Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Dr. Menashe-hai Akka Ginosar 8. August 2019

Analysis I & II
Lösung

Aufgabe 1. (10 Punkte)

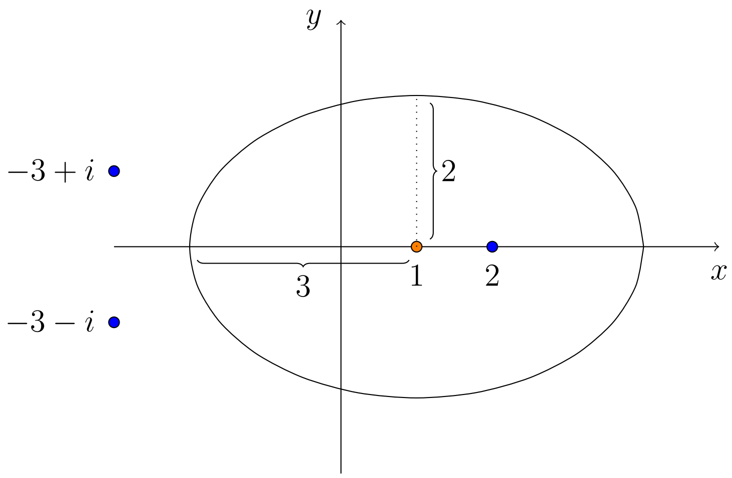
(a) [**4 Punkte**] Skizzieren Sie die Menge

$$\{(1+3\cos t)+(2\sin t)\,i\,;\ t\in\mathbb{R}\}\,. \tag{1}$$

Lösung: Die Menge (1) beschreibt eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

in der xy-Ebene. Die Ellipse liegt achsenparallel, hat Mittelpunkt $(1,0)$ und die Halbachsen 3 und 2.



(b) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie alle Lösungen $z\in\mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3+4z^2-2z=20. \tag{2}$$

Die Lösungen können in Polar- oder kartesischen Koordinaten angegeben werden.

Lösung: Durch Ausprobieren kann man herausfinden, dass $z_1=2$ eine Lösung von (2) ist. In der Tat gilt

$$2^3+4\cdot 2^2-2\cdot 2=8+16-4=20.$$

Polynomdivision liefert, dass

$$z^3 + 4z^2 - 2z - 20 = (z-2)(z^2 + 6z + 10).$$

Die restlichen Nullstellen von (2) findet man demnach als Lösungen der Gleichung $z^2 + 6z + 10 = 0$. Diese sind

- gemäß *abc*-, *pq*- oder *Mitternachts*-Formel:

$$z_{2,3} = -\frac{6}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{6^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1} = -3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4} = -3 \pm i \tag{3}$$

- gemäß *quadratischer Ergänzung*:

$$0 = z^2 + 6z + 10 = (z+3)^2 + 1, \tag{4}$$

  also $(z+3)^2 = -1$, d.h. $z + 3 \in \{\pm i\}$.

Insgesamt ergeben sich die Lösungen 2, $-3+i$ und $-3-i$.

(c) [2 Punkte] Die Kurve, welche (1) darstellt, teilt die Ebene in zwei (zusammenhängende) Mengen, von denen eine beschränkt und eine unbeschränkt ist. Entscheiden Sie für jede der Lösungen der Gleichung (2), ob sie im Inneren der beschränkten der beiden Mengen liegt.

Lösung: Die Punkte im Inneren der durch (1) beschriebenen Ellipse sind genau diejenigen Punkte, welche

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$$

erfüllen. Für die Punkte 2, $-3+i$ und $-3-i$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} \frac{(2-1)^2}{9} + \frac{0^2}{4} & = & \frac{1}{9} < 1 & \Rightarrow \textbf{im Inneren} \\ \frac{-3-1)^2}{9} + \frac{1^2}{4} & = & \frac{16}{9} + \frac{1}{4} > 1 & \Rightarrow \textbf{außerhalb} \\ \frac{-3-1)^2}{9} + \frac{(-1)^2}{4} & = & \frac{16}{9} + \frac{1}{4} > 1 & \Rightarrow \textbf{außerhalb} \end{array}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Berechnen Sie

(a) [**3 Punkte**] das unbestimmte Integral $\int \frac{x}{\cosh^2(x)}\,dx$

Lösung: Mit partieller Integration und $\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cosh^2(x)}\,dx &= x\tanh(x) - \int \tanh(x)\,dx = x\tanh(x) - \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,dx \\ &= x\tanh(x) - \ln(\cosh(x)) + C.\end{aligned}$$

(b) [**3 Punkte**] das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$

Lösung: Per Definition des uneigentlichen Integrals:

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Die Substitution $y = \arctan(x)$ liefert für jedes $R > 0$:

$$\int_0^R \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\arctan(R)} y\,dy = \frac{\arctan(R)^2}{2}.$$

Für $R \to \infty$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{\arctan(R)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

(c) [**4 Punkte**] den Grenzwert $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\right)$

Lösung: Wir formen den Term $\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}$ zunächst um:

$$\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+\ln(x)}{(1-x)\ln(x)}$$

Mit zweimaliger Anwendung der Regel von l'Hopital ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} \frac{1-x+\ln(x)}{(1-x)\ln(x)} &= \lim_{x\to1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\ln(x)+\frac{1-x}{x}} = \lim_{x\to1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Eine Funktion $f\colon (-\varrho,\varrho)\to\mathbb{R}$ sei durch die Potenzreihe

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{3^n}x^n$$

gegeben.

(a) [**3 Punkte**] Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ dieser Potenzreihe.

Lösung: Mit der Formel für den Konvergenzradius ergibt sich

$$\varrho=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+3n+2}{3^n}}}=\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n+2}}=\frac{3}{1}=3.$$

Anmerkung: Dabei erhält man $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n+2}=1$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n+2}&=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\log(n^2+3n+2)}{n}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^2+3n+2)}{n}\right)\\&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+3}{n^2+3n+2}}{1}\right)=\exp(0)=1.\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Man könnte im vorliegenden Fall ϱ auch durch

$$\varrho=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+3n+2}{3^n}}{\frac{(n+1)^2+3(n+1)+2}{3^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)(n+2)}{3^n(n+2)(n+3)}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+3}=3$$

bestimmen.

(b) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie eine Potenzreihe F auf $(-\varrho,\varrho)$, die $F''=f$ auf $(-\varrho,\varrho)$ erfüllt.

Lösung: Für $x\in(-\varrho,\varrho)$ darf gliedweise integriert werden. Damit ergibt sich durch

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{n^2+3n+2}{3^n}x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n-1}}x^n$$

eine Stammfunktion von f und durch eine zusätzliche Integration

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{n+1}{3^{n-1}}x^n\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^{n-1}}=9\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=9\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

ein Kandidat für F. Da lineare und konstante Funktionen bei zweimaligem Ableiten verschwinden, dürfen wir für F jede Reihe der Form

$$F(x)=9\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n+ax+b,\quad a,b\in\mathbb{R},\tag{1}$$

wählen.

(c) [3 Punkte] Finden Sie mit Hilfe von (b) eine explizite Darstellung von f auf dem Intervall $(-\varrho, \varrho)$.

Lösung: Mit $a = b = 0$ in (1) erhalten wir, dass f die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = 9 \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{27}{3 - x}$$

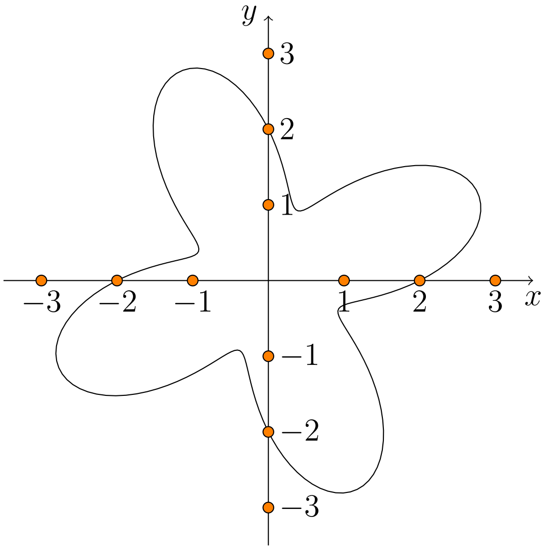
ist. Folglich ist

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{27}{3 - x}\right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{27}{(3 - x)^2}\right] = \frac{54}{(3 - x)^3}.$$

Aufgabe 4. Multiple-Choice-Aufgaben (10 Punkte)

Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt **2 Punkte**. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt **0 Punkte**.

1. Durch welche der folgenden Parametrisierungen wird die unten abgebildete Kurve



parametrisiert?

☐ $R(\phi) = 2 + \sin(2\phi),\ \phi \in \mathbb{R}$

Erklärung: Man kann dies z.B. durch Betrachten von $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ sehen. Da $\sin(2\phi) > 0$ für $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}$, sollte $R(\phi) > 2$ sein im 1. Quadranten. Dies ist bei der abgebildeten Kurve aber nicht der Fall.

☐ $R(\phi) = 2 + \cos(4\phi),\ \phi \in \mathbb{R}$

Erklärung: Man kann dies z.B. durch Betrachten von $\phi = 0$ sehen. Es müsste $R(0) = 3$ gelten. Dies ist bei der abgebildeten Kurve aber nicht der Fall.

■ $R(\phi) = 2 + \sin(4\phi),\ \phi \in \mathbb{R}$

☐ $R(\phi) = 2 + \cos(2\phi),\ \phi \in \mathbb{R}$

Erklärung: Man kann dies z.B. durch Betrachten von $\phi = 0$ sehen. Es müsste $R(0) = 3$ gelten. Dies ist bei der abgebildeten Kurve aber nicht der Fall.

2. Welche der folgenden Aussagen trifft auf die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = x,$$

zu?

- ☐ Jede Lösung konvergiert für $t \to \infty$ gegen einen (möglicherweise von der Lösung abhängenden) Wert.
- ☐ Alle Lösungen sind beschränkt.
- ■ Keine Lösung konvergiert für $t \to \infty$ gegen einen reellen Grenzwert.
- ☐ Es gibt eine Lösung, die für $t \to -\infty$ gegen einen reellen Grenzwert konvergiert.

Erklärung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + x$ (mit beliebigen $A, B \in \mathbb{R}$). Da Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkte Funktionen sind, gilt für **jede** Lösung y der Differentialgleichung:

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty. \tag{1}$$

3. Sei G eine Kugel in $\mathbb{R}^3$ und sei $S = \partial G$ der Rand von G. Dann gilt:

$$\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} \cdot d\vec{S} = \dots$$

- ■ $\iiint_G (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$
- ☐ $\iint_S \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix} d\vec{S}$
- ☐ $\iiint_G \left(\frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}z + \frac{z^2}{2}x\right) dx\, dy\, dz$
- ☐ $\int_{\partial S} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}$

Erklärung: Gemäß dem Satz von Gauß ist

$$\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} \cdot d\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} dx\, dy\, dz = \iiint_G (y + z + x)\; dx\, dy\, dz.$$

4. Der Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}(x, y) = (U(x, y), V(x, y))$ durch den Einheitskreis (nach außen) ist gleich der Zirkulation welchen Feldes entlang des (positiv orientierten) Einheitskreises?

- ☐ $(V(x,y), U(x,y))$
- ■ $(-V(x,y), U(x,y))$
- ☐ $(V(x,y), -U(x,y))$
- ☐ $(-V(x,y), -U(x,y))$

Erklärung: Der Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch den Einheitskreis K (nach außen) ist

$$\int_K \vec{F}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, ds = \int_K (xU(x,y) + yV(x,y)) \, ds. \tag{2}$$

Die Zirkulation eines Vektorfeldes $\vec{G}$ entlang des (positiv orientierten) Einheitskreises beträgt

$$\int_K \vec{G}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \, ds$$

Für $G = (-V, U)$ ergibt sich der gleiche Ausdruck wie in (2)

5. Die Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = \exp(x - y^2)$ sind

- ☐ Geraden
- ☐ Ellipsen
- ☐ Hyperbeln
- ■ Parabeln

Erklärung: Da die Exponentialfunktion injektiv ist, sind die Niveaulinien der Funktion f gerade die Mengen, die durch Gleichungen der Form $x - y^2 = c$ (mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$) gegeben sind. Diese Gleichungen beschreiben allesamt Parabeln.

Aufgabe 5. (12 Punkte)

In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt **3 Punkte**. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt **0 Punkte**.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

1. $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}}\int_{\boxed{-\sqrt{1-y}}}^{\boxed{\sqrt{1-y}}} f(x,y)\,dx\,dy$$

   Lösung: Es gilt:

   $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

2. Berechnen Sie die Arbeit W des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ entlang der Kurve

   $$\vec{r}(t) = ((2+\cos(t))\cos(t), (2+\cos(t))\sin(t)), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

   $$W = \boxed{\ln(2/3)}$$

   Lösung: Man bemerke, dass $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ für $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ gilt. Demnach ist

   $$\begin{aligned} W &= f(\vec{r}(\frac{\pi}{2})) - f(\vec{r}(0)) = f(0,2) - f(3,0) \\ &= \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(9)) = \boxed{\ln(2/3)} \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon (1,3) \to \mathbb{R}$

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-16}{\sin(x-2)}, & x \in (1,3) \setminus \{2\}, \\ c, & x = 2 \end{cases}$$

   stetig ist.

$$c = \boxed{32}$$

Lösung: Damit die Stetigkeit von f gewährleistet ist, muss c so gewählt werden, dass $c = \lim_{2\neq x\to 2} \frac{x^4-16}{\sin(x-2)}$ gilt. Wir haben gemäß der Regel von l'Hopital:

$$\lim_{2\neq x\to 2} \frac{x^4-16}{\sin(x-2)} = \lim_{2\neq x\to 2} \frac{4x^3}{\cos(x-2)} = 32, \tag{1}$$

also

$$c = \boxed{32}$$

Lösung: Alternativ: Unter Verwendung von $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ kann man wie folgt vorgehen:

$$\begin{aligned}
\lim_{2\neq x\to 2} \frac{x^4-16}{\sin(x-2)} &= \lim_{2\neq x\to 2} (x^2+4)(x+2)\frac{x-2}{\sin(x-2)} \\
&= \left[\lim_{2\neq x\to 2} (x^2+4)(x+2)\right]\left[\lim_{2\neq x\to 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)}\right] \\
&= 8\cdot 4\cdot 1 = 32.
\end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0.$$

$$y(x) = \boxed{e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

Lösung: Der Ansatz $e^{\lambda x}$ führt zur quadratischen Gleichung $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Diese hat die beiden Lösungen

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgeichung

$$y(x) = \boxed{e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert der Funktion f, gegeben durch

$$f(x,y,z) = 4xyz^2,$$

auf der Menge $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ 2x^2+y^2+z^2=1\}$.

Lösung: Gemäß der Lagrange-Multiplikatoren-Regel muss an einem kritischen Punkt der durch $f(x,y,z)=4xyz^2$ auf der durch $g(x,y,z)=1$ (mit $g(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2$) bestimmten Menge gelten:

$$\begin{pmatrix} 4yz^2 \\ 4xz^2 \\ 8xyz \end{pmatrix} = (\nabla f)(x,y,z) = \lambda(\nabla g)(x,y,z) = \lambda \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir unterscheiden die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$.

Im Fall $\underline{\lambda \neq 0}$ erhalten wir, dass x, y, z ebenfalls von 0 verschieden sind. Denn falls eine der drei Zahlen 0 ist, müssen auch die anderen beiden verschwinden, was mit der Bedingung $2x^2+y^2+z^2=1$ nicht vereinbar ist. Folglich darf in diesem Fall beliebig durch x, y oder z dividiert werden. Es ergibt sich damit bei Division der ersten Zeile in (1) durch die zweite:

$$\frac{y}{x} = \frac{4yz^2}{4xz^2} = \frac{4\lambda x}{2\lambda y} = \frac{2x}{y},$$

also $2x^2 = y^2$. Ferner erhalten wir:

$$\frac{z}{2y} = \frac{4xz^2}{8xyz} = \frac{2\lambda y}{2\lambda z} = \frac{y}{z},$$

also $2y^2 = z^2$. Eingesetzt in die Nebenbedingung $2x^2+y^2+z^2=1$ erhalten wir folglich

$$1 = 2x^2+y^2+z^2 = y^2+y^2+z^2 = 2y^2+z^2 = z^2+z^2 = 2z^2,$$

also $z^2 = \frac{1}{2}$. Es folgt, dass

$$y^2 = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad x^2 = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{8}.$$

Damit haben wir also schon einmal acht mögliche kritische Punkte (x,y,z) mit $x \in \{\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\}$, $y \in \{\pm\frac{1}{2}\}$ und $z \in \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Als mögliche Funktionswerte ergeben sich

$$\begin{aligned} f\Big(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) &= 4 \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ f\Big(-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) &= 4 \cdot \Big(-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{2}$$

Man bemerke, dass die restlichen Vorzeichenkombinationen ebenfalls einen dieser Werte als Funktionswert liefern.

Im Fall $\lambda = 0$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 4yz^2 \\ 4xz^2 \\ 8xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass die erste Gleichung in diesem Fall liefert, dass

$$f(x, y, z) = 4xyz^2 = x \cdot (4yz^2) = x \cdot 0 = 0$$

gilt. Vergleichen wir dies mit (2), so sehen wir, dass $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ der Maximalwert von f auf der Menge $\{g = 1\}$ und $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ der Minimalwert ist.

Alternative Lösung: Man hätte die Beziehung $z^2 = 1 - 2x^2 - y^2$ ausnutzen können, um das Problem als Suche nach Maximal- und Minimalwert der Funktion $g\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^d\colon 2x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $g(x, y) = 4xy(1 - 2x^2 - y^2)$ umzuformulieren. Dann muss man kritische Punkte im Inneren und auf dem Rand des Definitionsbereiches untersuchen.

Kritische Punkte im Inneren: Eine notwendige Bedingung für einen kritischen Punkt bei (x, y) mit $2x^2 + y^2 < 1$ (also im Inneren) ist $\nabla g(x, y) = 0$. Hierbei gilt:

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 4(y - y^3) - 24x^2y \\ 4(x - 2x^3) - 12xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y(1 - y^2 - 6x^2) \\ 4x(1 - 2x^2 - 3y^2) \end{pmatrix}.$$

Damit der Gradient verschwindet, muss also gelten:

$$\big(y = 0 \text{ oder } 1 - y^2 - 6x^2 = 0\big) \text{ und } \big(x = 0 \text{ oder } 1 - 2x^2 - 3y^2 = 0\big).$$

Wir unterscheiden zunächst die Fälle $x = 0$ und $x \neq 0$. Im Fall $x = 0$ muss $y = 0$ oder $1 - y^2 = 0$ sein. Da wir kritische Punkte im Inneren suchen, ist $1 - y^2 = 0$ in diesem Fall ausgeschlossen. Im Fall $x = 0$ finden wir also nur den kritischen Punkt $(0, 0)$ im Inneren. Im Fall $x \neq 0$ muss $1 - 2x^2 - 3y^2 = 0$ gelten. Außerdem muss $y = 0$ oder $1 - y^2 - 6x^2 = 0$ sein. $y = 0$ geht mit $1 - 2x^2 - 3y^2 = 0$ zusammen nicht, wenn (x, y) im Inneren liegen soll. D.h. im Fall $x \neq 0$ muss $1 - 2x^2 - 3y^2 = 0$ und $1 - y^2 - 6x^2 = 0$ gelten. Auflösen dieses Systems liefert $x^2 = \frac{1}{8}$ und $y^2 = \frac{1}{4}$. Folglich liefert der Fall $x \neq 0$ die vier kritischen Punkte $(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$ (mit allen möglichen Vorzeichenkombinationen).

Die Funktionswerte zu den gefundenen fünf kritischen Punkten im Inneren sind:

$$g(0,0) = 0,$$

$$g(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}) = g(-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{2}) = 4 \cdot (\tfrac{1}{2\sqrt{2}}) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big(1 - 2 \cdot (\tfrac{1}{2\sqrt{2}})^8 - (\tfrac{1}{2})^2\Big) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$
$$g(-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}) = g(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{2}) = 4 \cdot (-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Big(1 - 2 \cdot (-\tfrac{1}{2\sqrt{2}})^8 - (\tfrac{1}{2})^2\Big) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

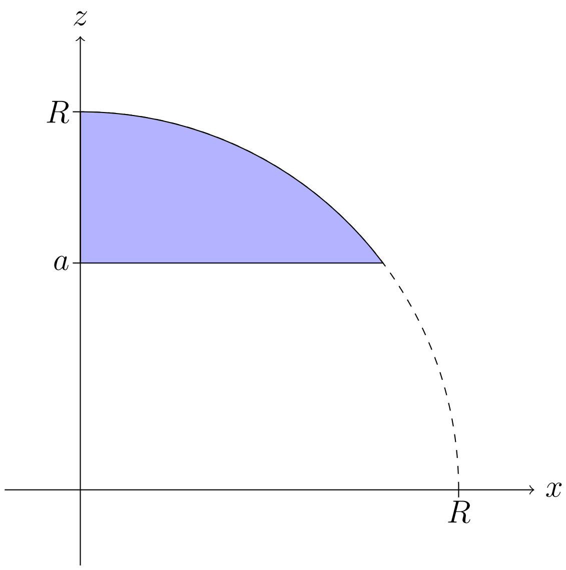
Kritische Punkte auf dem Rand: Für Randpunkte gilt $2x^2 + y^2 = 1$, sodass $g(x,y) = 0$ ist. Folglich können Maximum und Minimum nicht am Rand angenommen werden. Der Maximalwert ist demnach $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, der Minimalwert $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Es sei für $0 < a < R$

$$K_{R,a} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\quad x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge a\right\}$$

der Rotationskörper, der bei Drehung der unten abgebildeten Fläche um die z-Achse entsteht.



(a) [**7 Punkte**] Es sei $I_{R,a}$ das Trägheitsmoment von $K_{R,a}$ bei Rotation um die z-Achse in Abhängigkeit von R und a. Wir nehmen dabei an, dass die Dichtefunktion konstant gleich 1 ist.
Finden Sie eine explizite Formel für $I_{R,a}$ in Abhängigkeit von R und a.

Lösung: Bekanntlich berechnet sich das Trägheitsmoment $I_{R,a}$ aus der Formel

$$I_{R,a} = \iiint_{K_{R,a}} \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy\, dz$$

In Zylinderkoordinaten erhält man

$$\begin{aligned}
I_{R,a} &= \int_a^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^2 \cdot r\, dr\, d\phi\, dz = 2\pi \int_a^R \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_a^R (R^2 - z^2)^2\, dz = \frac{\pi}{2} \int_a^R \left(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4\right) dz \\
&= \frac{\pi}{2} \left[R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5\right]_{z=a}^{z=R} = \frac{\pi}{2} \left(R^4(R-a) - \frac{2}{3} R^2 (R^3 - a^3) + \frac{1}{5}(R^5 - a^5)\right) \\
&= \pi \left\{\frac{4}{15} R^5 - \frac{1}{2} a R^4 + \frac{1}{3} a^3 R^2 - \frac{1}{10} a^5\right\}.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Das Integral in Zylinderkoordinaten kann auch mit einer anderen Integrationsreihenfolge berechnet werden:

$$\begin{aligned}
I_{R,a} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-a^2}}\int_a^{\sqrt{R^2-r^2}} r^2\,dz\,r\,dr\,d\phi = 2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-a^2}}\left[r^2 z\right]_{z=a}^{z=\sqrt{R^2-r^2}} r\,dr\\
&= \pi\int_0^{\sqrt{R^2-a^2}} r^2\left(\sqrt{R^2-r^2}-a\right)\cdot(2r)\,dr = \pi\int_0^{R^2-a^2} t\left(\sqrt{R^2-t}-a\right)dt\\
&= \pi\left\{\int_0^{R^2-a^2} t\sqrt{R^2-t}\,dt - \left[\frac{at^2}{2}\right]_{t=0}^{t=R^2-a^2}\right\}\\
&= \pi\Bigg\{\underbrace{\left[t\left(-\frac{2}{3}(R^2-t)^{3/2}\right)\right]_{t=0}^{t=R^2-a^2}}_{=-\frac{2}{3}a^3(R^2-a^2)} + \int_0^{R^2-a^2}\frac{2}{3}(R^2-t)^{3/2}\,dt - \frac{a(R^2-a^2)^2}{2}\Bigg\}\\
&= \pi\Bigg\{-\frac{2}{3}a^3(R^2-a^2) + \underbrace{\left[-\frac{4}{15}(R^2-t)^{5/2}\right]_{t=0}^{t=R^2-a^2}}_{=\frac{4}{15}(R^5-a^5)} - \frac{a(R^2-a^2)^2}{2}\Bigg\}\\
&= \pi\left\{-\frac{2}{3}a^3(R^2-a^2) + \frac{4}{15}R^5 - \frac{4}{15}a^5 - \frac{1}{2}a(R^2-a^2)^2\right\}\\
&= \pi\left\{\frac{4}{15}R^5 - \frac{1}{2}aR^4 + \frac{1}{3}a^3R^2 - \frac{1}{10}a^5\right\}.
\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Das Trägheitsmoment kann ebenfalls unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechnet werden.

$$\begin{aligned}
I_{R,a} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(a/R)}\int_{\frac{a}{\cos(\theta)}}^{R} r^2\sin^2(\theta)\cdot r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(a/R)}\int_{\frac{a}{\cos(\theta)}}^{R} r^4\,dr\,\sin^3(\theta)\,d\theta\,d\phi\\
&= 2\pi\int_0^{\arccos(a/R)}\frac{R^5-\frac{a^5}{\cos^5(\theta)}}{5}\sin^3(\theta)\,d\theta\\
&= \frac{2\pi R^5}{5}\left[\frac{\cos(3\theta)-9\cos(\theta)}{12}\right]_{\theta=0}^{\theta=\arccos(a/R)} - \frac{2\pi a^5}{20}\left[\tan^4(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\arccos(a/R)}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$\frac{\sin^3(\theta)}{\cos^5(\theta)} = \tan^3(\theta)\cdot\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \tan^3(\theta)\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\tan(\theta)\right] = \frac{1}{4}\frac{d}{d\theta}\left[\tan^4(\theta)\right].$$

ist. Weiter verwenden wir, dass

$$\cos\Big(\arccos(\tfrac{a}{R})\Big) = \frac{a}{R} \qquad \text{und} \qquad \sin^2\Big(\arccos(\tfrac{a}{R})\Big) = 1-\frac{a^2}{R^2}$$

gilt, und ordnen Terme:

$$
\begin{aligned}
I_{R,a} &= \frac{2\pi R^5}{5}\left[\frac{\cos(3\theta)-9\cos(\theta)}{12}\right]_{\theta=0}^{\theta=\arccos(a/R)} - \frac{\pi a^5}{10}\frac{(1-a^2/R^2)^2}{a^4/R^4} \\
&= \frac{\pi R^5}{30}\left[\cos^3(\theta)-3\sin^2(\theta)\cos(\theta)-9\cos(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\arccos(a/R)} - \frac{\pi R^5}{10}\frac{a}{R}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2 \\
&= \frac{\pi R^5}{30}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{R}\right)\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right) - 9\frac{a}{R} + 8 - 3\left(\frac{a}{R}\right)\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{\pi}{30}\left[R^2a^3 - 3R^2a(R^2-a^2) - 9R^4a + 8R^5 - 3a(R^2-a^2)^2\right] \\
&= \frac{\pi}{30}\left[8R^5 - 15aR^4 + 10a^3R^2 - 3a^5\right].
\end{aligned}
$$

(b) **[3 Punkte]** Finden Sie a_1, a_2, R_1, R_2, sodass das Trägheitsmoment I_K von

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2+(z+2)^2 \le 25 \text{ und } x^2+y^2+(z-10)^2 \le 121\right\}$$

bei Rotation um die z-Achse als

$$I_K = I_{a_1,R_1} + I_{a_2,R_2} \tag{1}$$

geschrieben werden kann. Gehen Sie davon aus, dass die Dichtefunktion gleich 1 ist.

Tipp zu (b): Machen Sie sich klar, wie K aussieht und verwenden Sie (a). Sie brauchen keinen numerischen Wert für I_K auszurechnen, sobald Sie a_1, a_2, R_1, R_2 gefunden haben, sind Sie fertig.

Lösung: K ist die Schnittmenge zweier Kugeln, nämlich der Kugel mit Mittelpunkt $(0,0,-2)$ und Radius 5 sowie der Kugel mit Mittelpunkt $(0,0,10)$ und Radius 11. Die beiden Kugeln schneiden sich in einer Ebene parallel zur xy-Ebene. Diese kann man bestimmen durch Subtraktion der Gleichung $x^2+y^2+(z+2)^2 = 25$ von der Gleichung $x^2+y^2+(z-10)^2 = 121$:

$$96 = (z-10)^2 - (z+2)^2 = -12(2z-8).$$

Es folgt $z = 0$. Zerschneidet man nun K entlang der Ebene $z = 0$, so zerfällt K in zwei Teile, die wie verschobene bzw. gespiegelte Versionen der Körper $K_{a,R}$ aus Aufgabenteil (a) aussehen. Der obere Teil

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+(z+2)^2 \le 25,\ z \ge 0\right\}$$

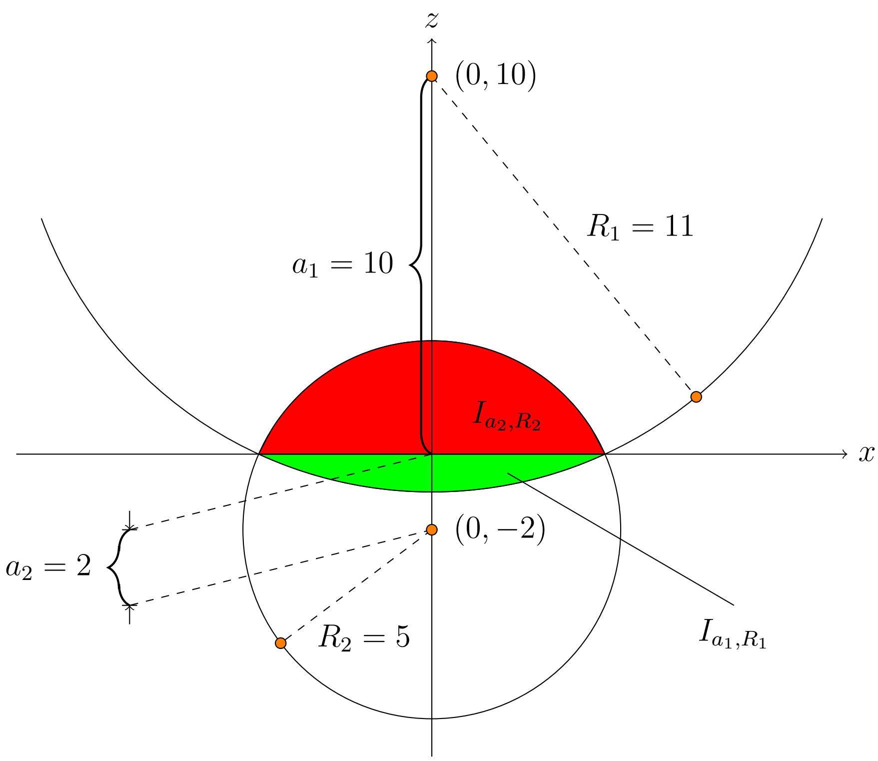
ist eine parallel zur z-Achse verschobene Version von $K_{2,5}$, der untere Teil

$$\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2+(z-10)^2\le 121,\ \ z\le 0\Big\}$$

ist eine an der xy-Ebene gespiegelte und parallel zur z-Achse verschobene Version von $K_{10,11}$. Für die Berechnung des Trägheitmoments bei Rotation um die z-Achse spielen Verschiebungen parallel zur x-Achse und Spiegelungen an der xy-Ebene keine Rolle. Daher erhalten wir das Trägheitsmoment von K als Summe der Trägheitsmomente von $K_{2,5}$ und $K_{10,11}$:

$$I_K = I_{10,11} + I_{2,5}.$$

Im beigefügten Bild wurde die Bezeichnung $(a_1,R_1)=(10,11)$, $(a_2,R_2)=(2,5)$ gewählt.



Aufgabe 8. (10 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

wobei

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^y \\ e^y x + \sin(z) \\ y^2x^2 \end{pmatrix}$$

und

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4,\ y \geq 2\right\}.$$

Dabei soll S so orientiert sein, dass der Normalenvektor immer eine nicht-negative y-Komponente hat.

Lösung: Nach dem Satz von Stokes gleicht der Fluss der Rotation von $\vec{F}$ durch S der Zirkulation von $\vec{F}$ entlang des Randes von S (mit der entsprechenden Orientierung). Der Rand von S ist der Kreis gegeben durch die Bedingungen $x^2 + z^2 = 4$, $y = 2$. Eine Parametrisierung mit der korrekten Orientierung ist

$$\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2, -2\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\sin(t)e^2 \\ e^2 \cdot 2\cos(t) + \sin(-2\sin(t)) \\ 4 \cdot 4\cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 0 \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= 4e^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt}_{=\pi} - 32 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\, dt}_{=0} = 4e^2\pi.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\, dt = 0$ aufgrund von $\cos(x) = -\cos(\pi + x)$.

Alternative Lösung: Nach dem Satz von Stokes gleicht der Fluss der Rotation von $\vec{F}$ durch S dem Fluss der Rotation von $\vec{F}$ durch die Kreisscheibe $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + z^2 < 4, y = 2\}$. Die Orientierung von D stimmt mit derjenigen von S überein, soll heißen: als Normalenvektor wird $(0,1,0)$ gewählt. Für die Rotation ergibt sich:

$$\operatorname{rot}(\vec{F})(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dots \\ e^y - 2xy^2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{D} &= \iint_D \begin{pmatrix} \dots \\ e^y - 2xy^2 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dA \\ &= \iint_D (e^2 - 8x)\, dA = \iint_D e^2\, dA = 4\pi e^2,\end{aligned}$$

wobei hier verwendet wurde, dass aus Symmetriegründen $\iint_D x\, dA = 0$ gilt, und, dass $\iint_D 1\, dA = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$, da D eine Kreisscheibe mit Radius 2 ist.

Aufgabe 9. (10 Punkte) Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$y''(x) + 2ay'(x) + ay(x) = 0. \tag{1}$$

(a) [**3 Punkte**] Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + 2a\lambda + a$. Damit ergeben sich als Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - a}.$$

(b) [**5 Punkte**] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (1).

Tipp zu (b): Unterscheiden Sie verschiedene Fälle für a.

Lösung: Für $a \in \{0, 1\}$ hat man doppelte Nullstellen (0 bzw. -1), für $a \in (0, 1)$ hat man die zwei komplex konjugierten Nullstellen $-a \pm i\sqrt{a - a^2}$ und für $a \notin [0, 1]$ hat man die zwei verschiedenen reellen Nullstellen $-a \pm \sqrt{a^2 - a}$. Damit erhält man für die allgemeine Lösung:

- $\underline{a = 0:}$ $y(x) = A + Bx$, $A, B \in \mathbb{R}$,
- $\underline{a = 1:}$ $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$,
- $\underline{a \in (0, 1):}$ $y(x) = e^{-ax}\left(A\cos\left(x\sqrt{a - a^2}\right) + B\sin\left(x\sqrt{a - a^2}\right)\right)$, $A, B \in \mathbb{R}$
- $\underline{a < 0 \text{ oder } a > 1:}$ $y(x) = Ae^{(-a+\sqrt{a^2-a})x} + Be^{(-a-\sqrt{a^2-a})x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

(c) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und eine Störfunktion $g(x)$, sodass

$$y(x) = Ae^{-\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{2}x) + Be^{-\frac{1}{2}}\sin(\tfrac{1}{2}x) + \cos(3x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung von

$$y''(x) + 2ay'(x) + ay(x) = g(x)$$

ist.

Lösung: Dadurch, dass die allgemeine Lösung als

$$Ae^{-\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{2}x) + Be^{-\frac{1}{2}}\sin(\tfrac{1}{2}x) + \cos(3x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, folgt, dass

$$Ae^{-\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{2}x) + Be^{-\frac{1}{2}}\sin(\tfrac{1}{2}x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und $\cos(3x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Es folgt, dass $a = \frac{1}{2}$ sein muss. Einsetzen zeigt, dass

$$g(x) = -9\cos(3x) - 3\sin(3x) + \frac{1}{2}\cos(3x).$$