Name: _________________ Legi: _________________

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG
Lösung Januar 2020

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Menge

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq |z+1|\}.$$

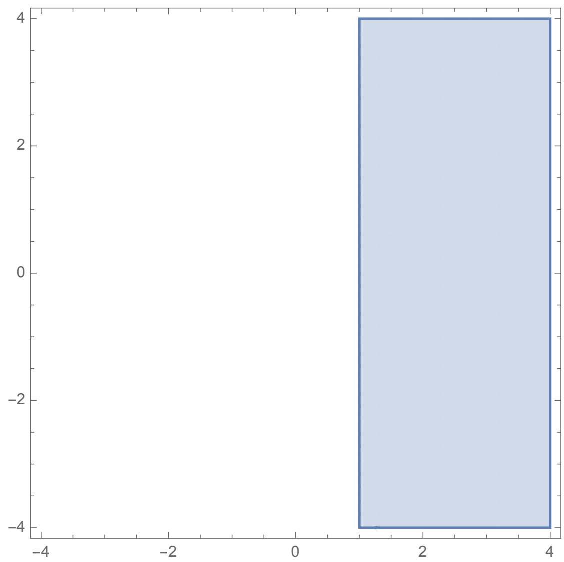
in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Lösung: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |z-3| \leq |z+1| \\ \iff\ & |(x-3)+iy|^2 \leq |(x+1)+iy|^2 \\ \iff\ & (x-3)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2 \\ \iff\ & x^2 - 6x + 9 \leq x^2 + 2x + 1 \\ \iff\ & -8x \leq -8 \\ \iff\ & x \geq 1. \end{aligned}$$

Daher ist

$$B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geq 1\}.$$



b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z + 10.$$

Hinweis: Versuchen Sie eine rein imaginäre Lösung zu finden!

Lösung: Wir beherzigen den Hinweis und setzen i in das Polynom ein, und erhalten

$$p(i) = 1 + 6i - 11 - 6i + 10 = 0.$$

Somit ist i eine Nullstelle. Weil $p(z)$ reelle Koeffizienten hat, ist für jede Nullstelle z_0 auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von $p(z)$. In diesem Fall ist also auch $-i$ eine Nullstelle von $p(z)$. Wir können also

$$p(z) = (z + i) \cdot (z - i) \cdot q(z) = (z^2 + 1) \cdot q(z)$$

schreiben, wobei $q(z)$ ein Polynom von Grad 2 ist. Wir erhalten $q(z)$ durch Polynomdivision

$$q(z) = p(z) : (z^2 + 1) = (z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z + 10) : (z^2 + 1) = z^2 - 6z + 10.$$

Nach der Mitternachtsformel sind die Nullstellen von $q(z)$ gegeben durch

$$\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 10} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i,$$

sodass

$$q(z) = (z - (3 + i))(z - (3 - i)).$$

Insgesamt gilt also

$$p(z) = (z - i)(z + i)q(z) = (z - i)(z + i)(z - (3 + i))(z - (3 - i)),$$

sodass die Nullstellen $\{i, -i, 3 + i, 3 - i\}$ sind.

c) (2 Punkte) Welche Nullstellen von $p(z)$ liegen in der Menge B?

Hinweis: Verwenden Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabenteil **a)**.

Lösung: Die Nullstellen $\{3 + i, 3 - i\}$ liegen in B, da nur diese Realteil grösser als 1 haben.

2. (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

Name: _________________ Legi: __________________

a) (3 Punkte)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x)-1}{\cos(x)-1}$$

Lösung: Wir wenden die Regel von de L'Hospital zweimal an:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x)-1}{\cos(x)-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sinh(2x)}{-\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\cosh(2x)}{-\cos(x)} = -4\end{aligned}$$

b) (3 Punkte)

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \Big(2x\cdot\cos(x^2)\Big)\cdot x + \sin(x^2)\, dx$$

Lösung: Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int (2x)\cdot\cos(x^2)\cdot x\,\mathrm{d}x = \sin(x^2)\cdot x - \int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\int \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x + x\cdot\sin(x^2) - \int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= x\cdot\sin(x^2) + \text{const.}\end{aligned}$$

Mit den gegebenen Grenzen ergibt sich

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)\, dx = \big[x\sin(x^2)\big]_{x=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}.$$

c) (4 Punkte)

$$\int \frac{\pi x^2 - 6\pi x + 7x + 9\pi}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,\mathrm{d}x$$

Lösung: Wir berechnen zunächst die Partialbruchzerlegung. Dazu betrachten wir das Polynom im Nenner

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9).$$

Offenbar ist $x = 0$ eine Nullstelle. Mit der Mitternachtsformel ergeben sich die anderen beiden Nullstellen zu

$$3 \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 9} = 3.$$

Also hat der Nenner eine einfache Nullstelle bei 0 und eine doppelte Nullstelle bei 3. Wir wählen daher den folgenden Ansatz und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\pi x^2 - 6\pi x + 7x + 9\pi}{x^3 - 6x^2 + 9x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \\
&= \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x^3 - 6x^2 + 9x} \\
&= \frac{(A+B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A}{x^3 - 6x^2 + 9x}
\end{aligned}$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}$. Koeffizientenvergleich ergibt, dass $A = \pi$, $B = 0$ und $C = 7$ gelten muss.

Wir können nun das Integral leicht berechnen

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\pi x^2 - 6\pi x + 7x + 9\pi}{x^3 - 6x^2 + 9x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\pi}{x} + \frac{7}{(x-3)^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \ln|x| - \frac{7}{x-3} + \text{const.}
\end{aligned}$$

Name: _________________ Legi: __________________

3. (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{\pi^n} x^n.$$

Lösung: Der Konvergenzradius ρ ist gegeben durch

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+3n+2}{\pi^n}}{\frac{(n+1)^2+3(n+1)+2}{\pi^{n+1}}} = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2} = \pi.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Potenzreihe F auf $(-\rho, \rho)$, die $F'' = f$ auf $(-\rho, \rho)$ erfüllt.

Lösung: Um $F(x)$ zu erhalten, integrieren wir die Potenzreihe $f(x)$ zweimal gliedweise. Dieses Vorgehen ist zulässig nach Satz 13 aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} g(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n}^{\infty} \int \frac{n^2 + 3n + 2}{\pi^n} x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{\pi^n (n+1)} x^{n+1} + B, \end{aligned}$$

für eine Konstante $B \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n^2 + 3n + 2}{\pi^n (n+1)} x^{n+1} + B \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{\pi^n (n+1)(n+2)} x^{n+2} + Bx + A \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{\pi^n (n^2 + 3n + 2)} x^{n+2} + Bx + A \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} x^{n+2} + Bx + A \\ &= \pi^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{n+2} + Bx + A, \end{aligned}$$

für eine Konstante $A \in \mathbb{R}$.

c) **(4 Punkte)** Finden Sie mittels **b)** eine explizite Darstellung von f auf $(-\rho, \rho)$.

Hinweis: Sie können die ersten beiden Glieder der Potenzreihe F beliebig wählen.

Lösung: In **b)** können wir $B = \pi$ und $A = \pi^2$ setzen, sodass

$$\begin{aligned} F(x) &= \pi^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{n+2} + Bx + A \\ &= \pi^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{n+2} + \pi^2 \left(\frac{x}{\pi}\right)^1 + \pi^2 \left(\frac{x}{\pi}\right)^0 \\ &= \pi^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi}\right)^n = \frac{\pi^2}{1 - \frac{x}{\pi}} = \frac{\pi^3}{\pi - x} \end{aligned}$$

gilt. Wir erhalten $f(x)$, indem wir $F(x)$ zweimal ableiten. Wir erhalten also

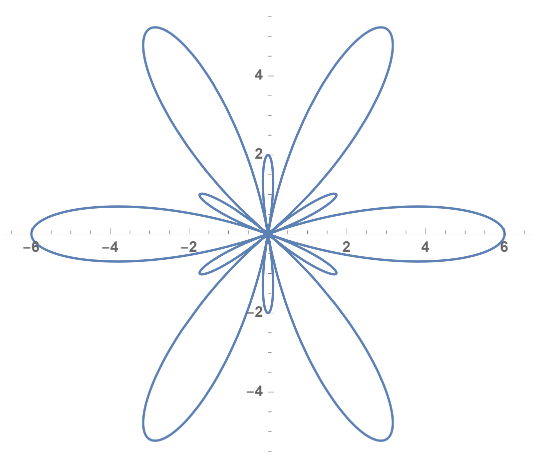
$$f(x) = F''(x) = \frac{2\pi^3}{(\pi - x)^3}.$$

Name: _________________ Legi: __________________

4. Multiple-Choice (10 Punkte): Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

a) Welche Parametrisierung in Polarkoordinaten beschreibt die folgende Kurve?



(A) ✗

$$R(\varphi) = 2 + 4\cos(12\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(B) ✗

$$R(\varphi) = 4 + 2\cos(6\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(C) ✓

$$R(\varphi) = 2 + 4\cos(6\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(D) ✗

$$R(\varphi) = 4 + 2\cos(12\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Lösung: Bei $R(\varphi) = 4+2\cos(6\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$, und $R(\varphi) = 4+2\cos(12\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$, wird $R(\varphi)$ niemals 0, wie in der Abbildung. In den anderen Fällen sind die Minima und Maxima von $R(\varphi)$ jeweils -2 und 6. Die grossen Schlaufen korrespondieren zu den Maxima. In der Abbildung gibt es 6 grosse Schlaufen und nicht 12, sodass

$$R(\varphi) = 2 + 4\cos(6\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

b) Wir betrachten $B_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$ für $a > 0$. Dann gilt

$$\iiint_{B_a} e^{-\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \, \mathrm{d}V = \ldots$$

(A) ✗ $\frac{4\pi}{3} e^{-a^3}$

(B) ✗ $\pi \left(e^{-a^3} - 1\right)$

(C) ✗ $\pi \left(1 - e^{-a^3}\right)$

(D) ✓ $\frac{4\pi}{3} \left(1 - e^{-a^3}\right)$

Lösung: Wir verwenden Kugelkoordinaten und berechnen

$$\begin{aligned}
\iiint_{B_a} e^{-(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \, \mathrm{d}V &= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-r^3} \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^a \int_0^\pi e^{-r^3} \cdot (3r^2) \cdot \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^a e^{-r^3} \cdot (3r^2) \cdot \underbrace{[-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi}}_{=2} \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{3} \int_0^a e^{-r^3} \cdot (3r^2) \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{3} \left[-e^{-r^3}\right]_{r=0}^{a} \\
&= \frac{4\pi}{3} \left(1 - e^{-a^3}\right)
\end{aligned}$$

c) Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = (x, y^2, z^3)$. Was gilt dann für den Fluss

$$\Phi = \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{n}$$

des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Kreisscheibe

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y^2 + z^2 \le 1\}$$

in positiver x-Richtung?

(A) ✓ $\Phi > 0$

(B) ✗ $\Phi = 0$

(C) ✗ $\Phi < 0$

(D) ✗ Es gibt nicht genügend Informationen, um das zu beantworten.

Lösung: Der Normalenvektor in positiver x-Richtung auf D ist gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher berechnen wir

$$\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iint_D \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dA = \iint_D \underbrace{x}_{=1} \, dA = \pi^2 > 0.$$

d) Sei $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Welche Identität gilt **nicht** immer?

(A) ✓ $\mathrm{grad}(\mathrm{div}(\vec{F})) = 0$.

(B) ✗ $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{F})) = 0$.

(C) ✗ $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$.

(D) ✗ Jede der obigen Identitäten gilt unabhängig von der Wahl von $\vec{F}$ und f.

Lösung: Wie aus der Vorlesung bekannt ist, gilt $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{F})) = 0$ und $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ immer.
Betrachtet man jedoch

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so berechnet man

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = 2x,$$

und

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}(\vec{F})) = \mathrm{grad}(2x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

e) Für welche der folgenden Funktionen $u(x)$ ist es **unmöglich** Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ zu wählen, sodass $u(x)$ und e^{2x} beides Lösungen der folgenden Differentialgleichung sind?

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

(A) ✗ $u(x) = e^{-x}$

(B) ✓ $u(x) = \cos(x)$

(C) ✗ $u(x) = \cosh(2x)$

(D) ✗ $u(x) = xe^{2x}$

Lösung: Das charakteristische Polynom obiger Differentialgleichung ist

$$\mathrm{Ch}(X) = X^2 + aX + b.$$

Weil e^{2x} eine Lösung der Differentialgleichung sein soll, wissen wir dass $X = 2$ eine Nullstelle von $\mathrm{Ch}(X)$ ist.

Wäre $u(x) = \cos(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, dann wäre auch $X = i$ eine Nullstelle von $\mathrm{Ch}(X)$. Weil $\mathrm{Ch}(X)$ nur reelle Koeffizienten hat, wäre dann aber auch $X = -i$ eine Nullstelle von $\mathrm{Ch}(X)$. Jedoch ist $\mathrm{Ch}(X)$ ein Polynom vom Grad 2 und kann deshalb nicht mehr als 2 Nullstellen haben. Widerspruch!

5. (12 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Die reellen Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllen $(A + i\,B)^{87} = 6020 + 4090\,i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie

$$\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (A - i\,B)^{87}$$

in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{2045 + i\,3010}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (A - iB)^{87} &= \frac{i}{2} \overline{A + iB}^{87} \\ &= \frac{i}{2}(6020 - 4090\,i) \\ &= 2045 + i\,3010. \end{aligned}$$

b) Sei $F(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + z^2$ und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 7\}$. Finden Sie eine Beschreibung der Tangentialebene von S am Punkt $(1, 1, 3) \in S$ in der Form

$$2x + By + Cz = D$$

für $B, C, D \in \mathbb{R}$.

$$B = \boxed{-6} \quad C = \boxed{6} \quad D = \boxed{14}$$

Lösung: Zunächst berechnen wir die Ableitungen

$$F_x(x, y, z) = 2x,\ F_y(x, y, z) = -6y,\ F_z(x, y, z) = 2z.$$

Nach Satz 77 im Skript ist die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, 1, 3)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(1, 1, 3) \cdot (x - 1) + F_y(1, 1, 3) \cdot (y - 1) + F_z(1, 1, 3) \cdot (z - 3) \\ &= 2 \cdot (x - 1) - 6 \cdot (y - 1) + 6 \cdot (z - 3) \\ &= 2x - 2 - 6y + 6 + 6z - 18 \\ &= 2x - 6y + 6z - 14. \end{aligned}$$

Beziehungsweise

$$2x - 6y + 6z = 14.$$

c) Sei $\vec{F}(x, y) = (3x + \pi, 2y + \pi^2)$ ein Vektorfeld und $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis.
Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch K nach aussen:

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{n} = \boxed{5\pi}$$

Lösung: Wenden wir den Satz von Green auf die Einheitskreisscheibe D an, so ergibt sich

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{n} = \iint_D U_x + V_y \, \mathrm{d}A = \iint_D 5 \, \mathrm{d}A = 5\pi$$

d) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos(x)}^1 f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^{\boxed{1}} \int_{\boxed{\arccos(y)}}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Lösung: Wir integrieren über die Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \cos(x) \le y \le 1\}$. Weil $\cos(x)$ auf dem Interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton fallend ist, ist die Ungleichung $\cos(x) \le y$ äquivalent zu $x \ge \arccos(y)$. Daher können wir die Menge D auch wie folgt schreiben $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \arccos(y) \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le 1\}$. Damit gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos(x)}^1 f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\arccos(y)}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

6. (10 Punkte) Bestimmen Sie die Maximal- und Minimalstellen der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + 9y^2 + 25z^2$$

auf der Menge

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

und die zugehörigen Funktionswerte.

Lösung: Wir wollen Lagrange-Multiplikatoren verwenden. Dazu berechnen wir

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 18y, 50z),$$
$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Lokale Extrema von f auf D müssen daher das Gleichungssystem

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z),$$
$$g(x, y, z) = 1,$$

erfüllen. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x &= \lambda x, \\ 9y &= \lambda y, \\ 25z &= \lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Die ersten drei Gleichungen sehen sehr danach aus, dass man leicht λ bestimmen kann, wenn man jeweils durch x, y oder z teilt. Dieses Vorgehen ist jedoch jeweils nur zulässig, wenn $x \neq 0$ *oder* $y \neq 0$ *oder* $z \neq 0$!

Wir müssen daher eine *vollständige* Fallunterscheidung machen. Wie bereits erläutert, wollen wir einmal annehmen, dass $x \neq 0$ *oder* $y \neq 0$ *oder* $z \neq 0$. Diese Annahme ist jedoch *unbegründet* und folgt nicht apriori aus dem Gleichungssystem. Daher müssen wir auch das Gegenteil annehmen, um wirklich *alle* Fälle abzudecken. Die gegenteilige Annahme von "$x \neq 0$ *oder* $y \neq 0$ *oder* $z \neq 0$" ist: "$x = 0$ *und* $y = 0$ *und* $z = 0$".

Wir erhalten also folgende beiden Fälle, die wir unterscheiden:

(i) $x = 0$ *und* $y = 0$ *und* $z = 0$;

(ii) $x \neq 0$ *oder* $y \neq 0$ *oder* $z \neq 0$.

Wir beginnen mit Fall (i). Wenn $x = y = z = 0$, dann gilt $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, was der letzten Gleichung unseres Systems widerspricht. Wir können also nicht in Fall (i) sein.

Nun zu Fall (ii): Hier machen wir eine weitere Fallunterscheidung je nach dem ob $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ oder $z \neq 0$, wobei wir jeweils zunächst λ bestimmen; das war schliesslich unser Grund die obige Fallunterscheidung durchzuführen!

(a) Angenommen $x \neq 0$: Dividieren durch x in der ersten Gleichung ergibt dann $\lambda = 1$. Mit den anderen Gleichungen folgt daraus, dass $y = z = 0$ und $x = \pm 1$. Einsetzen in f ergibt

$$f(1, 0, 0) = f(-1, 0, 0) = 1.$$

(b) Angenommen $y \neq 0$: Dividieren durch y in der zweiten Gleichung ergibt dann $\lambda = 9$. Mit den anderen Gleichungen folgt daraus, dass $x = z = 0$ und $y = \pm 1$. Einsetzen in f ergibt

$$f(0, 1, 0) = f(0, -1, 0) = 9.$$

(c) Angenommen $z \neq 0$: Dividieren durch z in der dritten Gleichung ergibt dann $\lambda = 25$. Mit den anderen Gleichungen folgt daraus, dass $x = y = 0$ und $z = \pm 1$. Einsetzen in f ergibt

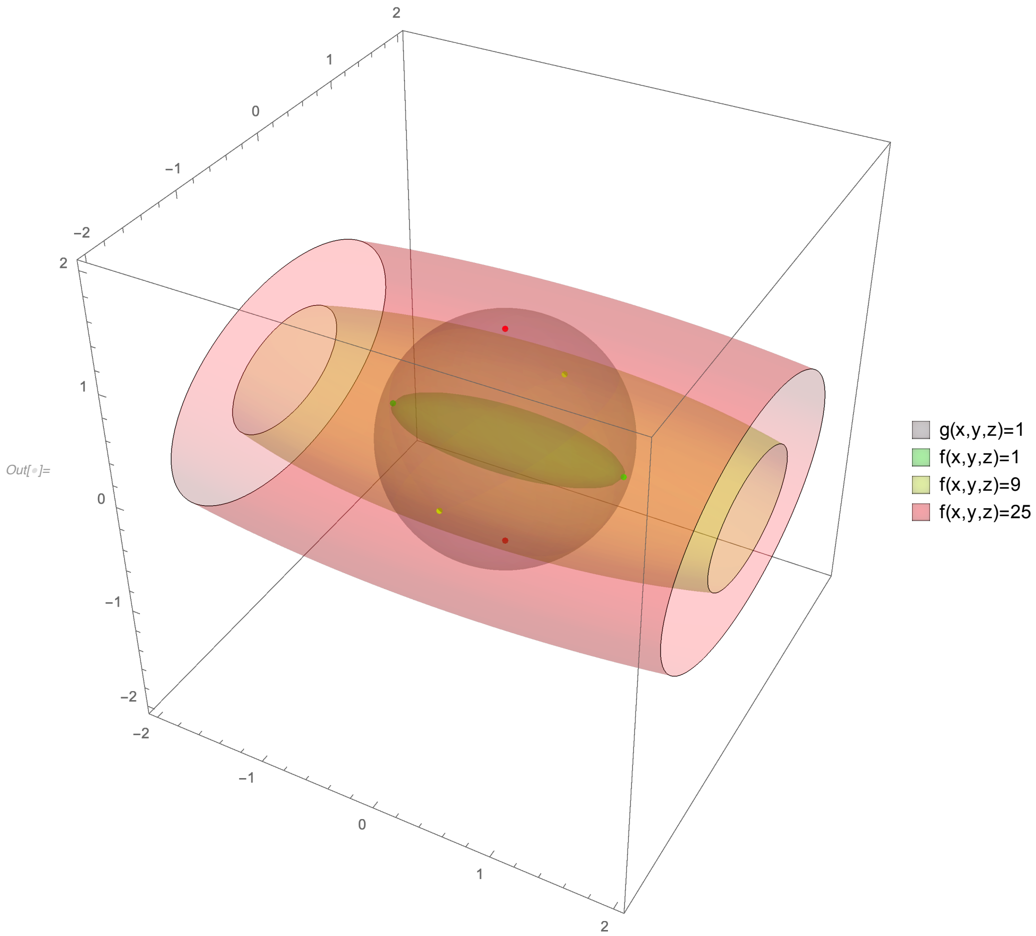
$$f(0, 0, 1) = f(0, 0, -1) = 25.$$

Damit ist unsere *vollständige* Fallunterscheidung abgeschlossen, und ausschliesslich die aufgeführten Stellen sind mögliche Extremstellen.

Vergleicht man die Funktionswerte so sieht man, dass die Funktion f auf der Menge $\boldsymbol{D}$ an den Stellen $(1, 0, 0)$ und $(-1, 0, 0)$ globale Minima besitzt, und an den Stellen $(0, 0, 1)$ und $(0, 0, -1)$ globale Maxima besitzt.

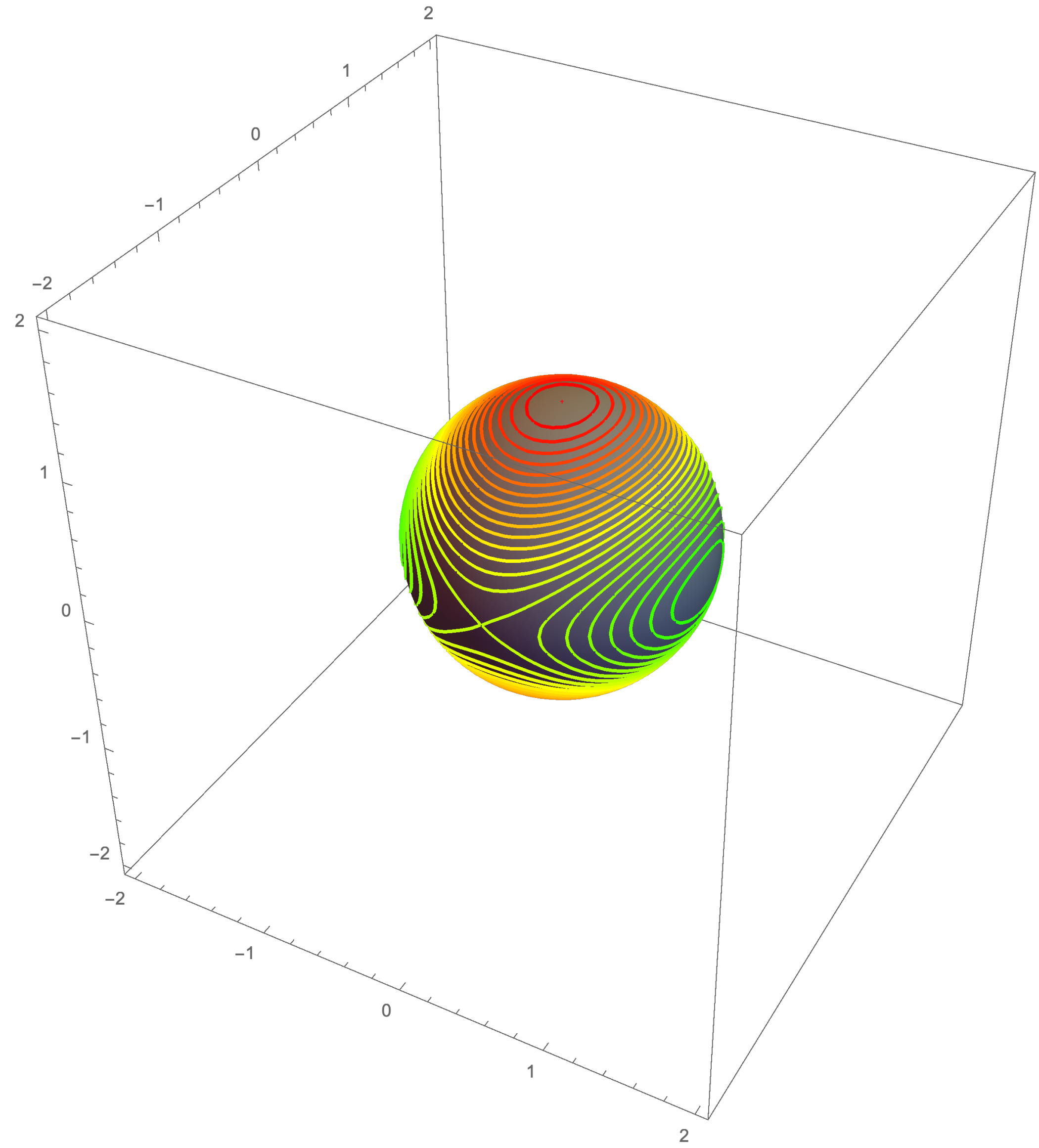
Anmerkung:

Man kann diese Lösungen auch geometrisch sehen. Die Niveaulinien $f(x, y, z) = x^2 + 9y^2 + 25z^2 = w$ beschreiben Ellipsoide, wobei die Hauptachsen die x-Achse, y-Achse und z-Achse sind. Es gibt verschiedene Stellen auf der Sphäre $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, an welchen diese Ellipsoide aufliegen. Genauer gesagt, liegen die Niveaulinien $f(x, y, z) = 1$, $f(x, y, z) = 9$ und $f(x, y, z) = 25$ jeweils an den Stellen $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ und $(0, 0, \pm 1)$ auf; siehe Bild.



Alle Punkte im Inneren eines Ellipsoiden $f(x, y, z) = w$ haben Funktionswerte kleiner gleich w. Daher sind die Minimal- bzw. Maximalstellen von $f(x, y, z)$ genau die Stellen an denen der kleinste bzw. grösste Ellipsoid aufliegt. Das wird auch deutlich, wenn man die Schnitte der Sphäre mit verschiedenen Niveaulinien $f(x, y, z) = w$ plottet:

Name: __________________ Legi: __________________



Erinnert man sich an die Vorlesung, so sind die Punkte, an denen eine Niveaulinie $f(x, y, z) = w$ auf $g(x, y, z) = 1$ aufliegt, genau die Punkte, welche durch die Lagrange-Multiplikatoren beschrieben werden.

7. (10 Punkte) Gegeben sei die Dichtefunktion

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Wir betrachten die Achtelkugel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

a) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Masse der Achtelkugel K bezüglich der gegebenen Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$.

Lösung: Nach der Vorlesung wissen wir, dass die Masse M von K durch das Integral

$$M = \iiint_K \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}V$$

gegeben ist.

In Kugelkoordinaten ist die Achtelkugel K gegeben durch $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Mit der Formel aus der Vorlesung berechnen wir

$$\begin{aligned} M &= \iiint_K \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}V \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^2 + 1} \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \cdot \int_0^1 \frac{r^2}{r^2 + 1} \, \mathrm{d}r \end{aligned}$$

Das erste Integral berechnet sich zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = [-\cos\theta]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Wir berechnen das zweite Integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{r^2}{r^2 + 1} \, \mathrm{d}r &= \int_0^1 \frac{r^2 + 1 - 1}{r^2 + 1} \, \mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 1 - \frac{1}{r^2 + 1} \, \mathrm{d}r \\ &= 1 - [\arctan(r)]_{r=0}^1 \\ &= 1 - \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\arctan(x)$ die Stammfunktion von $\frac{1}{x^2+1}$ ist.

Zusammen ergibt sich

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}.$$

b) **(5 Punkte)** Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Achtelkugel K bezüglich der gegebenen Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$.

Lösung: Zunächst beobachten wir, dass sowohl die Achtelkugel als auch die Dichtefunktion sich nicht ändern, wenn man an den Ebenen $x = y$, $y = z$ oder $x = z$ spiegelt. In der Tat, diese Spiegelungen vertauschen lediglich die Koordinaten $x \leftrightarrow y$,$y \leftrightarrow z$ oder $x \leftrightarrow z$. Die Gerade $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ ist invariant unter diesen Spiegelungen, sodass der Schwerpunkt $S = (x_S, y_S, z_S)$ auf G liegen muss. Das heisst, es gilt $x_S = y_S = z_S$. Es genügt daher eine dieser Koordinaten zu berechnen. Wir entscheiden uns für z_S. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$z_S = \frac{\iiint_K z \cdot \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V}{\iiint_K \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V} = \frac{\iiint_K z \cdot \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V}{M}.$$

Aus Aufgabenteil a) wissen wir, dass die Masse der Achtelkugel

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

ist. Es bleibt also noch das Integral im Zähler zu berechnen.
In Kugelkoordinaten ist die Achtelkugel K gegeben durch $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\iiint_K z \cdot \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{r^2 + 1} \cdot r^2 \cdot \sin\theta \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{r^2 + 1} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^1 \frac{r^3}{r^2 + 1}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Das erste Integral berechnet sich zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = \left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen das zweite Integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{r^3}{r^2 + 1}\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{r^2}{r^2 + 1} \cdot (2r)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u}{u + 1}\, du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u + 1}\right) du \\
&= \frac{1}{2}(1 - \ln(2)),
\end{aligned}$$

wobei wir mit $u = r^2$, $du = 2r\,dr$, substituiert haben.
Zusammen ergibt sich

$$z_S = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 - \ln(2))}{\frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \ln(2)}{4 - \pi},$$

sodass der Schwerpunkt S der Achtelkugel K

$$S = \left(\frac{1 - \ln(2)}{4 - \pi}, \frac{1 - \ln(2)}{4 - \pi}, \frac{1 - \ln(2)}{4 - \pi}\right)$$

ist.

c) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

bezüglich derselben Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil **b)** und argumentieren Sie!
Lösung: Zunächst beobachten wir, dass sowohl die Dichtefunktion als auch die Halbkugel H invariant unter Rotationen um die z-Achse sind, sodass der Schwerpunkt $S' = (x_{S'}, y_{S'}, z_{S'})$ der Halbkugel H auf der z-Achse liegen muss, d.h. $x_{S'} = y_{S'} = 0$.
Ausserdem setzt sich die Halbkugel H aus vier Achtelkugeln $K_0 = K$, K_1, K_2, K_3 zusammen. Jede dieser Achtelkugeln ergibt sich aus der Achtelkugel K durch Rotation um die z-Achse. Aus der Rotationsinvarianz der Dichtefunktion ergibt sich nun, dass

$$S' = \frac{1}{4}(S_0 + S_1 + S_2 + S_3),$$

wobei S_i den Schwerpunkt der Achtelkugel K_i bezeichnet. Dabei gilt

$$z_S = z_{S_0} = z_{S_1} = z_{S_2} = z_{S_3} = \frac{1 - \ln(2)}{4 - \pi},$$

sodass

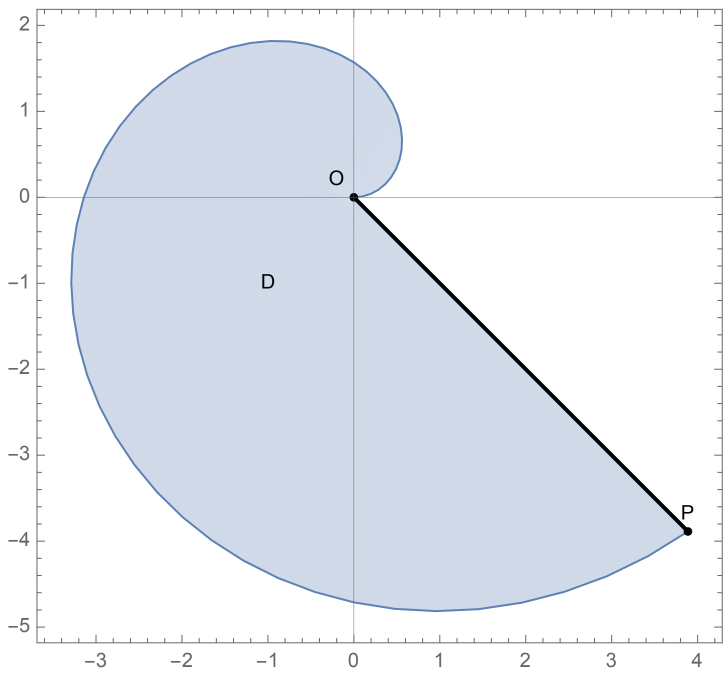
$$z_{S'} = z_S = \frac{1 - \ln(2)}{4 - \pi}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$S' = \left(0, 0, \frac{1 - \ln(2)}{4 - \pi}\right).$$

Name: _________________ Legi: _________________

8. (10 Punkte) Wir betrachten die Spirale, welche in Polarkoordinaten durch $R(\varphi) = \varphi, \varphi \in [0, \frac{7}{4}\pi]$ gegeben ist. Mit D bezeichnen wir das Gebiet, welches durch die Spirale und der Strecke zwischen $O = (0,0)$ und $P = (\frac{7\pi}{4\sqrt{2}}, -\frac{7\pi}{4\sqrt{2}})$ begrenzt wird; siehe Bild.



a) (4 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

Lösung: Wir berechnen

$$\iint_D \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^{\varphi} r\, \mathrm{d}r d\varphi$$
$$= \int_0^{\frac{7}{4}\pi} \frac{\varphi^2}{2} d\varphi = \frac{1}{6}\left(\frac{7}{4}\pi\right)^3$$

b) (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss nach aussen durch den Rand von D des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} - x^2y^3 + y^7 \\ x^9 + 17x^8 + \frac{xy^4}{2} + \frac{y^3}{3} \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach dem Satz von Green erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{n} &= \iint_D U_x + V_y \,\mathrm{d}A \\
&= \iint_D x^2 - 2xy^3 + 2xy^3 + y^2 \,\mathrm{d}A \\
&= \iint_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^{\varphi} r^3 \,\mathrm{d}r d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{7}{4}\pi} \frac{\varphi^4}{4} d\varphi = \frac{1}{20}\left(\frac{7\pi}{4}\right)^5
\end{aligned}$$

9. (10 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = -54e^{-2x}.$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung: Wir lösen zuerst die homogene Gleichung

$$y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 0.$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\mathrm{Ch}(X) = X^3 + 3X^2 - 4.$$

Offenbar ist $X = 1$ eine Nullstelle, und mittels der Mitternachtsformel ergibt sich eine weitere doppelte Nullstelle bei $X = -2$. Somit wird der Lösungsraum der homogenen Differentialgleichungen durch die Funktionen e^x, e^{-2x}, xe^{-2x} aufgespannt.

Nun zur partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: Das Störglied auf der rechten Seite ist $-54e^{-2x}$. Da -2 eine doppelte Nullstelle von $\mathrm{Ch}(X)$ ist, haben wir einen Resonanzfall vorliegen und wählen als Ansatz $y(x) = Cx^2e^{-2x}$. Wir berechnen die Ableitungen

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -2Ce^{-2x}x(x-1), \\
y''(x) &= 2Ce^{-2x}\left(2x^2 - 4x + 1\right), \\
y'''(x) &= -4Ce^{-2x}\left(2x^2 - 6x + 3\right).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$y''' + 3y'' - 4y = -6Ce^{-2x} \overset{!}{=} -54e^{-2x},$$

sodass $C = 9$ und $y(x) = 9x^2e^{-2x}$ eine partikuläre Lösung ist.
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = 9x^2e^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^x$$

mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

b) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung, sodass

$$y(0) = \pi + \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -2\pi + \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) \cdot e^{-x} = \frac{1}{2}.$$

Lösung: Wir setzen die allgemeine Lösung ein, um die unbekannten Parameter $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(9x^2e^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} 9x^2e^{-3x} + C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + C_3 = C_3. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\pi + \frac{1}{2} = y(0) = C_1 + C_3 = C_1 + \frac{1}{2},$$

sodass $C_1 = \pi$. Letztlich

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-2x}\left(-2\,(C_2 - 9)\,x + C_3e^{3x} - 2C_1 + C_2 - 18x^2\right), \\ y'(0) &= -2C_1 + C_2 + C_3 = -2\pi + C_2 + \frac{1}{2} \overset{!}{=} -2\pi + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

sodass $C_2 = 0$ gilt.
Insgesamt ist die gesuchte Lösung also

$$y(x) = 9x^2e^{-2x} + \pi e^{-2x} + \frac{1}{2}e^x.$$