirale für φ gegen unendlich?

$$\lim_{\varphi \to \infty} \kappa(\varphi) = \ldots$$

√ (a) 0

(b) ∞

(c) -1

(d) 1

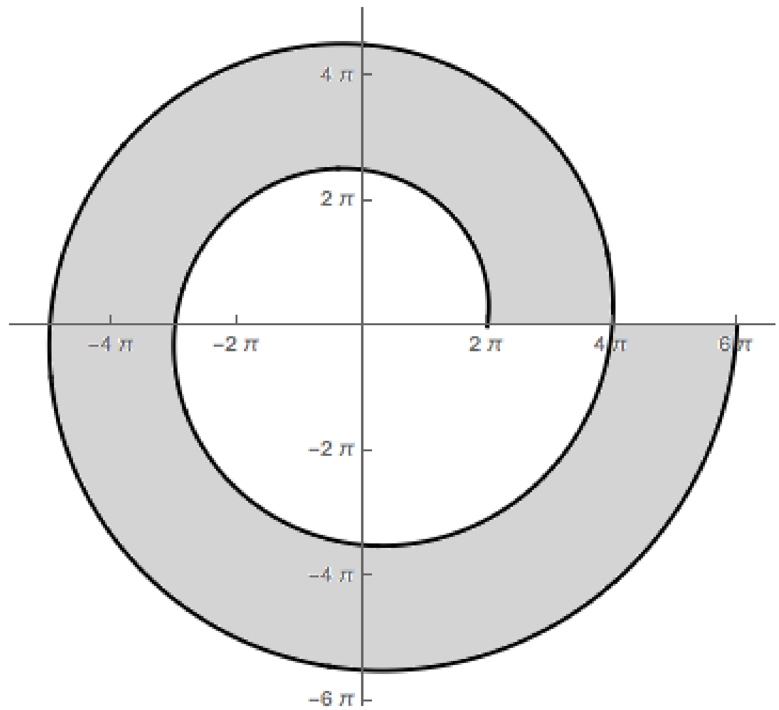
Da der Radius exponentiell mit φ wächst, wird die Spirale flacher und flacher. Die richtige Antwort ist daher anschaulich $\lim_{\varphi \to \infty} \kappa(\varphi) = 0$. Dies lässt sich auch leicht mittels der expliziten Formel für die Krümmung bestätigen.

20. **Diese Aufgabe wurde leider falsch gestellt und deshalb aus der Bewertung herausgenommen. Die korrigierte Aufgabenstellung lautet wie folgt (Korrektur in rot):**

In Polarkoordinaten ist die *archimedische Spirale* gegeben durch

$$r(\varphi) = \varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Was ist der Inhalt der im folgenden Bild grau gefärbten Fläche zwischen zwei Zyklen der archimedischen Spirale?



(a)

$$\int_{2\pi}^{6\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi - \int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$$

√ (b)

$$\cancel{\pi}\frac{1}{2} \int_{4\pi}^{6\pi} \varphi^2 \, d\varphi - \cancel{\pi}\frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} \varphi^2 \, d\varphi$$

(c)

$$\int_{2\pi}^{6\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$$

(d)

$$\cancel{\pi}\frac{1}{2} \int_{2\pi}^{6\pi} \varphi^2 \, d\varphi$$

Die Fläche welche vom k-ten Zyklus der archimedischen Spirale überstrichen wird, ist

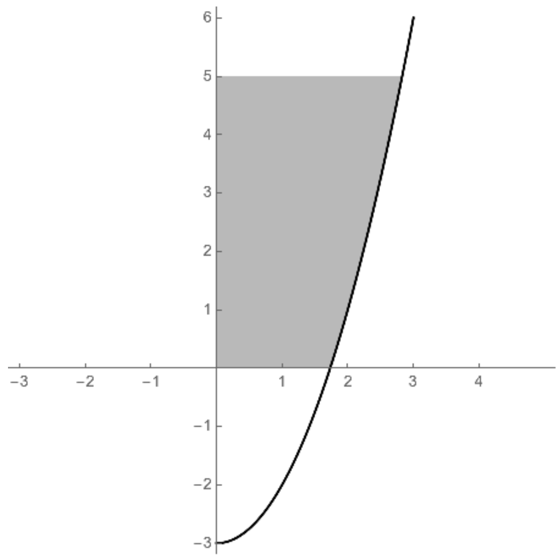
$$\cancel{\pi}\frac{1}{2}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} r(\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$

In der Abbildung ist die Fläche zwischen dem ersten und dem zweiten Zyklus eingefärbt, so dass der gesuchte Flächeninhalt

$$\cancel{\pi}\frac{1}{2}\int_{4\pi}^{6\pi} \varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi - \cancel{\pi}\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi$$

ist.

21. Was ist der Flächeninhalt des grau gefärbten Bereichs?



Die schwarze Kurve ist hier der Graph der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3$$

(a) $10\sqrt{2}$

√ (b) $\frac{32\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt{2}\left(11 - \frac{8}{3}\right)$

(d) $\frac{32}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{3}$

Spiegelt man an der Geraden $y = x$, so muss man den Flächeninhalt unter dem Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} von f zwischen 0 und 5 berechnen. Es ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y+3}$ und daher gilt für den Flächeninhalt

$$F = \int_0^5 \sqrt{y+3}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}(y+3)^{3/2}\Big|_{y=0}^{5} = \frac{32}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{3}.$$

22. Was ist der Flächeninhalt zwischen dem Kurvenstück

$$(t^2, t^6 - t^4 + 2), \quad t \in [1, 2]$$

und der x-Achse?

(a)

$$\int_1^2 (t^6 - t^3 + 2)t \,\mathrm{d}t$$

(b)

$$\int_1^2 (t^6 - t^3 + 2)^2 t \,\mathrm{d}t$$

(c)

$$\int_1^{\sqrt{2}} t^3 - t^2 + 2 \,\mathrm{d}t$$

√ (d)

$$\int_1^4 t^3 - t^2 + 2 \,\mathrm{d}t$$

Substituiert man $x = t^2$, so sieht man, dass das Kurvenstück

$$(t^2, t^6 - t^4 + 2), \quad t \in [1, 2]$$

gleich dem Kurvenstück

$$(x, x^3 - x^2 + 2), \quad x \in [1, 4]$$

ist. Letzteres ist eine Parametrisierung des Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ zwischen $x = 1$ und $x = 4$. Der gesucht Flächeninhalt ist damit

$$\int_1^4 x^3 - x^2 + 2 \,\mathrm{d}x = \int_1^4 t^3 - t^2 + 2 \,\mathrm{d}t.$$

23. Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \,\mathrm{d}t = \dots$$

✓ (a) $-\infty$

(b) ∞

(c) π

(d) -2π

Es gilt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \,\mathrm{d}t \stackrel{*}{=} \int_{1}^{0} \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{1} \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u = \lim_{a \searrow 0} \ln u\big|_{u=a}^{1} = -\infty,$$

wobei wir in * die Substitution $u = \sin(t)$ vorgenommen haben.

24. Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ ein Kurvenstück, so dass $y(t) > 0$ und $\dot{x}(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt. Wir bezeichnen mit V_1 das Volumen des Rotationskörpers, welcher dadurch entsteht, dass man die Kurve $\vec{r}(t)$ um die x-Achse rotiert.

Nun definieren wir das neue Kurvenstück

$$\vec{s}(t) := (3x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Wieder bezeichne V_2 das Volumen des Rotationskörpers, welcher dadurch entsteht, dass man $\vec{s}$ um die x-Achse rotiert.

In welcher Beziehung stehen V_1 und V_2?

(a) $V_2 = 9V_1$

(b) Man hat nicht genügend Informationen um zu entscheiden, ob eine der anderen Aussagen korrekt ist.

(c) $V_2 = V_1$

√ (d) $V_2 = 3V_1$

Das Volumen des Rotationskörpers des Kurvenstücks $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ ist

$$V_1 = \pi \int_a^b y^2(t)\dot{x}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Analog ist das Volumen des Rotationskörpers des Kurvenstücks $\vec{s}(t) = (3x(t), y(t)), t \in [a, b]$

$$V_2 = \pi \int_a^b y^2(t) \cdot 3\dot{x}(t)\, \mathrm{d}t = 3V_1.$$

25. Welche der folgenden Zahlen unterscheidet sich von den anderen?

(a)

$$8\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

√ (b)

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $(x(t), y(t)) = (\cos\left(t^2\right), \sin\left(t^2\right))$.

(c)

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $(x(t), y(t)) = (\cos(-2t), \sin(-2t))$.

(d) Der Umfang des Einheitskreises.

Die Kurve $(x(t), y(t)) = (\cos\left(t^2\right), \sin\left(t^2\right))$ parametrsiert zwar den Einheitskreis, jedoch durchläuft sie ihn in „quadrierter" Geschwindigkeit. Daher durchläuft das Kurvenstück $(\cos\left(t^2\right), \sin\left(t^2\right)), t \in [0, 2\pi]$ den Einheitskreis mehr als einmal umlaufen, so dass ihre Länge echt grösser als 2π ist. Alle anderen Werte haben jedoch den Wert 2π.