Prüfung
Analysis I/II D-BAUG
Sommer 2017

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Menge

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |2z + 2 + 5i| \geq |2z - 2 - 7i|\}.$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = \sqrt{5}z^3 - 5z^2 + \sqrt{5}z - 5.$$

c) (2 Punkte) Verwenden Sie Ihre Zeichnung der Menge B aus Aufgabenteil **a)**, um anzugeben welche der in Aufgabenteil **b)** bestimmten Nullstellen in der Menge B enthalten sind.

2. (10 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) (3 Punkte)

$$\int_0^e x\left(2\ln(e+x) + \frac{x}{e+x}\right) \mathrm{d}x$$

b) (4 Punkte)

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 - 10x - 5}{x^4 + 2x^3 + x^2} \mathrm{d}x$$

c) (3 Punkte)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cos(x) - x^2 \sin(x)}{\ln(1 + x^5)}$$

3. (10 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : [1,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)$$

.

a) **(5 Punkte)** Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, welcher dadurch entsteht, dass der Graph von f um die x-Achse rotiert.

b) **(5 Punkte)** Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationskörpers aus Aufgabenteil **a)**. Sie müssen **nicht** den Flächeninhalt der beiden kreisförmigen Seitenflächen berechnen.

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

a) Wir betrachten $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ für $a > 0$. Dann gilt

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}A = \ldots$$

(I) ☐ $2\pi e^{-a^2}$

(II) ☐ $\pi\left(1 - e^{-a^2}\right)$

(III) ☐ $\pi\left(e^{-a^2} - 1\right)$

(IV) ☐ $2\pi\left(1 - e^{-a^2}\right)$

b) Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = \cos(x-y)$ in einer Umgebung des Punktes $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. In welche Richtung nimmt die Funktion f ausgehend vom Punkt P am meisten zu?

(I) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$

(II) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,-1)$

(III) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)$

(IV) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)$

c) Sei K die im Gegenuhrzeigersinn orientierte Ellipse $x^2 + xy + y^2 = 1$ in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt für das Linienintegral

$$\oint_K \begin{pmatrix} \sin y \\ x \cos y \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \ldots$$

(I) ☐ 2

(II) ☐ 0

(III) ☐ -2

(IV) ☐ 2π

d) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y'' + 3y = \sin(ax)$$

mit dem reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist jede Lösung der Differentialgleichung beschränkt.

(I) ☐ wahr

(II) ☐ falsch

e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Krümmung des Graphen von f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ stimmt genau dann mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ überein, wenn f an der Stelle x einen kritischen Punkt hat (d.h. $f'(x) = 0$).

(I) ☐ wahr

(II) ☐ falsch

5. **(12 Punkte)** In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} & \text{für } x \neq 1 \\ c & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

stetig?

$c = \boxed{}$

b) Es sei $\vec{F}$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $G(a, b)$ den Fluss nach aussen von $\vec{F}$ durch die geschlossene Fläche

$$S_{a,b} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 + b^2 + 2\}.$$

Wir erhalten also eine Funktion $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a, b) \mapsto G(a, b)$. Berechnen Sie $\frac{\partial G}{\partial a}(3, 1)$.

$\frac{\partial G}{\partial a}(3, 1) = \boxed{}$

c) In welchem Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ der Fläche $z = \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 - 2x + 3y + 1$ ist die Tangentialebene parallel zur Ebene $z = -4x + 7y$?

$P_0 = \boxed{}$

d) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an:

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^2 f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6. (10 Punkte) Finden Sie die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = xy + z^2$ auf dem Schnittkreis der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mit der Ebene $y - x = 0$.

7. (10 Punkte) Zu einem Parameter $0 \le a \le 3$ betrachten wir das Gebiet

$$G(a) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9, y \ge 0, x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 \ge \frac{a^2}{4}\right\}$$

in $\mathbb{R}^2$ mit konstanter Dichte $\rho = 1$.

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Gebietes $G(a)$ in Abhängigkeit von dem Parameter a.

8. (10 Punkte) Wir betrachten die Fläche

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4, x \ge 2\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{xy} \cos z \\ x^2 z \\ xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\iint_H \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

wobei H so orientiert sein soll, dass der Normalenvektor immer eine nicht-negative x-Komponente hat.

9. (10 Punkte)

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Form einer Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'''(x) - y''(x) + 7y'(x) - 7y(x) = e^{-x}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie nun die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung aus Aufgabenteil **a)**, sodass $y(x)$ auf $[0, +\infty)$ beschränkt ist und die Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} y(0) = 2 - \frac{1}{16} \\ y'(0) = \frac{1}{16} - \sqrt{7}. \end{cases}$$

erfüllt.