Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Dr. Menashe-hai Akka Ginosar 8. August 2018

Analysis I & II
Prüfung

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

- Prüfungsdauer: **240 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: 8 A4-Seiten selber verfasst. Eine Formelsammlung gemäss der in der Vorlesung verteilten Liste. Es sind keine Taschenrechner erlaubt.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Leginummer. Lassen Sie an den Rändern ca. 2 cm für die Korrektur frei.
- Begründen Sie Ihre Lösungen (Ausnahmen: Aufgabe 4 und Aufgabe 5). Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen. Wenn Sie ein Resultat aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welches Sie sich beziehen!
- Aufgabe 4 ist eine Multiple-Choice-Aufgabe. Zu jeder Frage gibt es **nur eine richtige Antwort**. Weitere Details: siehe Aufgabe.
- In Aufgabe 5 wird **nur das Endergebnis** bewertet. Der Lösungsweg wird nicht berücksichtigt. Weitere Details: siehe Aufgabe.
- **Keine rote oder grüne Farbe, kein Tipp-Ex.**
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.

Tabelle keinesfalls ausfüllen!

A	Pkt.	Kont.
1	[10]	
2	[10]	
3	[10]	
4	[10]	
5	[12]	
6	[10]	
7	[10]	
8	[10]	
9	[10]	
Tot.	[92]	
Vollst.		
Note		

Aufgabe 1. (10 Punkte)

(a) [**4 Punkte**] Skizzieren Sie die Menge

$$\{(1 + \cos t) + (1 + \sin t)\, i \mid t \in \mathbb{R}\}\,. \tag{1}$$

(b) [**4 Punkte**] Lösen Sie die Gleichung

$$z^6 + 10z^3 + 16 = 0. \tag{2}$$

Die Lösungen können in Polar- oder kartesischen Koordinaten angegeben werden.

(c) [**2 Punkte**] Entscheiden Sie für jede der Lösungen der Gleichung (2), ob sie im Inneren der Menge (1) liegt.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Berechnen Sie

(a) [**3 Punkte**] das unbestimmte Integral $\int \frac{-x^2 - x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}\, dx$

(b) [**4 Punkte**] das uneigentliche Integral $\int_0^1 (\ln(x))^2\, dx$

(c) [**3 Punkte**] den Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \tan(x)}$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Die Kurve K sei in Polarkoordinaten durch

$$R(\phi) = e^{\phi}, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

gegeben.

(a) [**2 Punkte**] Stellen Sie K in kartesischen Koordinaten dar, d.h. schreiben Sie K in der Form $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

(b) [**4 Punkte**] Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ an der Stelle $\vec{r}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Tipp: Die Krümmung einer Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

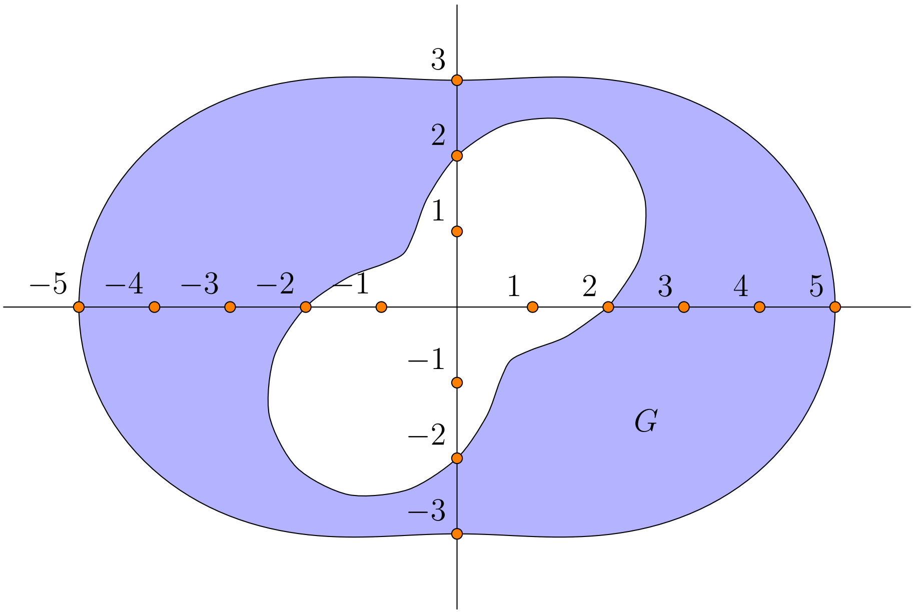
$$\kappa(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t).}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) [**4 Punkte**] Geben Sie eine Parametrisierung des Schmiegekreises an K bei $\phi = \pi$ an.

Aufgabe 4. Multiple-Choice-Aufgaben (10 Punkte)

Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt **2 Punkte**. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt **0 Punkte**.

1. Gegeben sei das folgende Gebiet G in $\mathbb{R}^2$.



Dann gilt für jede stetige Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$

☐ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\sin(2\phi)}^{4+\cos(2\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,dr\,d\phi$

☐ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\cos(2\phi)}^{4+\sin(2\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r\,dr\,d\phi$

☐ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\sin(\phi)}^{4+\cos(\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,dr\,d\phi$

☐ $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{2+\sin(2\phi)}^{4+\cos(2\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r\,dr\,d\phi$

2. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $K = \partial S$ ihr Rand mit der induzierten Orientierung. Dann gilt:

$$\int_K \begin{pmatrix} z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \ldots$$

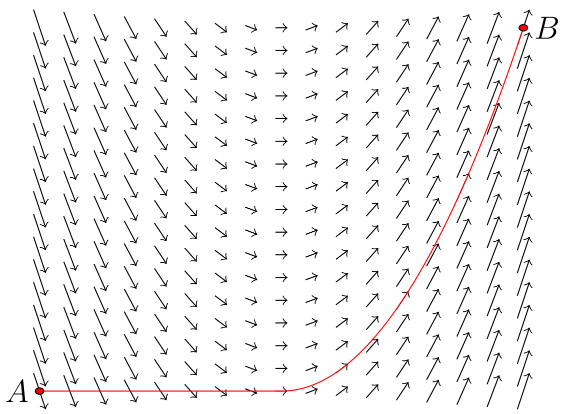
☐ $2 \iint_S \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

☐ $2 \iint_S \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

☐ $2 \iint_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

☐ $2 \iint_S \begin{pmatrix} -x \\ -z \\ -y \end{pmatrix} \overrightarrow{dS}$

3. Welche Aussage über die Arbeit W des glatten Vektorfeldes entlang des eingezeichneten Weges von A nach B trifft zu?



☐ W ist positiv.

☐ W ist negativ.

☐ W ist null.

☐ Es kann keine Aussage über das Vorzeichen von W getroffen werden.

4. Der Laplaceoperator Δ ist definiert durch $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, der Gradientenoperator ∇ ist durch $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ gegeben und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\Delta(fg) = ...$

   ☐ $g\Delta f + f\Delta g$

   ☐ $f\nabla g + g\nabla f$

   ☐ $g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f\Delta g$

   ☐ $g\Delta f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f\Delta g$

5. Für welche der folgenden Funktionen ist es **unmöglich**, Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ zu wählen, sodass die Funktion selbst sowie e^{2x} Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

   sind?

   ☐ e^{-x}

   ☐ xe^{2x}

   ☐ $\sin(x)$

   ☐ $\sinh(2x)$

Aufgabe 5. (12 Punkte)

In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt **3 Punkte**. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt **0 Punkte**.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

1. $$\int_0^2 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\, r\, dr\, d\phi$$

2. Berechnen Sie die Arbeit W des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ entlang der Kurve
$$\vec{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in [0,1].$$
$$W = \boxed{}$$

3. Es gilt $(2-3i)^9 = -86158 - 56403i$.
$$\mathrm{Re}\left(-i(2+3i)^9\right) = \boxed{}$$

4. Die Differentialgleichung
$$\ddot{x}(t) = g - \varrho \dot{x}(t)^2$$
kann zur Modellierung eines freien Falls mit Reibung genutzt werden. $x(t)$ gibt dabei die Entfernung zu einem Referenzpunkt zur Zeit t an, g ist die Erdbeschleunigung, ϱ ein Maß für den Luftwiderstand. Wie groß ist die *Endgeschwindigkeit* $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$, wenn $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$?

   Tipp: Wenn die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ *praktisch konstant* ist für große t, wie verhält sich dann $\ddot{x}(t)$ für $t \to \infty$?

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) =$$

Aufgabe 6. (10 Punkte)

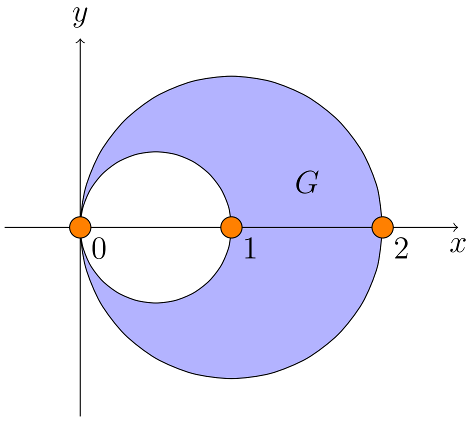
Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy,$$

wobei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4x^2 + y^2 \leq 80,\ y \leq 4 + x^2\}$ ist.

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Gebiets G, welches durch Entfernen des Kreises mit Radius $\frac{1}{2}$ um $(\frac{1}{2}, 0)$ aus dem Kreis mit Radius 1 um $(1, 0)$ entsteht, wenn die Dichtefunktion $\varrho(x, y) = x$ ist.



Tipp:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx = \frac{3\pi}{16}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\,dx = \frac{5\pi}{32}$$

Aufgabe 8. (10 Punkte)

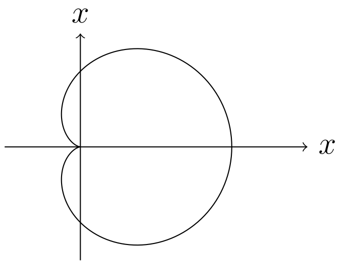
Sei

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y^3 + \cosh(2x) \\ x^3 + e^{\sin(2y)} \end{pmatrix}$$

ein 2-dimensionales Vektorfeld und K die Kardioide, die in Polarkoordinaten durch

$$R(\phi) = 1 + \cos(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

gegeben ist, siehe Bild. Berechnen Sie die Zirkulation von F entlang K.



Tipp:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\, dx = \frac{3}{4}\pi.$$

Aufgabe 9. (10 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 6y''(x) + 11y'(x) + 6y(x) = 12x + 1 + e^{-x}. \qquad (***)$$

(a) [**7 Punkte**] Finden Sie die allgemeine Lösung von (***).

(b) [**3 Punkte**] Finden Sie ein Polynom $f(x)$, sodass für jede Lösung $y(x)$ von (***) gilt, dass

$$\lim_{x \to \infty} |y(x) - f(x)| = 0.$$