Initialen: _ _ _ _ _ _ _ _ Legi (6 letzte Ziffern): _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

August 2020

Dr. Meike Akveld

Die folgenden Stammfunktionen dürfen Sie bei Bedarf ohne Beweis verwenden:

$$\int \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{32}\left(12\varphi + 8\sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)\right) + C$$
$$\int \sin^4 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{32}\left(12\varphi - 8\sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)\right) + C.$$

1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = \frac{i}{8}$ in Normalform.

b) (4 Punkte) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-1| \cdot |z+1| \leq 1\}$$

in der komplexen Ebene.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

c) (2 Punkte) Welche der Lösungen aus a) liegen in $\mathcal{L}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Krümmungskreises (oder auch Schmiegekreises) der Kurve $x \cdot y = c^2$ im Punkt (c, c) und skizzieren Sie die Kurve und den Krümmungskreis in diesem Punkt.

Hinweis: Bestimmen Sie eine Parametrisierung für diese Kurve.

3. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Betrachten Sie die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} \left(x - \frac{2}{3}\right)^n$$

und bestimmen Sie das Konvergenzintervall.

b) (4 Punkte)

Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\, \mathrm{d}x$.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) + x^3}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}$.

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

a) (3 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das Integral

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos(x) \cdot e^x \, \mathrm{d}x$$

(A) immer positiv.

(B) immer negativ.

(C) gleich Null.

(D) abhängig vom Wert von n positiv oder negativ.

b) (2 Punkte) Sei (a_n) eine Nullfolge. Dann konvergiert die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(A) Wahr.

(B) Falsch.

c) (3 Punkte) Welcher der folgenden Werte ist die beste Approximation von $\cos(0.1)$?

(A) 1.000

(B) 0.996

(C) 0.995

(D) 0.990

d) (2 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Für jede beliebige Lösung $y(x)$ (d.h. unabhängig von den Anfangsbedingungen) gilt

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0.$$

(A) Wahr.

(B) Falsch.

5. (10 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{2x} & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+b}} & \text{für } 0 \leq x < 7 \\ \frac{1}{x-4} & \text{für } x \geq 7 \end{cases} .$$

überall stetig ist.

$a = \boxed{}$ $b = \boxed{}$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ im Punkt $(3, 4)$ in Richtung $v = (4, -3)^T$.

$D_v f(3, 4) = \boxed{}$

c) (2 Punkte) Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an.

$$\int_{-2}^{-1} \int_{1}^{x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\boxed{}} \int_{-2}^{\boxed{}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

d) (3 Punkte) Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cdot e^y \\ \cos x \cdot e^y \end{pmatrix},$$

und C die Kurve, die in Polarkoordinaten parametrisiert ist durch

$$r(\varphi) = \pi \left(1 + \cos \frac{\varphi}{2}\right), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Berechnen Sie das Wegintegral von $\vec{F}$ entlang der Kurve C:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \boxed{}$$

6. (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y, z) = 4y - 2z$ eingeschränkt auf der Menge

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y - z = 2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

7. (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen in $\mathbb{R}^3$ begrenzt durch die beide Flächen $x = y^2 + z^2$ und $x = 16 - y^2 - 3z^2$.

8. (10 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Oberfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 = 2, -3 \le y \le 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \le 2, y = 1\}$$

mit nach aussen gerichtetem Normalenvektor und sei $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x^3, 6yz^2, ye^x).$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

9. (10 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} & = \cos x, \text{ für alle } x > 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) & = 2 \end{cases}.$$