Initialen: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Legi (6 letzte Ziffern): _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

Januar 2021

Dr. Meike Akveld

1. (10 Punkte)

a) **(4 Punkte)** Bestimmen und skizzieren Sie die Menge B in der komplexen Ebene

$$B = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z + 1 + 3i| \leq |z - 2| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$$

Achtung: Eine Skizze allein genügt nicht – es soll ersichtlich sein, wie Sie zu dieser Skizze gekommen sind.

b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

Bemerkung: Sie dürfen Ihre Antwort in Polarform stehen lassen.

c) **(2 Punkte)** Zeichnen Sie die Lösungen von b) in der Skizze von a) ein und geben Sie an, welche in der Menge B liegen.

2. (10 Punkte)

Es sei B_α (für $0 < \alpha < 1$) die von den beiden Parabelbögen $x - y^2 = 0$ und $x - \alpha y^2 = 1$ berandete Fläche. Für welche α liegt der Schwerpunkt von B_α ausserhalb der Fläche B_α?

3. (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert oder nicht:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+7}}{5^k}.$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x.$$

c) (3 Punkte) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right).$$

Initialen: _________________ Legi (6 letzte Ziffern): _________________

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

a) (3 Punkte) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n} x^n$ ist

(A) 0.

(B) $\frac{1}{7}$.

(C) 7.

(D) ∞.

b) (2 Punkte) Sei $\int_0^1 f(-\frac{x}{c})\,\mathrm{d}x = 1$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $\int_{-\frac{1}{c}}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}$.

(A) Wahr.

(B) Falsch.

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

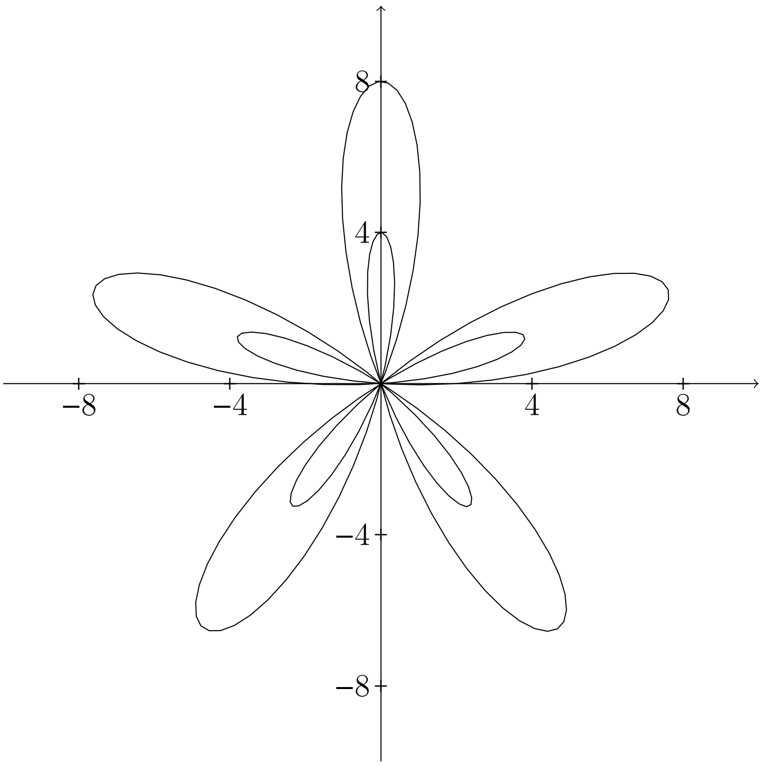
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}.$$

Dann gilt für die 15. Ableitung von f an der Stelle $x = 0$, dass $f^{(15)}(0) = 210$ ist.

(A) Wahr.

(B) Falsch.

d) (3 Punkte) Welche Parametrisierung in Polarkoordinaten beschreibt die folgende Kurve?



(A)

$$R(\varphi) = 6 + 2\sin(5\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(B)

$$R(\varphi) = 6 + 2\sin(10\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(C)

$$R(\varphi) = 2 + 6\sin(5\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(D)

$$R(\varphi) = 2 + 6\sin(10\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Initialen: _________________ Legi (6 letzte Ziffern): _________________

5. **(10 Punkte)** In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) (2 Punkte) Berechnen Sie $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x = \boxed{}$$

b) (2 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'' + 7y' + 12y = 6x$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der **homogenen** Gleichung.

$$y_h(x) = \boxed{}$$

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene

$$14x + By + Cz = D$$

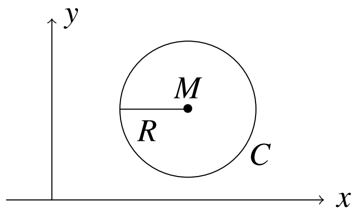
im Punkt $(1, 2, 7)$ der Fläche mit der Gleichung $xyz = 14$.

$$B = \boxed{} \quad C = \boxed{} \quad D = \boxed{}$$

d) (3 Punkte) Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{6} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{3} \end{pmatrix},$$

und C der Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt M und Radius $R = 3$ wie in der folgenden Grafik:



Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch C:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{n} = \boxed{}$$

6. (10 Punkte)

Betrachten Sie die Kurve Γ definiert als Schnittmenge zweier Flächen

$$\Gamma = \{((x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 3 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

Berechnen Sie den Punkt / die Punkte auf der Kurve Γ, die am weitesten entfernt sind vom Ursprung und bestimmen Sie diese Distanz.

7. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fläche des Gebiets, das von den beiden Kardioiden $r = 1 + \sin\varphi$ und $r = 1 + \cos\varphi$ eingeschlossen wird.

Hinweis: Machen Sie eine genaue Skizze.

8. (10 Punkte)

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ durch die Oberfläche von

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq 1 \, \text{und} \, 0 \leq x \leq 3\}.$$

9. (10 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y' + 2xy &= x^3 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$