ETH Zürich

Zwischenprüfung Winter 2015 – Analysis I D-BAUG

Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 90 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine, ausser das verteilte Blatt mit Standardintegralen.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig
- Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antwort erhalten Sie einen Abzug von $\frac{1}{3}$ Punkten (bei vier Antwortmöglichkeiten), beziehungsweise 1 Punkt (bei wahr/falsch-Fragen). Wird eine Frage nicht beantwortet, erhalten Sie dafür weder Plus- noch Minuspunkte.
- Achten Sie darauf, dass Sie das Antwortblatt sauber ausfüllen. Im Zweifelsfall gilt eine Antwort als falsch.
- Schreiben Sie Name, Vorname, Legi-Nummer und den oben vermerkten Prüfungstyp in Grossbuchstaben auf ihr Antwortblatt.
- Tragen Sie am Ende der Prüfung die Anzahl der von Ihnen gemachten Kreuzchen als Prüfsumme unten auf dem Antwortblatt ein.

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

Bitte wenden!

1. Es gilt $\forall n < m \in \mathbb{N}\, \exists s \in \mathbb{N} : n < s < m$.

(a) wahr

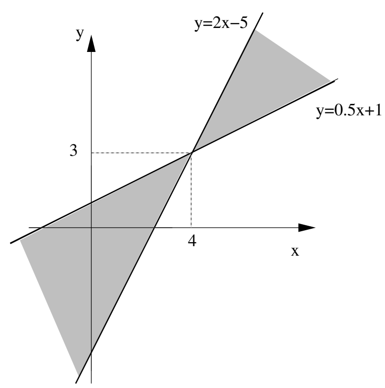
$\surd$ (b) falsch

Für $n = 5$ und $m = 6$ gibt es keine natürliche Zahl s mit $n < s < m$.

2. Die schraffierte Fläche in der folgenden Abbildung stellt die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0.5x + 1 \leq y \leq 2x - 5\}$$

dar.



(a) wahr

$\surd$ (b) falsch

Die Menge beschreibt nur den oberen Bereich. Zum Beispiel ist für $(x, y) = (0, 0)$ die Ungleichung $0.5x + 1 \leq y \leq 2x - 5$ falsch.

Siehe nächstes Blatt!

3. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen im Innern des ersten Quadranten der komplexen Ebene, so gilt:

√ (a) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) > 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) > 0$.

(b) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) < 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) > 0$.

(c) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) > 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) < 0$.

(d) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) < 0$ und $\operatorname{Re}(z\overline{w}) < 0$.

Punkte im ersten Quadrant haben positiven Real- und Imaginärteil, also $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ für $x, y, u, v > 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{z}{\overline{w}} &= \frac{zw}{\overline{w}w} = \frac{ux - vy + \mathrm{i}(uy + vx)}{u^2 + v^2} \\ &\Rightarrow \operatorname{Im}(\tfrac{z}{\overline{w}}) = \frac{uy + vx}{u^2 + v^2} > 0, \\ z\overline{w} &= ux + vy + \mathrm{i}(uy - vx) \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(z\overline{w}) = ux + vy > 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + \mathrm{i} = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

√ (a) 0

(b) $-\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

Die Lösungen von $z^4 = 1$ sind $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$. Um die Lösungen von $w^3 = -\mathrm{i}$ zu finden, schreibe $-\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}(\frac{3}{2}+2k)\pi}$. Also gilt $w \in \{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}, e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}\} = \{\mathrm{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\}$. Von der obigen Auswahl ist nur $0 = (-\mathrm{i}) + \mathrm{i}$ ein möglicher Wert.

5. Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, so gilt für den Betrag der Summe:

(a) $|z_1 + z_2| < 1$.

(b) $|z_1 + z_2| > 1$.

(c) $|z_1 + z_2| = 1$.

√ (d) alle drei obigen Fälle kommen vor.

Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} &|\tfrac{\mathrm{i}}{4} + \tfrac{\mathrm{i}}{4}| = \tfrac{1}{2} < 1, \\ &|\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}| = \tfrac{3}{2} > 1, \\ &|\tfrac{\mathrm{i}}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}| = 1. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

6. Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

$\surd$ (a) wahr

(b) falsch

Jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ definiert eine stetige Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für grosse x wird $p(x)$ durch $a_n x^n$ dominiert. Ist n ungerade und $a_n > 0$, so gilt $p(x_-) < 0$ für x_- klein und $p(x_+) > 0$ für x_+ gross. Folglich gibt es nach dem Zwichenwertsatz ein $x_0 \in [x_-, x_+]$ mit $p(x_0) = 0$. Analoges gilt für $a_n < 0$.

Alternative:
Jedes Polynom n-ten Grades hat n komplexe Nullstellen (mit Vielfachheit). Sind alle Koeffizienten reell, so treten nicht reelle Nullstellen in Paaren $z, \overline{z}$ auf. Die Anzahl nicht reeller Nullstellen ist folglich gerade und es muss mindestens eine reelle Nullstelle existieren.

7. Jede konvergente Folge ist monoton.

(a) wahr

$\surd$ (b) falsch

Betrachte die Nullfolge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Siehe nächstes Blatt!

8. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

(a) wahr

√ (b) falsch

Ein Gegenbeispiel ist die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{kn=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist dann die harmonische Reihe, welche divergiert.

Bitte wenden!

9. Bestimme den Grenzwert der folgenden Reihe, falls sie konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n+1}$$

(a) 2

√ (b) 4

(c) 9

(d) Die Reihe divergiert.

Dies ist eine geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n+1} = \tfrac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 4.$$

Siehe nächstes Blatt!

10. Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto n^3 + n \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3 + x.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Weder f noch g ist bijektiv.

(b) f ist bijektiv, g aber nicht.

$\surd$ (c) g ist bijektiv, f aber nicht.

(d) f und g sind beide bijektiv.

Die Funktion g ist nach dem Zwischenwertsatz surjektiv, da $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} = \infty$. Zudem ist sie streng monoton wachsend ($g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$) und folglich injektiv, also ist g bijektiv. Die Funktion f ist jedoch nicht surjektiv. Zum Beispiel gibt es kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(n) = 1$.

11. Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Falls $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so haben die Graphen von f und g ...

(a) genau einen Schnittpunkt.

$\surd$ (b) maximal einen Schnittpunkt.

(c) nie einen Schnittpunkt.

(d) mindestens einen Schnittpunkt.

Betrachte die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$. Die beiden Graphen schneiden sich genau dann, wenn $h(x) = 0$. Nach Voraussetzung gilt $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$, also ist h streng monoton wachsend. Daher kann h höchstens eine Nullstelle und somit die beiden Graphen höchstens einen Schnittpunkt besitzen. Sie können jedoch auch disjunkt sein. Genau einen Schnittpunkt haben die Graphen von $f(x) = x$ und $g(x) = 3$. Dagegen haben die Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = 0$ keinen Schnittpunkt.

Siehe nächstes Blatt!

12. Es sei $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$, wobei $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f'(x) = -g(x)$ und $g'(x) = f(x)$ sind. Dann gilt $h'(x) = \ldots$

(a) 0

√ (b) $-4f(x)g(x)$

(c) $(-g(x))^2 - (-f(x))^2$

(d) $2\,(-g(x) + f(x))$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f^2(x) - g^2(x))' = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) \\ &= 2f(x)(-g(x)) - 2g(x)f(x) = -4f(x)g(x) \end{aligned}$$

13.

$$\lim_{h\to 0} \frac{4\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} = \ldots$$

(a) 0

(b) 1

√ (c) 2

(d) Dieser Grenzwert existiert nicht.

Dies ist der Differenzialquotient von $f(x) = 4x^4$ im Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$ und folglich gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{4\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} = f'(\tfrac{1}{2}) = 16\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 2.$$

Alternative:
Mit Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{4\left(\dfrac{1}{2}+h\right)^4 - 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}^{\to 0}}{\underbrace{h}_{\to 0}} = \lim_{h\to 0} \frac{16\left(\frac{1}{2}+h\right)^3}{1} = 2.$$

Siehe nächstes Blatt!

14. Die Iterationsvorschrift um mit dem Newtonverfahren die Wurzel aus einer Zahl $\alpha > 0$ als Lösung der Gleichung $x^2 - \alpha = 0$ zu approximieren, ist gegeben durch $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

√ (a) wahr

(b) falsch

Die Iterationsvorschrift lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

Bitte wenden!

15. An wie vielen Stellen schneidet die Kurve $r(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin t \end{pmatrix}$ die y-Achse?

(a) an zwei Stellen

(b) an drei Stellen

$\surd$ (c) an vier Stellen

(d) unendlich oft

Die Kurve schneidet die y-Achse genau dann wenn $x(t) = \cos 3t = 0$, also für $t = \frac{(\frac{1}{2}+k)\pi}{3}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für diese Werte gilt

$$y(t) = \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{6}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, & k \in 6\mathbb{Z} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, & k \in 6\mathbb{Z}+1 \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, & k \in 6\mathbb{Z}+2 \\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, & k \in 6\mathbb{Z}+3 \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, & k \in 6\mathbb{Z}+4 \\ \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, & k \in 6\mathbb{Z}+5 \end{cases}$$

Die vier Schnittpunkte lauten also $(0,-1), (0,-\frac{1}{2}), (0,\frac{1}{2}), (0,1)$.

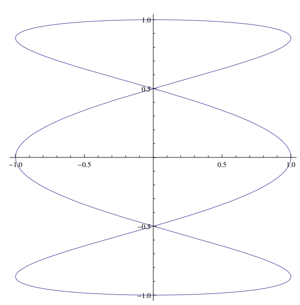


Abbildung 1: Aufgabe 15

Bemerkung: Wenn wir die Kurve als Bewegung eines Punktes in Abhängigkeit von der Zeit betrachten, so schneidet die Bahn die y-Achse unendlich oft, aber nur an vier verschiedenen Stellen. Da folglich die vierte Antwort ungünstig formuliert ist, wurde diese auch als richtig gewertet.

Siehe nächstes Blatt!

16. Die parametrisierte Kurve definiert durch $r(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \end{pmatrix}$ für $t > 0$ ist identisch zum Graphen der Funktion

(a) $y = \ln x$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $y = \ln x$ für $x > 0$

$\surd$ (c) $y = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$

(d) $y = e^x$ für $x > 0$

Punkte auf der Kurve erfüllen $x = \ln y$, bzw. $y = e^x$. Da $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ surjektiv ist, liegen alle Punkte (x, e^x) mit $x \in \mathbb{R}$ auf der Kurve.

Bitte wenden!

17. Bestimme das Konvergenzintervall für die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^k .$$

(a) $x = -\frac{1}{4}$

(b) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

√ (c) $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

(d) $\mathbb{R}$

Der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k$ lautet

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{k} = 1.$$

Für $y = 1$ haben wir die harmonische Reihe und für $y = -1$ die alternierende harmonische Reihe. Folglich konvergiert die Reihe genau dann wenn $2x + \frac{1}{2} \in [-1, 1)$, also $x \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

18. Wie lautet das Taylorpolynom zweiten Grades von $\sqrt{1+2x}$ um den Punkt $x_0 = 0$?

(a) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

(b) $2 + x + \frac{x^2}{4}$

√ (c) $1 + x - \frac{x^2}{2}$

(d) $1 + x + x^2$

Gesucht ist das Taylorpolynom 2. Ordnung. Wir haben

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+2x)^{\frac{1}{2}}, \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (1+2x)^{\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -(1+2x)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

und daher

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}.$$

19. Gesucht ist eine Funktion f für welche $f'(x) = \sin(x^2)$ gilt. Bestimme den Koeffizienten a_3 von x^3 in der Taylorreihe von $f(x)$ um $x_0 = 0$.

(a) $a_3 = \frac{1}{3!}$

(b) $a_3 = \frac{1}{2}$

(c) $a_3 = 0$

√ (d) $a_3 = \frac{1}{3}$

Die Reihenentwicklung von $\sin x$ lautet

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und folglich

$$f'(x) = \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Somit gilt

$$f(x) = c + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \dots$$

20. Die Funktion

$$x \mapsto \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t$$

ist monoton wachsend für $x > 0$.

(a) wahr

$\surd$ (b) falsch

Es gilt $\int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = \sin(x)$. Der Sinus ist bekanntlich nicht monoton:

$$\sin(\pi) = 0 > \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 < sin(2\pi) = 0.$$

21.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dots$$

√ (a) $\frac{4-\pi}{4}$

(b) $\ln 2$

(c) $\frac{\ln 2}{2}$

(d) $\frac{4+\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 1 - \arctan(1) = 1 - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{4-\pi}{4}$$

Siehe nächstes Blatt!

22. Sei n eine nicht-negative ganze Zahl. Folgende Gleichung

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x$$

gilt ...

(a) nur für $n = 0$.

(b) nur für alle geraden n.

(c) nur für alle ungeraden n.

√ (d) für alle n.

Wir substituieren $x = 1 - y$ und erhalten mit $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$

$$\int_0^1 x^n \, dx = -\int_1^0 (1-y)^n \,\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)^n \,\mathrm{d}y.$$

Bitte wenden!

23.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

(b) $\frac{\pi}{6}$

(c) $\frac{\pi}{3}$

$\surd$ (d) $2 - \sqrt{3}$

Wir rechnen

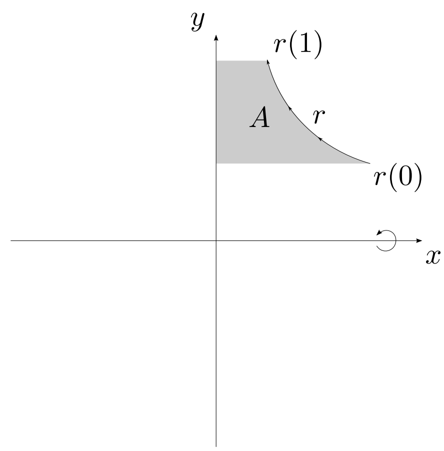
$$(\sqrt{1-x^2})' = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Folglich gilt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Siehe nächstes Blatt!

24. Gegeben sei eine Kurve $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, r(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$. Betrachte die Fläche A, die von der Kurve r, der y-Achse und den beiden horizontalen Geraden durch $r(0)$ und $r(1)$ begrenzt wird. Wir rotieren nun diese Fläche um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers?



√ (a) $2\pi \int_0^1 x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$

(b) $2\pi \int_0^1 x(t)y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

(c) $2\pi \int_0^1 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

(d) $2\pi \int_0^1 y^2(t)x(t)\,\mathrm{d}t$

Ein schmaler Streifen auf der Höhe $y(t)$ hat die Fläche $x(t)\,\mathrm{d}y(t) = x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$. Rotieren wir diesen Streifen um die x-Achse, so erhalten wir einen Hohlzylinder mit Volumen $2\pi y(t)x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$. Für das Volumen des gesamten Rotationskörpers gilt nun

$$V = 2\pi \int_0^1 x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bitte wenden!

25. Wir betrachten einen Vollzylinder mit Radius r und einen Hohlzylinder mit Radius ϱ (die Wanddicke sei vernachlässigbar). Sie sind beide gleich hoch, haben dieselbe Masse und dasselbe Trägheitsmoment bezüglich ihrer Rotationssymmetrieachsen. Wie ist das Verhältnis zwischen den beiden Radien?

(a) $\varrho = \frac{1}{2}r$

$\checkmark$ (b) $\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}r$

(c) $\varrho = \sqrt{2}r$

(d) $\varrho = 2r$

In einem Vollzylinder haben die Punkte im Abstand x von der Rotationsachse das Trägheitsmoment $\mathrm{d}\Theta(x) = x^2\delta 2\pi x h\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta h x^3\,\mathrm{d}x$, wobei δ für die Dichte und h für die Höhe steht. Somit gilt für das gesamte Trägheitsmoment

$$\Theta_1 = 2\pi\delta h \int_0^r x^3\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta h \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2}mr^2,$$

wobei $m = \varrho V = \delta h \pi r^2$.

Da sich im Hohlzylinder die gesamte Masse im Abstand ϱ von der Achse befindet, haben wir

$$\Theta_2 = m\varrho^2$$

Die beiden Trägheitsmomente sind genau dann gleich, falls $\frac{1}{2}mr^2 = m\varrho^2$, also $\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}r$.