ETH Zürich

Zwischenprüfung Winter 2016 – Analysis I D-BAUG

Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine, ausser das verteilte Blatt mit Standardintegralen.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig.
- Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antwort erhalten Sie einen Abzug von $\frac{1}{3}$ Punkten (bei vier Antwortmöglichkeiten), beziehungsweise 1 Punkt (bei wahr/falsch-Fragen). Wird eine Frage nicht beantwortet, erhalten Sie dafür weder Plus- noch Minuspunkte.
- Achten Sie darauf, dass Sie das Antwortblatt sauber ausfüllen. Im Zweifelsfall gilt eine Antwort als falsch.
- Schreiben Sie Name, Vorname, Legi-Nummer und den oben vermerkten Prüfungstyp in Grossbuchstaben auf ihr Antwortblatt.
- Tragen Sie am Ende der Prüfung die Anzahl der von Ihnen gemachten Kreuzchen als Prüfsumme unten auf dem Antwortblatt ein.

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

Bitte wenden!

1. Seien x und y zwei irrationale Zahlen, so ist auch $x + y$ irrational.

(a) wahr

$\surd$ (b) falsch

Zum Beispiel gilt $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.

2.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z \cdot \bar{z}) = 0.$$

$\surd$ (a) wahr

(b) falsch

Es gilt $\arg(z \cdot \bar{z}) = \arg(z) + \arg(\bar{z}) = \arg(z) - \arg(z) = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Die Aussage „$z \in \mathbb{C}$ ist reell oder rein imaginär“ ist äquivalent zu $(\bar{z})^2 = z^2$.

√ (a) wahr

(b) falsch

Es gilt

$$(\bar{z})^2 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = z \text{ oder } \bar{z} = -z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \text{ oder } z \in i\mathbb{R}.$$

4. Gegeben sind zwei komplexe Zahlen, deren Summe 6 und deren Produkt 10 ist. So ist eine dieser Zahlen gleich

(a) $-6 + i$

(b) $-3 - i$

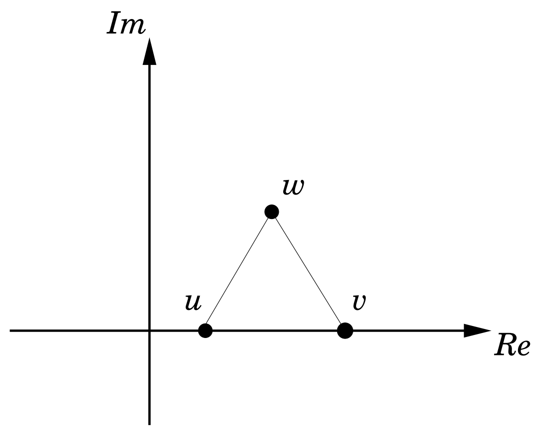
(c) $-3 + i$

√ (d) $3 + i$

Aus $z + w = 6$ und $zw = 10$ folgt $z + \frac{10}{z} = 6$, beziehungsweise $z^2 - 6z + 10 = 0$. Somit gilt $z = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = 3 \pm i$ und $w = 3 \mp i$.

Bitte wenden!

5. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit Ecken u, v und w in der komplexen Ebene, so dass $u, v \in \mathbb{R}$ und $u \neq v$.



(a) u, v und w sind die Lösungen der Gleichung $z^3 = c$ für irgendein $c \in \mathbb{C}$

(b) u, v und w sind die Nullstellen eines Polynom dritten Grades mit reellen Koeffizienten

√ (c) u, v und w sind die Nullstellen eines komplexen Polynom vierten Grades

(d) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

Nicht-reelle Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten treten immer in Paaren auf. Daher hat ein solches Polynom dritten Grades entweder eine oder drei reelle Nullstellen.

Die Argumente der Lösungen von $z^3 = c$ unterscheiden sich um jeweils $\frac{2\pi}{3}$. Daher hat diese Gleichung höchstens eine reelle Lösung.

Die drei Zahlen u, v, w sind zum Beispiel die Nullstellen des folgenden Polynoms vierten Grades:

$$p(z) = (z - u)(z - v)(z - w)^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Bestimme den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-\frac{n}{3}}$$

(a) 0

√ (b) $e^{-\frac{2}{3}}$

(c) 1

(d) $e^{\frac{2}{3}}$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{2}{n}\right)^{n}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(e^{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}.$$

Bitte wenden!

7. Für welchen Parameter $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-a)^n} = 3 \text{ ?}$$

(a) $a = -3$

$\surd$ (b) $a = -\frac{5}{3}$

(c) $a = \frac{2}{3}$

(d) Es gibt keinen solchen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Für $|a| > 1$ erhalten wir eine geometrische Reihe und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-a)^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{a}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{a}} - 1\right) = -\frac{2}{a+1}$$

und folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-a)^n} = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad a+1 = -\frac{2}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = -\frac{5}{3}.$$

Siehe nächstes Blatt!

8. Seien $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$ und $g(x) = 2x$, so ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

gegeben durch

√ (a) $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$,

(b) $\left\{2\right\}$,

(c) $\left\{\dfrac{1}{3}, 2\right\}$,

(d) $\mathbb{R}$.

Es gilt $f(g(x)) = \dfrac{4}{2x-1}$ und $g(f(x)) = \dfrac{8}{x-1}$. Somit folgt

$$\begin{aligned} f(g(x)) = g(f(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{2x-1} = \frac{8}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad 4x-4 = 16x-8 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

9. Es sei

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{2x - 1}.$$

Bestimme $f(-1)$, $f(0)$ und $f(1)$.

Was lässt sich dann mit dem Zwischenwertsatz folgern?

√ (a) $\exists x \in [-1, 0]$ mit $f(x) = 0$,

(b) $\exists x \in [0, 1]$ mit $f(x) = 0$,

(c) $\exists x_1 \neq x_2 \in [-1, 1]$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

(d) Keine der obigen Aussagen.

f ist stetig auf $[-1, 0]$ und $f(0) = -1 < 0 < f(-1) = \frac{2}{3}$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x \in [-1, 0]$ mit $f(x) = 0$.

Jedoch ist $f(x)$ für $x = \frac{1}{2}$ nicht definiert und daher ist f nicht stetig auf $[0, 1]$ und folglich der Zwischenwertsatz dort nicht anwendbar, obwohl $f(0) = -1 < 0 < f(1) = 6$.

Siehe nächstes Blatt!

10. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}{x-2}, & \text{falls } x \neq 2, \\ k, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Wie muss man k wählen, damit f stetig ist?

(a) $k = 0$

$\surd$ (b) $k = \frac{1}{6}$

(c) $k = \frac{1}{3}$

(d) $k = 1$

Mit Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}^{\to 0}}{\underbrace{x-2}_{\to 0}} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2x+5}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+7}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Bitte wenden!

11. Sei $f(x) = 7^x$ so gilt

(a) $f'(x) = x \cdot 7^{x-1}$

(b) $f'(x) = \log_7 x$

$\surd$ (c) $f'(x) = \ln 7 \cdot 7^x$

(d) $f'(x) = 7^x$

$$f'(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 7^x = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\ln(7^x)} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x \ln(7)} = \ln(7) \cdot e^{x \ln(7)} = \ln 7 \cdot 7^x.$$

Siehe nächstes Blatt!

12. Was sind die Koordinaten des Wendepunkts der Funktion

$$f(x) = (x+1)\arctan x?$$

(a) $(0,0)$

(b) $(0,1)$

(c) $(1, \frac{\pi}{4})$

$\surd$ (d) $(1, \frac{\pi}{2})$

Wir haben

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\arctan x, \\
f'(x) &= \arctan x + \frac{x+1}{x^2+1}, \\
f''(x) &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{x^2+1+x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x)}{(x^2+1)^2}, \\
f'''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 - 2(1-x)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{-2x^3+8x^2-10x}{(x^2+1)^3}
\end{aligned}$$

und folglich $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Weiter gilt $f'''(1) = -\frac{1}{2} \neq 0$ und $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$. Wir haben also einen Wendepunkt mit den Koordinaten

$$(1, f(1)) = \left(1, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Bitte wenden!

13. Der Mittelwertsatz besagt, dass für jede auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f, die auf (a, b) differentierbar ist, ein Wert $c \in (a, b)$ existiert, so dass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Für die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist c das geometrische Mittel von a und b, wobei $a, b > 0$.

Hinweis: Das geometrische Mittel von n positiven reellen Zahlen ist gegeben durch

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

√ (a) wahr

(b) falsch

Aus der Gleichung $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ folgt

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} \qquad \Leftrightarrow \qquad c^2 = \frac{a - b}{\frac{a-b}{ab}} = ab \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \sqrt{ab}.$$

Siehe nächstes Blatt!

14. Gesucht ist eine Approximation der Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 4$. Verwende das Newton Verfahren mit Startwert $x_0 = 1$. Es gilt $x_2 = \frac{5}{3}$.

√ (a) wahr

(b) falsch

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4, \\ f'(x) &= 3x^2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Iterationsvorschrift

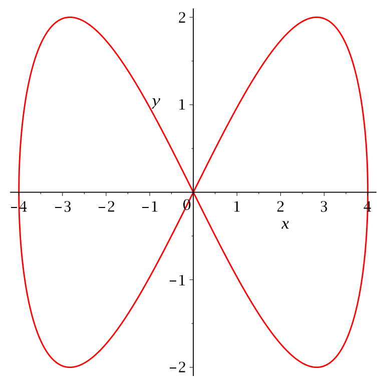
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 4}{3x_n}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_1 &= 1 - \frac{1-4}{3} = 2, \\ x_2 &= 2 - \frac{8-4}{12} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

15. Welche Abbildung parametrisiert die folgendene Kurve?



(a) $r(t) = (4\cos(2t), 2\sin(2t))$

(b) $r(t) = (-4\cos(2t), 2\sin(2t))$

√ (c) $r(t) = (4\cos(t), 2\sin(2t))$

(d) $r(t) = (4\cos(t), 2\sin(t))$

Alle anderen Parametrisierungen sind Ellipsen.

Siehe nächstes Blatt!

16. Für welches $n \in \mathbb{Z}$ liegt der Mittelpunkt des Krümmungskreises an den Punkt $(1,1)$ der Kurve $y = x^n$ auf der Gerade $y = 2$?

(a) $n = -2$ und $n = -1$

(b) $n = -2$

√ (c) $n = -1$

(d) $n = 2$

Der Normalenvektor im Punkt $(1,1)$ ist

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \begin{pmatrix} -n \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Krümmung ist gegeben durch

$$k = \frac{f''(1)}{(1+f'(1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{n(n-1)}{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Somit befindet sich der Mittelpunkt des Krümmungskreises in

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1+n^2}{n(n-1)} \cdot \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser liegt genau dann auf der Geraden $y = 2$, falls

$$1 + \frac{1+n^2}{n(n-1)} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + n^2 = n^2 - n \qquad \Leftrightarrow \qquad n = -1.$$

Bitte wenden!

17. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(-3)^n}(x-5)^n$ konvergiert

(a) für alle $x \in [-8,-2)$.

(b) für alle $x \in (-8,-2]$.

√ (c) für alle $x \in (2,8)$.

(d) für alle $x \in (2,8]$.

Der Konvergenzradius beträgt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \frac{|-3|^{n+1}}{|-3|^n} = \lim_{n\to\infty} 3\frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 3.$$

Somit konvergiert die Reihe auf dem Intervall $(2,8)$ und divergiert ausserhalb von $[2,8]$.

Für $x = 2, 8$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1), \text{ bzw. } \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)(-1)^n.$$

Da (n^2+1), $(n^2+1)(-1)^n$ keine Nullfolgen sind, divergieren diese Reihen.

Siehe nächstes Blatt!

18. Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-x)^{k+1}$$

in einer Umgebung von $x_0 = 0$ dar?

√ (a) $\dfrac{x^2}{1+x}$

(b) $\dfrac{x^2}{1-x}$

(c) $-\dfrac{x^2}{1+x}$

(d) $-\dfrac{x}{1-x}$

Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-x)^{k+1} = (-x)^2\sum_{l=0}^{\infty}(-x)^l = \frac{x^2}{1+x}.$$

Bitte wenden!

19. Welches Polyom approximiert die Funktion $\cos 2x$ am besten in der Nähe von $x = 0$?

√ (a) $1 - 2x^2$

(b) $1 - \frac{x^2}{2}$

(c) $1 - 2x + x^2$

(d) $1 + \frac{x}{2}$

Wir haben $f(x) = \cos 2x$, $f'(x) = -2 \sin 2x$, $f''(x) = -4 \cos 2x$ und folglich

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = 1 - 2x^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

20. Man kann $e^{-0.1}$ mit Hilfe der Taylorreihe berechnen. Dies ist — bis auf drei Dezimalstellen — gleich

(a) 0.900

$\surd$ (b) 0.905

(c) 0.949

(d) 0.950

Es gilt

$$e^{-0.1} \approx 1 + (-0.1) + \frac{(-0.1)^2}{2!} = 1 - 0.1 + 0.005 = 0.905$$

Dies stimmt bis auf drei Dezimalstellen, da die weiteren Glieder alternierend und monoton fallen sind, und

$$\left|\frac{(-0.1)^3}{3!}\right| \leq \frac{(0.1)^3}{5} = 0.0002.$$

21. Sei $A = \int_0^2 \cos x \, dx$ und $B = \int_0^{-2} \cos x \, dx$, so gilt

(a) $A - B = 0$

(b) $A \cdot B = 0$

√ (c) $A + B = 0$

(d) $\frac{A}{B} = 0$

Da $\cos(-x) = \cos(x)$ erhalten wir mit der Substitution $x = -y$

$$B = \int_0^{-2} \cos x \, dx = \int_0^2 \cos(-y) \, (-dy) = -\int_0^2 \cos y \, dy = -A.$$

Siehe nächstes Blatt!

22.

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x|}{x} \, \mathrm{d}x =$$

√ (a) -1

(b) 1

(c) 2

(d) 3

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x|}{x} \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \frac{|x|}{x} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{|x|}{x} \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (-1) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1 \, \mathrm{d}x = -2 + 1 = -1.$$

23. Die folgende Substitution $\sqrt{x} = \sin u$ überführt das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

in

√ (a) $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u\,\mathrm{d}u$

(b) $2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 u}{\cos u}\,\mathrm{d}u$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 u\,\mathrm{d}u$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u\,\mathrm{d}u$

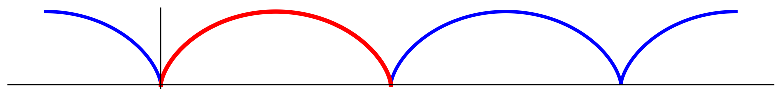
Es gilt $x = \sin^2 u$ und $\mathrm{d}x = 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u$ und folglich

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} 2\sin u\cos u\,du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u\,\mathrm{d}u.$$

Siehe nächstes Blatt!

24. Betrachten Sie die Zykloide welche gegeben ist durch

$$r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$



Die Länge eines Bogens ist dann …

√ (a) $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t$

(b) $2\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t$

(c) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t$

Der markierte Bogen wird durch $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert. Es gilt

$$\dot{r}(t) = (1 - \cos t, \sin t),\ |\dot{r}| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}$$

und somit

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Bitte wenden!

25. Der Schwerpunkt des Gebiets, welches durch $f(x) = 1-x^2$ und die x-Achse begrenzt wird, ist

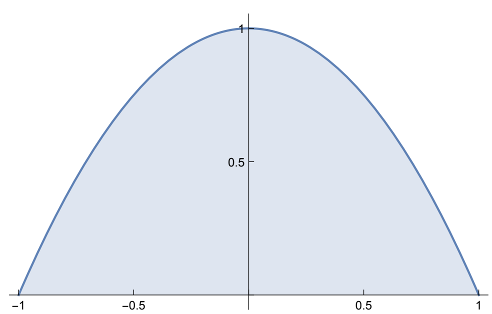
(a) $S = (\frac{1}{3}, 0)$.

(b) $S = (0, \frac{1}{3})$.

(c) $S = (\frac{2}{5}, 0)$.

√ (d) $S = (0, \frac{2}{5})$.

Das Gebiet sieht folgendermassen aus:



Aus der Symmetrie folgt $x_S = 0$. Für y_S gilt

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)^2 \,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 - 2x^2 + x^4 \,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}}{\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right)}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.$$