Prüfung
Analysis I/II D-BAUG
Winter 2017

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

1. (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma(t) = 2\cos(4t) + 2 + i\sin(4t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - (4+4i)z^2 + (2+9i)z + (1-5i).$$

c) (3 Punkte) Die Kurve γ teilt die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in zwei Teilmengen: eine beschränkte Menge B und eine unbeschränkte Menge U.

Verwenden Sie Ihre Skizze aus Aufgabenteil **a)** um zu bestimmen, welche der in Aufgabenteil **b)** bestimmten Nullstellen in B und welche in U liegen.

2. (10 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) (3 Punkte)

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \mathrm{d}x$$

b) (4 Punkte)

$$\int \frac{x^2 + x + 8}{x^3 - x^2 + 9x - 9} \mathrm{d}x$$

c) (3 Punkte)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x) - x}{\sin(x^3)}$$

3. (10 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 6\sqrt{9 - x} + 3\sqrt{x}.$$

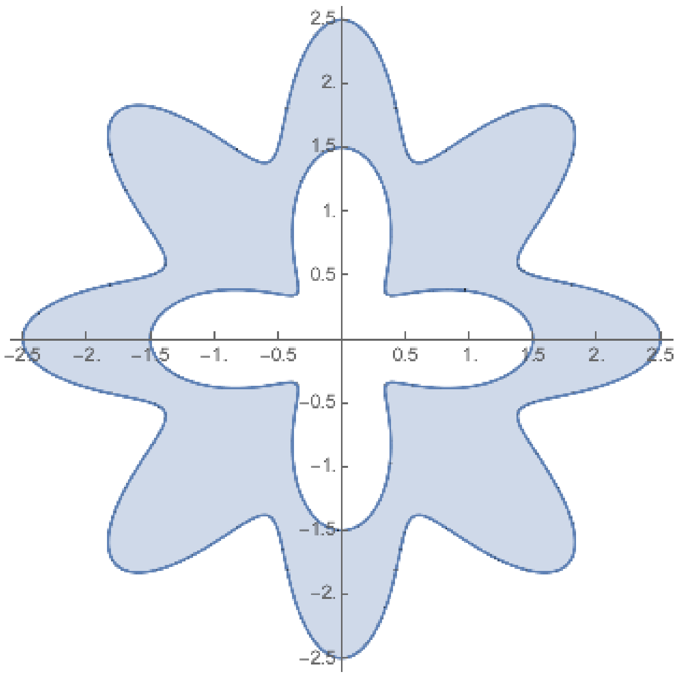
a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen von f. Sie müssen den Ausruck **nicht** vereinfachen!

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Stellen $x \in \mathbb{R}$, an welchen die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ übereinstimmt. Berechnen Sie die Krümmung an diesen Stellen.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die globalen Maxima und Minima der Funktion f auf dem Intervall $[0, 9]$.

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

a) Gegeben sei das folgende Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$:



Dann gilt für jede stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}$

$$\iint_G f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \ldots$$

(I) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

(II) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4r)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4r)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$

(III) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

(IV) ☐

$$\ldots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

b) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Oberfläche und $K = \partial S$ deren Rand mit der von S induzierten Orientierung. Dann gilt

$$\int_K \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \ldots$$

(I) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(II) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(III) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(IV) ☐

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

c) Wir betrachten die Funktion $g(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ und das Vektorfeld $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$. Weiter sei K die durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\int_K \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \ldots$$

(I) ☐ -8

(II) ☐ -7

(III) ☐ 0

(IV) ☐ 6

d) Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, dessen Rand durch eine einfache geschlossene Kurve K im Gegenuhrzeigersinn parametrisiert wird. Wir interpretieren D als eine dünne Platte mit Dichte $\rho \equiv 1$. Ferner wollen wir annehmen, dass auch die Gesamtmasse von D gleich 1 ist, d.h.

$$\iint_D 1 \, \mathrm{d}A = 1.$$

Welches der folgenden Integrale berechnet **NICHT** die x-Koordinate des Schwerpunktes von D?

(I) ☐

$$\frac{1}{2} \oint_K -xy \, \mathrm{d}x$$

(II) ☐

$$\oint_K -xy \, \mathrm{d}x$$

(III) ☐

$$\iint_D x \, \mathrm{d}A$$

(IV) ☐

$$\frac{1}{2} \oint_K x^2 \, \mathrm{d}y$$

e) Was ist eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems?

$$y' = 2xy + e^{x^2+x}, \quad y(0) = 2$$

(I) ☐ $y(x) = 2e^{x^2}$

(II) ☐ $y(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2}$

(III) ☐ $y(x) = 2e^{x^2+x}$

(IV) ☐ $y(x) = e^{x^2+x}$

5. (12 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

$c =$ ☐

b) Wir betrachten die Kurve K mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\sin(\pi t), \sinh t + \cosh t), \quad t \in [0, 1]$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Arbeit W des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang der Kurve K.

$W =$ ☐

c) Bestimmen Sie den Parameter $C \in \mathbb{R}$ so, dass die Fläche

$$F_C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - 4x + y^2 - 8y + C\}$$

die xy-Ebene (tangential) berührt.

$C = \boxed{}$

d) Vervollständigen Sie den folgenden Wechsel in Polarkoordinaten (r, ϕ).

$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{-x} x^2 y + y^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_{0}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi.$$

6. (10 Punkte) Finden Sie den Punkt mit dem kleinsten Abstand zum Ursprung $(0,0,0)$ auf der Schnittkurve der Ebene $2y + 4z = 5$ mit dem Kegel $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.

7. (10 Punkte) Zu einem Parameter $a \geq 0$ betrachten wir einen Balken der Form

$$B(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - a \leq x \leq a - y^2, 0 \leq z \leq 7\}$$

in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(a)$ des Balkens $B(a)$ bezüglich der z-Achse in Abhängigkeit von dem Parameter $a \geq 0$.

8. (10 Punkte) Wir betrachten die Fläche

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right)\right\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - xy \\ e^z x \\ yz + 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Fläche B, wobei B so orientiert sein soll, dass der Normalenvektor immer eine nichtnegative z-Komponente hat.

9. (10 Punkte) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' \cdot x = \sqrt{1 + y^2}, & \text{für alle } x > 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$