Name: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Legi: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

Januar 2020

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Menge

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |z+1|\}.$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z + 10.$$

Hinweis: Versuchen Sie eine rein imaginäre Lösung zu finden!

c) (2 Punkte) Welche Nullstellen von $p(z)$ liegen in der Menge B?
Hinweis: Verwenden Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabenteil **a)**.

2. (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) (3 Punkte)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(2x) - 1}{\cos(x) - 1}$$

b) (3 Punkte)

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(2x \cdot \cos(x^2)\right) \cdot x + \sin(x^2)\, dx$$

c) (4 Punkte)

$$\int \frac{\pi x^2 - 6\pi x + 7x + 9\pi}{x^3 - 6x^2 + 9x}\, \mathrm{d}x$$

3. (10 Punkte)

a) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{\pi^n} x^n.$$

b) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie eine Potenzreihe F auf $(-\rho, \rho)$, die $F'' = f$ auf $(-\rho, \rho)$ erfüllt.

c) **(4 Punkte)** Finden Sie mittels **b)** eine explizite Darstellung von f auf $(-\rho, \rho)$.

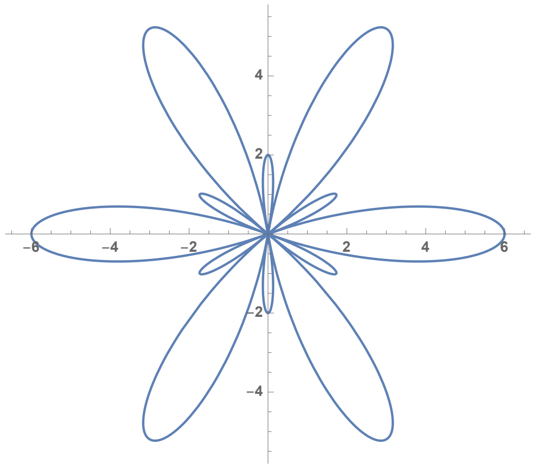
Hinweis: Sie können die ersten beiden Glieder der Potenzreihe F beliebig wählen.

Name: __________________ Legi: ___________________

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

a) Welche Parametrisierung in Polarkoordinaten beschreibt die folgende Kurve?



(A)
$$R(\varphi) = 2 + 4\cos(12\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(B)
$$R(\varphi) = 4 + 2\cos(6\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(C)
$$R(\varphi) = 2 + 4\cos(6\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(D)
$$R(\varphi) = 4 + 2\cos(12\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

b) Wir betrachten $B_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ für $a > 0$. Dann gilt

$$\iiint_{B_a} e^{-\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \, \mathrm{d}V = \ldots$$

(A) $\frac{4\pi}{3} e^{-a^3}$

(B) $\pi \left(e^{-a^3} - 1\right)$

(C) $\pi \left(1 - e^{-a^3}\right)$

(D) $\frac{4\pi}{3} \left(1 - e^{-a^3}\right)$

c) Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$. Was gilt dann für den Fluss

$$\Phi = \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{n}$$

des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Kreisscheibe

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

in positiver x-Richtung?

(A) $\Phi > 0$

(B) $\Phi = 0$

(C) $\Phi < 0$

(D) Es gibt nicht genügend Informationen, um das zu beantworten.

d) Sei $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Welche Identität gilt **nicht** immer?

(A) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{F})) = 0$.

(B) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0$.

(C) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$.

(D) Jede der obigen Identitäten gilt unabhängig von der Wahl von $\vec{F}$ und f.

e) Für welche der folgenden Funktionen $u(x)$ ist es **unmöglich** Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ zu wählen, sodass $u(x)$ und e^{2x} beides Lösungen der folgenden Differentialgleichung sind?

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

(A) $u(x) = e^{-x}$

(B) $u(x) = \cos(x)$

(C) $u(x) = \cosh(2x)$

(D) $u(x) = xe^{2x}$

5. (12 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Die reellen Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllen $(A + i\,B)^{87} = 6020 + 4090\,i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie

$$\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (A - i\,B)^{87}$$

in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{}$$

b) Sei $F(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + z^2$ und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 7\}$. Finden Sie eine Beschreibung der Tangentialebene von S am Punkt $(1, 1, 3) \in S$ in der Form

$$2x + By + Cz = D$$

für $B, C, D \in \mathbb{R}$.

$$B = \boxed{} \quad C = \boxed{} \quad D = \boxed{}$$

c) Sei $\vec{F}(x, y) = (3x + \pi, 2y + \pi^2)$ ein Vektorfeld und $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis.
Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch K nach aussen:

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{n} = \boxed{}$$

d) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos(x)}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Name: _________________ Legi: __________________

6. (10 Punkte) Bestimmen Sie die Maximal- und Minimalstellen der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + 9y^2 + 25z^2$$

auf der Menge

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

und die zugehörigen Funktionswerte.

7. (10 Punkte) Gegeben sei die Dichtefunktion

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Wir betrachten die Achtelkugel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Masse der Achtelkugel K bezüglich der gegebenen Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$.

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Achtelkugel K bezüglich der gegebenen Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$.

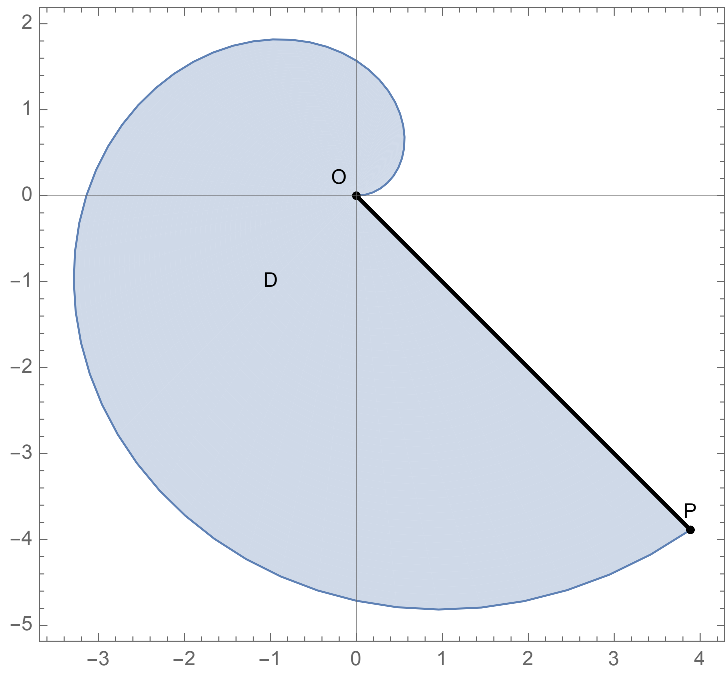
c) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

bezüglich derselben Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil **b)** und argumentieren Sie!

8. (10 Punkte) Wir betrachten die Spirale, welche in Polarkoordinaten durch $R(\varphi) = \varphi, \varphi \in [0, \frac{7}{4}\pi]$ gegeben ist. Mit D bezeichnen wir das Gebiet, welches durch die Spirale und der Strecke zwischen $O = (0,0)$ und $P = (\frac{7\pi}{4\sqrt{2}}, -\frac{7\pi}{4\sqrt{2}})$ begrenzt wird; siehe Bild.



a) (4 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

b) (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss nach aussen durch den Rand von D des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} - x^2y^3 + y^7 \\ x^9 + 17x^8 + \frac{xy^4}{2} + \frac{y^3}{3} \end{pmatrix}.$$

9. (10 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = -54e^{-2x}.$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung, sodass

$$y(0) = \pi + \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -2\pi + \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) \cdot e^{-x} = \frac{1}{2}.$$