Initialen: _ _ _ _ _ _ _ _ Legi (6 letzte Ziffern): _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

Lösung August 2020

Dr. Meike Akveld

Die folgenden Stammfunktionen dürfen Sie bei Bedarf ohne Beweis verwenden:

$$\int \cos^4 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{32} (12\varphi + 8\sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)) + C$$
$$\int \sin^4 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{32} (12\varphi - 8\sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)) + C.$$

1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = \frac{i}{8}$ in Normalform.

Lösung: Wir schreiben $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$. Es folgt $r^3 e^{3i\varphi} = z^3 = \frac{i}{8} = \frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{2}}$. Somit ist $r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ und $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, also $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Mit $k = -1, 0, 1$ erhalten wir die Winkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{5\pi}{6}$. Für alle anderen $k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir bis auf Addition von $2\pi m$ wieder die gleichen Winkel, was uns keine neuen Lösungen liefert. Die erhaltenen drei Lösungen sind also

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = -\frac{1}{2}i \\
z_2 &= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \\
z_3 &= \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i.
\end{aligned}$$

b) (4 Punkte) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-1| \cdot |z+1| \leq 1\}$$

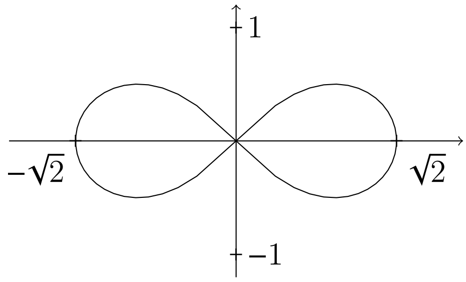
in der komplexen Ebene.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

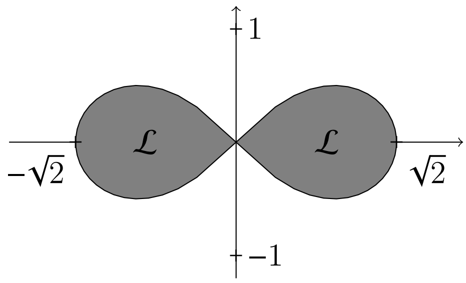
Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten und schreiben $z = re^{i\varphi}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|z-1| \cdot |z+1| &\leq 1 \\
\Leftrightarrow |z^2-1| &\leq 1 \\
\Leftrightarrow |z^2-1|^2 &\leq 1 \\
\Leftrightarrow |r^2e^{2i\varphi}-1|^2 &\leq 1 \\
\Leftrightarrow (r^2e^{2i\varphi}-1)(\overline{r^2e^{2i\varphi}-1}) &\leq 1 \\
\Leftrightarrow (r^2e^{2i\varphi}-1)(r^2e^{-2i\varphi}-1) &\leq 1 \\
\Leftrightarrow r^4+1-r^2(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}) &\leq 1 \\
\Leftrightarrow r^4 &\leq 2r^2\cos(2\varphi) \\
\Leftrightarrow r^2 &\leq 2\cos(2\varphi).
\end{aligned}$$

Die Kurve $r(\varphi) = 2\cos(2\varphi)$ sieht wie folgt aus:

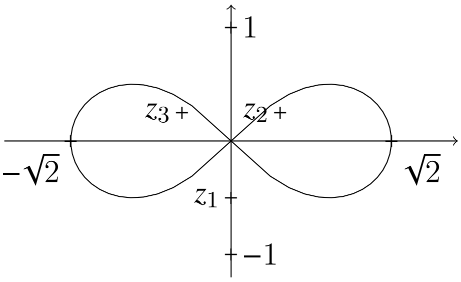


Man sieht der ursprünglichen Ungleichung direkt an, dass $z = \pm 1$ Lösungen sind. Somit ist $\mathcal{L}$ die Fläche, die von der Kurve $r(\varphi) = 2\cos(2\varphi)$ eingeschlossen wird:



c) **(2 Punkte)** Welche der Lösungen aus a) liegen in $\mathcal{L}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: Man sieht in der Skizze aus b), dass die Lösung $z_1 = -\frac{1}{2}i$ nicht in $\mathcal{L}$ liegt. Je nach Genauigkeit der Skizze kann man ablesen, dass die Lösungen $z_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ in $\mathcal{L}$ liegen:



Falls die Skizze zu ungenau ist, muss man die Lösungen aus a) in die Ungleichung $|z-1|\cdot|z+1| \leq 1$, respektive $r^2 \leq 2\cos(2\varphi)$ einsetzen und schauen, wann die Ungleichung erfüllt ist:

$$\text{Für} \quad z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{gilt} \quad 2\cos(2\varphi) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \geq \frac{1}{4} = r^2.$$
$$\text{Für} \quad z_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{gilt} \quad 2\cos(2\varphi) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \geq \frac{1}{4} = r^2.$$

Somit liegen z_2 und z_3 in $\mathcal{L}$

2. (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Krümmungskreises (oder auch Schmiegekreises) der Kurve $x\cdot y = c^2$ im Punkt (c,c) und skizzieren Sie die Kurve und den Krümmungskreis in diesem Punkt.

Hinweis: Bestimmen Sie eine Parametrisierung für diese Kurve.

Lösung: Wir parametrisieren zuerst die Kurve:

$$\gamma_c(t) = (x(t), y(t)) = \left(t, \frac{c^2}{t}\right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Die Evolute (= Funktion der Mittelpunkte der Krümmungskreise) ist per Definition.

$$\vec{m}(t) = (x(t), y(t)) + \frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}(-\dot{y}(t), \dot{x}(t)).$$

In unserem Fall sind

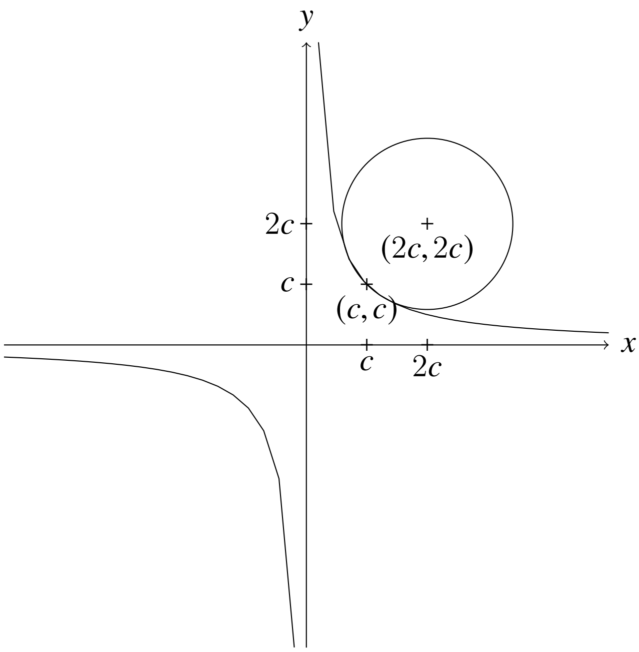
$$x(t) = t \quad , \quad \dot{x}(t) = 1 \quad , \quad \ddot{x}(t) = 0$$
$$y(t) = \frac{c^2}{t} \quad , \quad \dot{y}(t) = -\frac{c^2}{t^2} \quad , \quad \ddot{y}(t) = \frac{2c^2}{t^3}.$$

Mit

$$\begin{aligned} x(c) &= c \quad , \quad \dot{x}(c) = 1 \quad , \quad \ddot{x}(c) = 0 \\ y(c) &= c \quad , \quad \dot{y}(c) = -1 \quad , \quad \ddot{y}(t) = \frac{2}{c} \end{aligned}$$

erhalten wir als Mittelpunkt des Krümmungskreises im Punkt $(c, c) = \gamma_c(c)$ also

$$\vec{m}(c) = (c, c) + \frac{2}{2/c}(1, 1) = (2c, 2c).$$



3. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Betrachten Sie die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} \left(x - \frac{2}{3}\right)^n$$

und bestimmen Sie das Konvergenzintervall.

Lösung: Wir können die Reihe umschreiben als

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} \left(x - \frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} (3x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} y^n.$$

Diese Potenzreihe (in y) hat Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = 1.$$

Die Potenzreihe konvergiert also für $y \in (-1,1)$, also für $-1 < 3x-2 < 1$, also für $\frac{1}{3} < x < 1$. Wir betrachten nun noch die Randpunkte $x = \frac{1}{3}$ und $x = 1$. In diesen gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}(3 \cdot \tfrac{1}{3} - 2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}(3 \cdot 1 - 2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

was beides bekanntermassen konvergente Reihen sind. Somit konvergiert die Reihe für $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

b) (4 Punkte)

Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

Lösung: Wir möchten die Partialbruchzerlegung berechnen, wozu wir zuerst die Nullstellen des Polynoms im Nenner bestimmen müssen. Man sieht, dass $x = 0$ eine Nullstelle ist. Die anderen zwei Nullstellen sieht man entweder direkt oder durch Anwenden der Mitternachtsformel:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

Wir berechnen mit dem üblichen Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-2x^2+x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (C-2A-B)x + A}{x^3-2x^2+x}\end{aligned}$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C - 2A - B = 0 \\ A = 1 \end{cases},$$

mit der Lösung $A = 1$, $B = -1$ und $C = 1$. Somit können wir das Integral berechnen als

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c\end{aligned}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

c) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x) + x^3}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}$.

Lösung: *Variante 1:* Da der Zähler und der Nenner gegen 0 gehen, können wir die Regel von l'Hopital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) + x^3}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x) + 3x^2}{\frac{1}{\sqrt{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt{1-2x}}} = \frac{3+0}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Variante 2: Durch Erweitern mit $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) + x^3}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}}{(1+2x) - (1-2x)}(\sin(3x) + x^3) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}}{4x}(\sin(3x) + x^3) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}}{4}\,\frac{\sin(3x) + x^3}{x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x} + x^2\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{1} = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

wobei wir am Schluss die Regel von l'Hopital verwendet haben.
Variante 3: Durch Einsetzen der Taylorreihen für $\sin(y)$ und $\sqrt{1+y}$ haben wir

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} \mp \ldots \\ \sqrt{1+2x} &= 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{(2x)^3}{16} \\ \sqrt{1-2x} &= 1 - \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} - \frac{(2x)^3}{16}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)+x^3}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x-\frac{9x^3}{6}+\frac{(3x)^5}{5!}\mp\ldots+x^3}{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}\mp\ldots-\left(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\ldots\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x+(\text{Terme von Ordnung } x^3 \text{ und höher})}{2x+(\text{Terme von Ordnung } x^3 \text{ und höher})}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

4. **Multiple-Choice (10 Punkte):** Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

a) (3 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das Integral

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos(x) \cdot e^x \, \mathrm{d}x$$

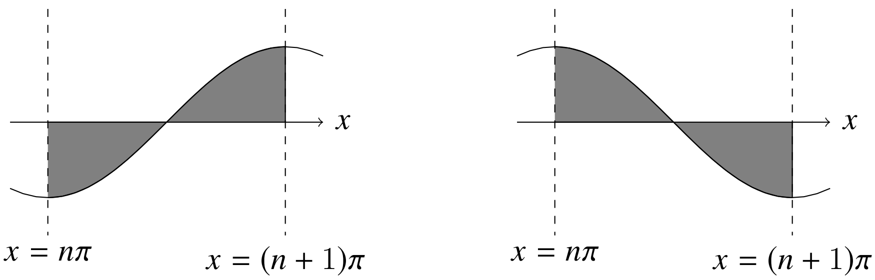
(A) ✗ immer positiv.

(B) ✗ immer negativ.

(C) ✗ gleich Null.

(D) ✓ abhängig vom Wert von n positiv oder negativ.

Lösung: Variante 1 (überlegen): Man kann sich überlegen, wie $\cos(x)$ auf dem Intervall $[n\pi, (n+1)\pi]$ aussieht:



Die linke Grafik ist für n ungerade, die rechte für n gerade. Da e^x grösser ist je grösser x ist, überwiegt für ungerade n die Fläche über der x-Achse und für gerade n die Fläche unter der x-Achse. D.h. das Integral ist positiv für n ungerade und negativ für n gerade.
Variante 2 (rechnen): Man kann das Integral mit zweimaliger partieller Integration ausrechnen:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \underbrace{\cos(x)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^x}_{\uparrow} \, \mathrm{d}x = [\cos(x)e^x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \underbrace{\sin(x)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^x}_{\uparrow} \, \mathrm{d}x$$

$$= [\cos(x)e^x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + [\sin(x)e^x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (\cos(x))e^x \, \mathrm{d}x.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos(x)\cdot e^x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left([\cos(x)e^x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + [\sin(x)e^x]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)\pi)e^{(n+1)\pi} - \cos(n\pi)e^{n\pi}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{1}{2}\left(e^{(n+1)\pi} + e^{n\pi}\right) > 0 & \text{falls } n \text{ ungerade}\\ \frac{1}{2}\left(-e^{(n+1)\pi} - e^{n\pi}\right) < 0 & \text{falls } n \text{ gerade}\end{cases}.\end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Sei (a_n) eine Nullfolge. Dann konvergiert die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(A) ✗ Wahr.

(B) ✓ Falsch.

Lösung: Gegenbeispiel: Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist.

c) (3 Punkte) Welcher der folgenden Werte ist die beste Approximation von $\cos(0.1)$?

(A) ✗ 1.000

(B) ✗ 0.996

(C) ✓ 0.995

(D) ✗ 0.990

Lösung: Die Taylor-Reihe des Kosinus ist

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - + \dots$$

Für $x = 0.1 = \frac{1}{10}$ ist dies

$$\begin{aligned}\cos(0.1) &= 1 - \frac{1}{200} + \frac{1}{24}\frac{1}{10^4} - + \dots = 1 - 0.005 + \frac{1}{24}\cdot 0.0001 - + \dots\\ &= 0.995 + (\text{ etwas, das kleiner ist als } 0.00001).\end{aligned}$$

Die beste Approximation von $\cos(0.1)$ ist also 0.995.

d) (2 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Für jede beliebige Lösung $y(x)$ (d.h. unabhängig von den Anfangsbedingungen) gilt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

(A) ✗ Wahr.

(B) ✓ Falsch.

Lösung: Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

Alle Nullstellen sind positiv, weshalb die Aussage nicht stimmen kann. Die Lösungen der DGL sind nämlich

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Somit ist $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ nur dann wahr, wenn $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ gilt.

5. **(10 Punkte)** In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{2x} & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+b}} & \text{für } 0 \leq x < 7 \\ \frac{1}{x-4} & \text{für } x \geq 7 \end{cases} .$$

überall stetig ist.

$$a = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad b = \boxed{2}$$

Lösung: Stetigkeit an der Stelle $x = 7$ impliziert, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{7+b}} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow 9 &= 7 + b \\ \Leftrightarrow b &= 2. \end{aligned}$$

Mit $b = 2$ impliziert Stetigkeit an der Stelle $x = 0$, dass

$$a = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ im Punkt $(3, 4)$ in Richtung $v = (4, -3)^T$.

$$D_v f(3, 4) = \boxed{0}$$

Lösung: Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Die Richtungsableitung im Punkt $(3, 4)$ in Richtung $v = (4, -3)$ ist gegeben durch

$$\nabla f(3, 4) \cdot \frac{v}{||v||} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} \\ \frac{8}{25} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left(\frac{24}{25} - \frac{24}{25} \right) = 0.$$

c) (2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an.

$$\int_{-2}^{-1} \int_{1}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\boxed{4}} \int_{-2}^{\boxed{-\sqrt{y}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Lösung: Wir integrieren über die Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le -1, 1 \le y \le x^2\}$. Die Ungleichung $y \le x^2$ ist äquivalent zu $|x| \ge \sqrt{y}$. Da unser x negativ ist, ist die Ungleichung äquivalent zu $x \le -\sqrt{y}$. Daher können wir die Menge D auch wie folgt schreiben $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le -\sqrt{y}, 1 \le y \le 4\}$. Damit gilt

$$\int_{-2}^{-1} \int_{1}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{4} \int_{-2}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

d) (3 Punkte) Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cdot e^y \\ \cos x \cdot e^y \end{pmatrix},$$

und C die Kurve, die in Polarkoordinaten parametrisiert ist durch

$$r(\varphi) = \pi\left(1 + \cos\frac{\varphi}{2}\right), \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Berechnen Sie das Wegintegral von $\vec{F}$ entlang der Kurve C:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \boxed{-2}$$

Lösung: Es gilt $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cdot e^y \\ \cos x \cdot e^y \end{pmatrix} = \nabla\varphi$ für $\varphi(x,y) = \cos x \cdot e^y$. Der Start- und Endpunkt der Kurve C ist

$$r(0) = \pi(1 + \cos 0) = 2\pi \longrightarrow (x_0, y_0) = (2\pi, 0)$$
$$r(\pi) = \pi(1 + \cos\frac{\pi}{2}) = \pi \longrightarrow (x_1, y_1) = (-\pi, 0).$$

Nach dem Fundamentalsatz ist

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \varphi(-\pi,0) - \varphi(2\pi,0) = \cos(-\pi)\cdot e^0 - \cos(2\pi)\cdot e^0 = -1 - 1 = -2.$$

6. (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y, z) = 4y - 2z$ eingeschränkt auf der Menge

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

Lösung: Wir nennen die beiden Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) := 2x - y - z = 2$ und $g_2(x, y, z) := x^2 + y^2 = 1$. Wir wollen Lagrange-Multiplikatoren verwenden. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (0, 4, -2), \\ \nabla g_1(x, y, z) &= (2, -1, -1), \\ \nabla g_2(x, y, z) &= (2x, 2y, 0). \end{aligned}$$

Lokale Extrema von f auf Γ müssen daher das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z), \\ g_1(x, y, z) &= 2, \\ g_2(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

erfüllen. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x, \\ 4 &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 y, \\ -2 &= -\lambda_1, \\ 2x - y - z &= 2, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung gilt $\lambda_1 = 2$ und unser Gleichungssystem wird vereinfacht zu

$$\begin{aligned} \lambda_2 x &= -2, \\ \lambda_2 y &= 3, \\ 2x - y - z &= 2, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $x \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ sind. Aus der zweiten Gleichung folgt, dass auch $y \neq 0$ sein muss. Somit dürfen wir durch x und durch y dividieren. Die erste Gleichung dividiert durch x wird $\lambda_2 = -\frac{2}{x}$, die zweite Gleichung dividiert durch y wird $\lambda_2 = \frac{3}{y}$. Gleichsetzen gibt uns aus den ersten beiden Gleichungen die Bedingung $-\frac{2}{x} = \frac{3}{y}$, also $x = -\frac{2}{3}y$. Unser Gleichungssystem vereinfacht sich also zu

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{3}y, \\ 2x - y - z &= 2, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Setzt man die erste Gleichung in die dritte ein, so erhält man

$$1 = x^2 + y^2 = \frac{4}{9}y^2 + y^2 = \frac{13}{9}y^2,$$

also

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{13}} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{und} \quad x_{1,2} = -\frac{2}{3}y_{1,2} = -\pm\frac{2}{\sqrt{13}} = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Mit der letzten noch nicht benutzten Gleichung des Gleichungssystems kann man nun z berechnen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2x_1 - y_1 - 2 = -\frac{4}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 = -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2 = \frac{-7 - 2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \\ z_2 &= 2x_2 - y_2 - 2 = \frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 = \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 = \frac{7 - 2\sqrt{13}}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die beiden Extremalstellen

$$(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3, -7 - 2\sqrt{13}) \text{ und } (x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3, 7 - 2\sqrt{13}).$$

Einsetzen in die Funktion $f(x, y, z) = 4y - 2z$ gibt

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) &= \frac{1}{\sqrt{13}}(12 + 14 + 4\sqrt{13}) = 2\sqrt{13} + 4 \\ f(x_2, y_2, z_2) &= \frac{1}{\sqrt{13}}(-12 - 14 + 4\sqrt{13}) = -2\sqrt{13} + 4. \end{aligned}$$

Somit ist das Maximum von f gleich $4 + 2\sqrt{13}$ und das Minimum gleich $4 - 2\sqrt{13}$.

7. (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen in $\mathbb{R}^3$ begrenzt durch die beide Flächen $x = y^2 + z^2$ und $x = 16 - y^2 - 3z^2$.

Lösung: Die Schnittkurve der beiden Flächen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= 16 - y^2 - 3z^2 \\ \Leftrightarrow 2y^2 + 4z^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow y^2 + 2z^2 &= 8. \end{aligned}$$

Das Volumen begrenzt durch die gegebenen Flächen ist somit

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (16 - y^2 - 3z^2) - (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{R}} (16 - 2y^2 - 4z^2)\,\mathrm{d}A$$

mit

$$\mathcal{R} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 2z^2 \le 8\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le z \le 2, -\sqrt{8-2z^2} \le y \le \sqrt{8-2z^2}\}.$$

Variante 1: Wir bemerken, dass der Integrand symmetrisch in $y \leftrightarrow -y$ und in $z \leftrightarrow -z$ ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{8-2z^2}} (16 - 2y^2 - 4z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4 \int_0^2 \left[16y - \frac{2}{3}y^3 - 4yz^2\right]_{y=0}^{\sqrt{8-2z^2}} \mathrm{d}z \\ &= 4 \int_0^2 \sqrt{8-2z^2} \left(16 - \frac{2}{3}(8 - 2z^2) - 4z^2\right) \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Die Klammer berechnet sich zu

$$16 - \frac{2}{3}(8-2z^2) - 4z^2 = 16 - \frac{16}{3} + \left(\frac{4}{3} - 4\right) z^2 = \frac{32}{3} - \frac{8}{3}z^2 = \frac{4}{3}(8 - 2z^2).$$

Somit ist das Volumen

$$V = \frac{16}{3} \int_0^2 (8 - 2z^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z.$$

Wir machen die Substitution $z = 2\cos\theta$, $\mathrm{d}z = -2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$. Beachte, dass $8 - 2z^2 = 8 - 8\cos^2\theta = 8(1-\cos^2\theta) = 8\sin^2\theta$ gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} V &= \frac{16}{3} \int_{\arccos(0)}^{\arccos(1)} (8\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} (-2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 8^{\frac{3}{3}} \sin^3\theta (-2) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{32}{3} 8^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3}(2\sqrt{2})^3 \left[\frac{3}{8}\theta - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta)}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{32}{3} \cdot 16\sqrt{2} \cdot \frac{3}{8}\frac{\pi}{2} = 32\sqrt{2}\pi, \end{aligned}$$

wobei wir den Hinweis benutzt haben.

Variante 2: Wir können eine Koordinatentransformation wie folgt machen:

$$\begin{aligned} y &= r\cos\varphi \\ z &= \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ \mathrm{d}A &= \frac{r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Dieses Volumenelement erhält man von der Jacobideterminante

$$\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos^2\varphi + \frac{r}{\sqrt{2}}\sin^2\varphi = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Da $y^2 + 2z^2 = (r\cos\varphi)^2 + 2(\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi)^2 = r^2$, entspricht das Gebiet $\mathcal{R}$ den Grenzen $0 \le r \le \sqrt{8}$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$. Somit ist das Volumen

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\mathcal{R}} (16 - 2y^2 - 4z^2)\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} (16 - 2r^2)\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8}} 16r - 2r^3\,\mathrm{d}r = \sqrt{2}\pi\left[8r^2 - \frac{1}{2}r^4\right]_0^{\sqrt{8}} = \sqrt{2}\pi(64-32) = 32\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

8. (10 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Oberfläche

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 = 2,\ -3 \le y \le 1\} \cup \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \le 2,\ y = 1\}$$

mit nach aussen gerichtetem Normalenvektor und sei $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{F}(x,y,z) = (2x^3, 6yz^2, ye^x).$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

Lösung: Der Zylinder

$$D := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \le 2, -3 \le y \le 1\}$$

hat als Rand

$$\partial D = S \cup S_0 \quad \text{mit} \quad S_0 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \le 2, y = -3\}.$$

Wir wollen den Satz von Gauss anwenden. Dazu berechnen wir zuerst die Divergenz von $\vec{F}$, nämlich

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 6x^2 + 6z^2 + 0.$$

Der Satz von Gauss besagt

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\ \mathrm{d}V = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_0.$$

Also ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,\mathrm{d}V - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_0.$$

Um das Volumenintegral zu berechnen, benutzen wir Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= y \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

mit $-3 \leq y \leq 1$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\ \mathrm{d}V &= \iiint_D 6x^2 + 6z^2\ \mathrm{d}V = 6 \iiint_D x^2 + z^2\ \mathrm{d}V \\ &= 6 \int_{-3}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}y = 6 \cdot 4 \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 48\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 48\pi(1-0) = 48\pi. \end{aligned}$$

Für das Oberflächenintegral über S_0 benutzen wir ebenfalls Zylinderkoordinaten, wobei $y = -3$ fix ist. Der Normalenvektor, der nach aussen zeigt, ist $(0, -r, 0)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2r^2\cos^2\varphi \\ -18r^2\sin^2\varphi \\ ye^{r\cos\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 18r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 9 \int_0^{2\pi} 2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 9\,[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 9 \cdot 2\pi \cdot 1 = 18\pi. \end{aligned}$$

Somit ist das gesuchte Oberflächenintegral

$$\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,\mathrm{d}V + \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S_0} = 48\pi - 18\pi = 30\pi.$$

Alternativer Lösungsweg: Man kann das Oberflächenintegral auch direkt ohne Gauss berechnen. Seien

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 2, -3 \leq y \leq 1\} \\ S_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 2, y = 1\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S_1} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S_2}.$$

Die Fläche S_1 parametrisieren wir als

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\cos\varphi \\ y &= y \\ z &= \sqrt{2}\sin\varphi \end{aligned}$$

mit $-3 \leq y \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Der Normalenvektor nach aussen ist $\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \\ \sqrt{2}\sin\varphi \end{pmatrix}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S_1} &= \int_0^{2\pi} \int_{-3}^{1} \vec{F}(\sqrt{2}\cos\varphi, y, \sqrt{2}\sin\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \\ \sqrt{2}\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-3}^{1} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2}\cos^3\varphi \\ 12y\sin^2\varphi \\ ye^{\sqrt{2}\cos\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \\ \sqrt{2}\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-3}^{1} 8\cos^4\varphi + \sqrt{2}y\sin\varphi e^{\sqrt{2}\cos\varphi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[8r\cos^4\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2\sin\varphi e^{\sqrt{2}\cos\varphi} \right]_{-3}^{1} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 32\cos^4\varphi - 4\sqrt{2}\sin\varphi e^{\sqrt{2}\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left[12\varphi + 8\sin(2\varphi) + \sin(4\varphi) + 4e^{\sqrt{2}\cos\varphi} \right]_0^{2\pi} \\ &= 24\pi, \end{aligned}$$

wobei

$$\int \cos^4 \varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{32}\left(12\varphi + 8\sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)\right) + C$$

benutzt wurde. Die Fläche S_2 parametrisieren wir als

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= 1 \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

mit $0 \le r \le \sqrt{2}$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$. Der Normalenvektor gegen aussen ist $\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F}(r\cos\varphi, 1, r\sin\varphi) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2r^3\cos^3\varphi \\ 6r^2\sin^2\varphi \\ e^{r\cos\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 6r^3\sin^2\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 3\int_0^{2\pi} 2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 3\left[\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 3\cdot 2\pi \cdot 1 = 6\pi. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_2 = 24\pi + 6\pi = 30\pi.$$

9. (10 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} &= \cos x, \text{ für alle } x > 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) &= 2 \end{cases}.$$

Lösung: Wir lösen zuerst die homogene Gleichung

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Wir bemerken, dass $y(x) \equiv 0$ eine Lösung ist. Für $y \neq 0$ können wir die Variable separieren und erhalten

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -\ln|x| + C_1 \text{ mit } C_1 \in \mathbb{R} \\
|y(x)| &= e^{-\ln|x|+C_1} = C_2 \frac{1}{|x|} \text{ mit } C_2 = e^{C_1} \in \mathbb{R}_{>0} \\
y(x) &= \frac{C_3}{x} \text{ mit } C_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

Da $y(x) = 0$ ebenfalls eine Lösung der homogenen Gleichung ist, erhalten wir als Lösungen der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = \frac{C}{x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Wir benutzen die Methode der Variation der Konstanten um die Lösungen der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Wir nehmen also den Ansatz $y(x) = \frac{C(x)}{x}$. einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$y'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} \overset{!}{=} -\frac{y(x)}{x} + \cos x = -\frac{C(x)}{x^2} + \cos x.$$

Daraus folgt $C'(x) = x\cos x$, also mit partieller Integration

$$C(x) = \int x\cos x\ \mathrm{d}x = [x\sin x] - \int \sin x\ \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

für eine konstante $c \in \mathbb{R}$. Also ist

$$y(x) = \frac{x\sin x + \cos x + c}{x}.$$

Wir bestimmen die Konstante c durch einsetzen in die Anfangsbedingung:

$$2 \overset{!}{=} y(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) + c}{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{2c}{\pi},$$

also ist $c = \frac{\pi}{2}$ und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = \frac{x\sin x + \cos x + \frac{\pi}{2}}{x} = \sin x + \frac{\cos x + \frac{\pi}{2}}{x}.$$