Name: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Legi: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

August 2019

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Kurve

$$\gamma(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t)\, i, \quad t \in [0, 2\pi],$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - 3z^2 + 9z + 13.$$

c) (2 Punkte) Die Kurve γ aus Aufgabenteil **a)** teilt die komplexe Ebene in eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ und eine unbeschränkte Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Welche der in Aufgabenteil **b)** bestimmten Nullstellen liegen im beschränkten Teil B?

2. (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) (3 Punkte)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)}$$

b) (3 Punkte)

$$\int_0^\infty \frac{1}{x + x\ln(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

c) (4 Punkte)

$$\int \frac{10x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\, \mathrm{d}x$$

3. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Berechnen Sie mittels der geometrischen Reihe eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 4x^2}.$$

Was ist der Konvergenzbereich?

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe des Aufgabenteils **a)** eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$g(x) = \arctan(2x).$$

Was ist der Konvergenzbereich?

c) (2 Punkte) Leiten Sie mit Hilfe des Aufgabenteils **b)** eine Reihendarstellung für π her.

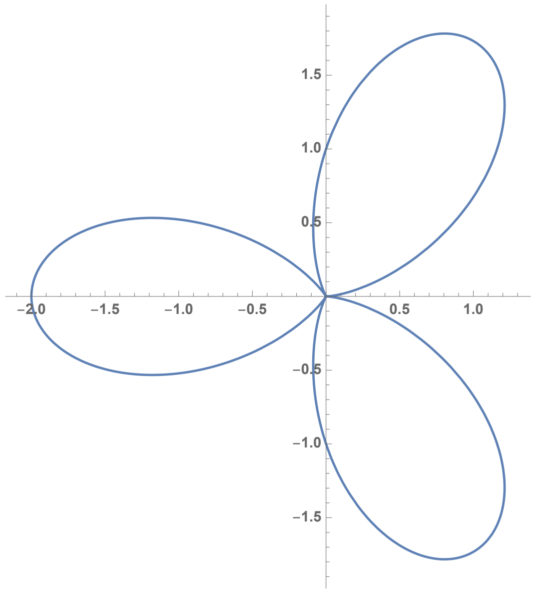
Hinweis: $\arctan(1) = ?$

Name: _________________ Legi: _________________

4. **Multiple-Choice (10 Punkte):** Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

   Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

   a) Welche Parametrisierung in Polarkoordinaten beschreibt die folgende Kurve?



(A)
$$R(\varphi) = 1 + \sin(6\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(B)
$$R(\varphi) = 1 + \sin(6\varphi - \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(C)
$$R(\varphi) = 1 + \sin(3\varphi - \tfrac{\pi}{2}), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(D)
$$R(\varphi) = 1 + \sin(3\varphi - \tfrac{3\pi}{2}), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

b) Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen mit $\kappa(t)$ die Krümmung der Kurve γ an der Stelle $\gamma(t)$ für $t \in [0,1]$.
Wie gross ist die Krümmung der Kurve

$$c(t) = 3\gamma(t) = (3x(t), 3y(t)), \quad t \in [0,1],$$

an der Stelle $c(t)$?

(A) $\frac{1}{3}\kappa(t)$

(B) $3\kappa(t)$

(C) $\frac{1}{9}\kappa(t)$

(D) $9\kappa(t)$

c) Es sei γ ein geschlossener Weg in der Ebene und $\vec{F}$ ein Vektorfeld. Die Arbeit von $\vec{F}$ entlang von γ sei 2. Welche Eigenschaft kann $\vec{F}$ besitzen?

(A) $\vec{F}$ ist quellenfrei.

(B) $\vec{F}$ ist wirbelfrei.

(C) $\vec{F}$ ist konservativ.

(D) $\vec{F}$ kann keine der obigen Eigenschaften haben.

d) Sei

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x + e^y z \\ 2y + \sinh(xz) \\ z + \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld und sei

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

der Würfel mit Seitenlänge 1. Was ist der Fluss von $\vec{F}$ nach aussen durch den Rand ∂K des Würfels K?

(A) 0

(B) 4

(C) 6

(D) 8

e) Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$, sodass $y(x) = e^{2x}$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist

$$y''(x) - 5y'(x) + ky(x) = 0.$$

(A) -14

(B) -6

(C) -4

(D) 6

Name: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Legi: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

5. **(12 Punkte)** In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Die reellen Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllen $(A - B\,i)^{807} = 4020 + 2060\,i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie

$$2e^{-\pi i}(A + B\,i)^{807}$$

in der Form $x + y\,i$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{}$

b) Sei $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 2z^2$ und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 17\}$. Finden Sie eine Parametrisierung der Geraden n, welche die Fläche S im Punkt $(1, 1, 3) \in S$ trifft und dort senkrecht auf der Tangentialebene von S steht. Geben Sie ihr Ergebnis in der Form

$$n(t) = (A, B, C) + t \cdot (D, E, F), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ an.

Bemerkung: Die Parametrisierung ist hier nicht eindeutig. Es werden Punkte auf jede korrekte Parametrisierung vergeben.

$$n(t) = \boxed{}$$

c) Sei $\vec{F}(x, y) = (2y + \pi, 3x - \pi^2)$ ein Vektorfeld und $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis.
Berechnen Sie die Arbeit von $\vec{F}$ längs K im Gegenuhrzeigersinn:

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{}$$

d) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an.

$$\int_0^1 \int_1^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

 Bitte wenden!

6. (10 Punkte) Finden Sie die globalen Extremstellen und -werte der Funktion $f(x, y, z) = (x + z)^2$ auf der Menge

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25\}.$$

7. (10 Punkte) Wir betrachten die Menge

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1, -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

a) (2 Punkte) Skizzieren Sie eine zweidimensionale Fläche, sodass D der Rotationskörper um die z-Achse dieser Fläche ist.

b) (4 Punkte) Berechnen Sie das Volumen von D.

c) (4 Punkte) Die Dichte von D sei konstant 1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment von D bezüglich der z-Achse.

8. (10 Punkte) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\cosh(x) \\ y\sinh(x) - y\sin(x)\sin(yz) \\ z\sin(x)\sin(yz) + ye^{xy} + 2z \end{pmatrix}$$

und die Fläche

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Die Fläche H sei so orientiert, dass der Normalenvektor stets eine nicht-negative x-Komponente hat.

Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch H.

9. (10 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''(x) - 7y''(x) + 24y'(x) - 18y(x) = 90\cos(3x).$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung, welche beschränkt auf $[0, +\infty)$ ist.