Initialen: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Legi (6 letzte Ziffern): _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

Lösung Januar 2021

Dr. Meike Akveld

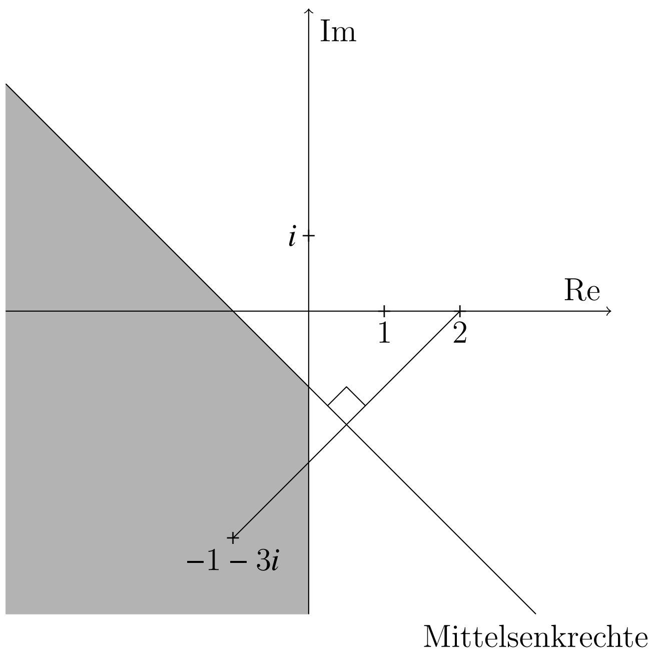
1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge B in der komplexen Ebene

$$B = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z + 1 + 3i| \leq |z - 2| \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$$

Achtung: Eine Skizze allein genügt nicht – es soll ersichtlich sein, wie Sie zu dieser Skizze gekommen sind.

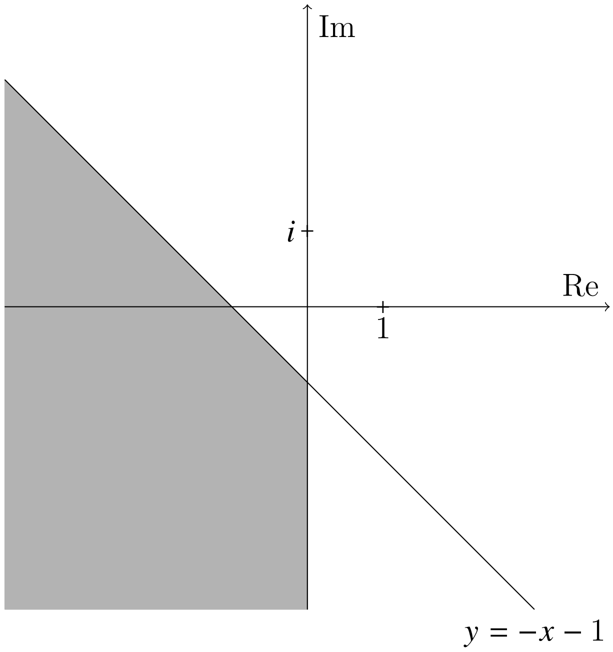
Lösung: *Variante 1 (durch überlegen):* Die Menge B enthält alle Punkte in der komplexen Ebene, die näher bei $-1 - 3i$ als bei 2 liegen und nicht-positiven Realteil haben. Man verbindet also die beiden Punkte $-1 - 3i$ und 2 und zeichnet die Mittelsenkrechte ein. Die Menge B sind alle Punkte, die links von (oder auf) dieser Mittelsenkrechten und links von (oder auf) der y-Achse liegen:



Variante 2 (durch rechnen): Mit $z = x + iy$ gilt

$$
\begin{aligned}
|z + 1 + 3i| &\leq |z - 2| \\
(x+1)^2 + (y+3)^2 &\leq (x-2)^2 + y^2 \\
x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 &\leq x^2 - 4x + 4 + y^2 \\
6x + 6y + 6 &\leq 0 \\
y &\leq -x - 1.
\end{aligned}
$$

Die Menge B enthält also alle Punkte $z = x+iy$ mit $x \leq 0$ und $y \leq -x-1$. Also, alle Punkte, die links von (oder auf) der y-Achse liegen und links von (oder auf) der Geraden $y = -x - 1$.



b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

Bemerkung: Sie dürfen Ihre Antwort in Polarform stehen lassen.
Lösung: Wir wollen $-8 - 8\sqrt{3}i = Re^{i\Phi}$ in Polarkoordinaten schreiben. Es ist

$$R = |8 - 8\sqrt{3}i| = \sqrt{64 + 3 \cdot 64} = \sqrt{4 \cdot 64} = 2 \cdot 8 = 16$$

$$\Phi = \arg(-8 - 8\sqrt{3}) = \arctan\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right) - \pi = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3},$$

wobei wir $-\pi$ gerechnet haben, da der Punkt $-8-8\sqrt{3}i$ im 3. Quadranten liegt. Wir schreiben $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} z^4 &= -8 - 8\sqrt{3}i \\ r^4 e^{4i\varphi} &= 16e^{-\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $r = \sqrt[4]{16} = 2$ und $4\varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$, also $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$. Für $k = -1, 0, 1, 2$ erhalten wir

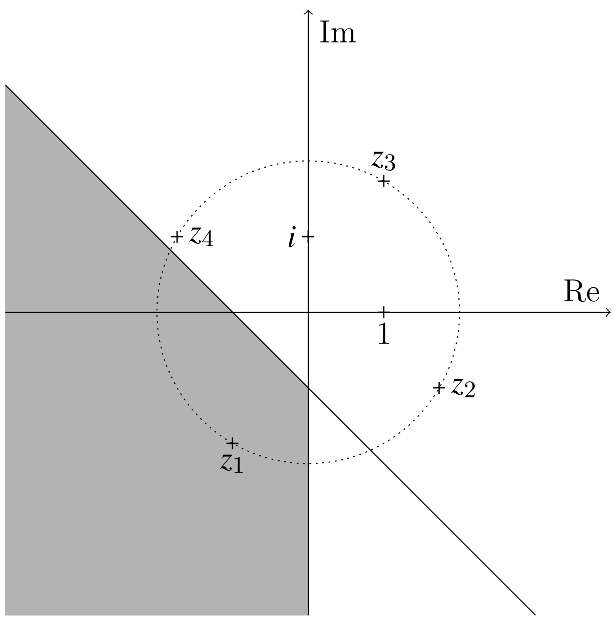
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} \\ \varphi_2 &= -\frac{\pi}{6} \\ \varphi_3 &= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \\ \varphi_4 &= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Wir erhalten als Lösungen der Gleichung

$$z_1 = 2e^{-\frac{2\pi i}{3}} \quad , \quad z_2 = 2e^{-\frac{\pi i}{6}} \quad , \quad z_3 = 2e^{\frac{\pi i}{3}} \quad , \quad z_4 = 2e^{\frac{5\pi i}{6}}.$$

c) **(2 Punkte)** Zeichnen Sie die Lösungen von b) in der Skizze von a) ein und geben Sie an, welche in der Menge B liegen.

Lösung: Es kann in der Skizze abgelesen werden, dass $z_1 \in B$ liegt, z_2, z_3, z_4 hingegen nicht:



Falls die Skizze ungenau ist und nicht klar ist, ob z_4 in $\boldsymbol{B}$ liegt oder nicht, muss überprüft werden, ob $\mathrm{Im}(z_4) \leq -\mathrm{Re}(z_4) - 1$ gilt oder nicht. Es ist

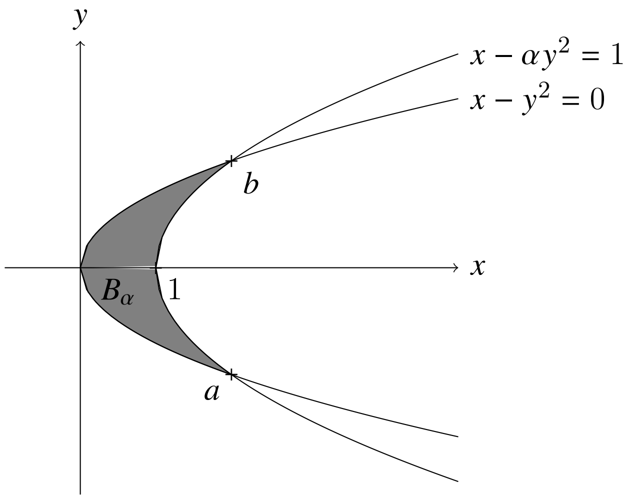
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z_4) &= 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ -\mathrm{Re}(z_4) - 1 &= -2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 1 = -2\frac{-\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 < 1. \end{aligned}$$

Somit liegt z_4 nicht in $\boldsymbol{B}$.

2. (10 Punkte)

Es sei B_α (für $0 < \alpha < 1$) die von den beiden Parabelbögen $x - y^2 = 0$ und $x - \alpha y^2 = 1$ berandete Fläche. Für welche α liegt der Schwerpunkt von B_α ausserhalb der Fläche B_α?

Lösung: Wir erstellen zuerst eine Skizze der Situation:



(Allenfalls hilft es auch, sich die um 90° gedrehte Grafik anzuschauen.) Man sieht aus der Skizze, dass die y-Koordinate des Schwerpunktes aus Symmetriegründen $= 0$ sein muss. Alternativ folgt dies auch, da beide gegebenen Parabelbögen symmetrisch in $y \leftrightarrow -y$ sind. Ebenfalls aus der Skizze oder aus den Gleichungen der Parabeln sieht man, dass ein Punkt auf der x-Achse genau dann in B_α liegt, wenn die x-Koordinate im Intervall $[0, 1]$ liegt. Der Schwerpunkt von B_α liegt also genau dann nicht im Intervall, wenn die x-Koordinate $x_S < 0$ oder $x_S > 1$ erfüllt. Es ist aus der Skizze ersichtlich, dass

$x_S < 0$ nicht möglich ist. Also ist $S \notin B_\alpha$ genau dann, wenn $x_S > 1$ ist. (Falls man den Fall $x_S < 0$ nicht ausschliesst, wird man für diesen Fall ein $\alpha < 0$ erhalten, was nach Aufgabenstellung ausgeschlossen ist.) Die x-Koordinate des Schwerpunktes ist

$$x_S = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b g(y)^2 - f(y)^2 \,\mathrm{d}y}{\int_a^b g(y) - f(y) \,\mathrm{d}y},$$

wobei a und b die Schnittpunkte der beiden Parabelbögen $f(y) = y^2$ und $g(y) = \alpha y^2 + 1$ sind. Es gilt $f(y) = g(y)$ genau dann, wenn $(1-\alpha)y^2 = 1$, also $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b g(y) - f(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} \alpha y^2 + 1 - y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{\alpha-1}{3}y^3 + y\right]_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} \\ &= \frac{2(\alpha-1)}{3}\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1-\alpha}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^b g(y)^2 - f(y)^2\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} (\alpha y^2+1)^2 - y^4 \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} (\alpha^2-1)y^4 + 2\alpha y^2 + 1 \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2-1}{5}y^5 + \frac{2\alpha}{3}y^3 + y\right]_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{5}\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2\alpha}{3}\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \\ &= \left(-\frac{\alpha+1}{5} + \frac{2\alpha}{3}\right)\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \\ &= \left(\frac{7\alpha}{15} - \frac{1}{5}\right)\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

Somit ist die x-Koordinate des Schwerpunktes

$$x_S = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b g(y)^2 - f(y)^2\,\mathrm{d}y}{\int_a^b g(y) - f(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} (\alpha y^2+1)^2 - y^4\,\mathrm{d}y}{\int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} \alpha y^2 + 1 - y^2\,\mathrm{d}y} = \frac{\left(\frac{7\alpha}{15} - \frac{1}{5}\right)\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}{\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}$$

und

$$
\begin{aligned}
x_S &> 1 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{7\alpha}{15} - \frac{1}{5}\right) \frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} &> \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \\
\Leftrightarrow \frac{7\alpha}{15} - \frac{1}{5} + 1 - \alpha &> \frac{4}{3}(1-\alpha) \\
\Leftrightarrow \frac{12\alpha}{15} &> \frac{8}{15} \\
\Leftrightarrow \alpha &> \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Der Schwerpunkt von $\boldsymbol{B}_\alpha$ liegt also ausserhalb der Fläche $\boldsymbol{B}_\alpha$ für $\alpha > \frac{2}{3}$.

3. (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert oder nicht:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+7}}{5^k}.$$

Lösung: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2(k+1)+7} \cdot 5^k}{5^{k+1}\sqrt{2k+7}} = \frac{1}{5} \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2k+9}{2k+7}} = \frac{1}{5}\sqrt{\lim_{k\to\infty} \frac{2k+9}{2k+7}} \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{\lim_{k\to\infty} \frac{2+\frac{9}{k}}{2+\frac{7}{k}}} = \frac{1}{5}\sqrt{1} = \frac{1}{5} < 1.
\end{aligned}
$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

b) (4 Punkte) Berechnen Sie

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x.$$

Lösung: Wir möchten die Partialbruchzerlegung berechnen, wozu wir zuerst die Nullstellen des Polynoms im Nenner bestimmen müssen. Man sieht, dass $x = 0$ eine Nullstelle ist. Die anderen zwei Nullstellen sieht man entweder direkt oder durch Anwenden der Mitternachtsformel:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1).$$

Wir berechnen mit dem üblichen Ansatz

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$
$$= \frac{(A+B+C)x^2+(-A+B-2C)x-2A}{x^3-x^2-2x}$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B+C &= 3 \\ -A+B-2C &= -7 \\ -2A &= -2 \end{cases},$$

mit der Lösung $A = 1$, $B = -\frac{2}{3}$ und $C = \frac{8}{3}$. Somit können wir das Integral berechnen als

$$\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} - \frac{2}{3}\frac{1}{x-2} + \frac{8}{3}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{8}{3}\ln|x+1| + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

c) (3 Punkte) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right).$$

Lösung: *Variante 1 (l'Hopital):* Wir wenden zweimal die Regel von l'Hopital an:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x+1)+1+1} = \frac{1}{2}.$$

Variante 2 (Potenzreihen): Wir setzen die Potenzreihe $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots$ der Logarithmus-Funktion ein und erhalten

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\ldots\right)}{x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\ldots\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\pm\ldots}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}\mp\ldots} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\pm\ldots}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\mp\ldots} = \frac{1}{2}.$$

4. **Multiple-Choice (10 Punkte):** Es gibt zu jeder Frage **genau eine** richtige Antwort. Eine falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten! Bitte machen Sie Ihre Antwort gut kenntlich, indem Sie das gesamte Feld ausfüllen. Verwenden Sie zur Korrektur bitte Tipp-Ex! Bei Korrektur mit Tipp-Ex zeichnen Sie bitte **nicht** das Kästchen nach.

a) (3 Punkte) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n} x^n$ ist

(A) ✗ 0.

(B) ✗ $\frac{1}{7}$.

(C) ✓ 7.

(D) ✗ ∞.

Lösung: Der Konvergenzradius ist

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1} n^2}{(n+1)^2 7^n} = 7 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 7.$$

b) (2 Punkte) Sei $\int_0^1 f(-\frac{x}{c})\,\mathrm{d}x = 1$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $\int_{-\frac{1}{c}}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}$.

(A) ✓ Wahr.

(B) ✗ Falsch.

Lösung: Mit der Substitution $u = -\frac{x}{c}$, $\mathrm{d}u = -\frac{1}{c}\,\mathrm{d}x$, respektive $x = -cu$ erhält man

$$\int_{-\frac{1}{c}}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^0 f(-\tfrac{x}{c}) \cdot (-\tfrac{1}{c})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c} \int_0^1 f(-\tfrac{x}{c})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}.$$

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}.$$

Dann gilt für die 15. Ableitung von f an der Stelle $x = 0$, dass $f^{(15)}(0) = 210$ ist.

(A) ✓ Wahr.

(B) ✗ Falsch.

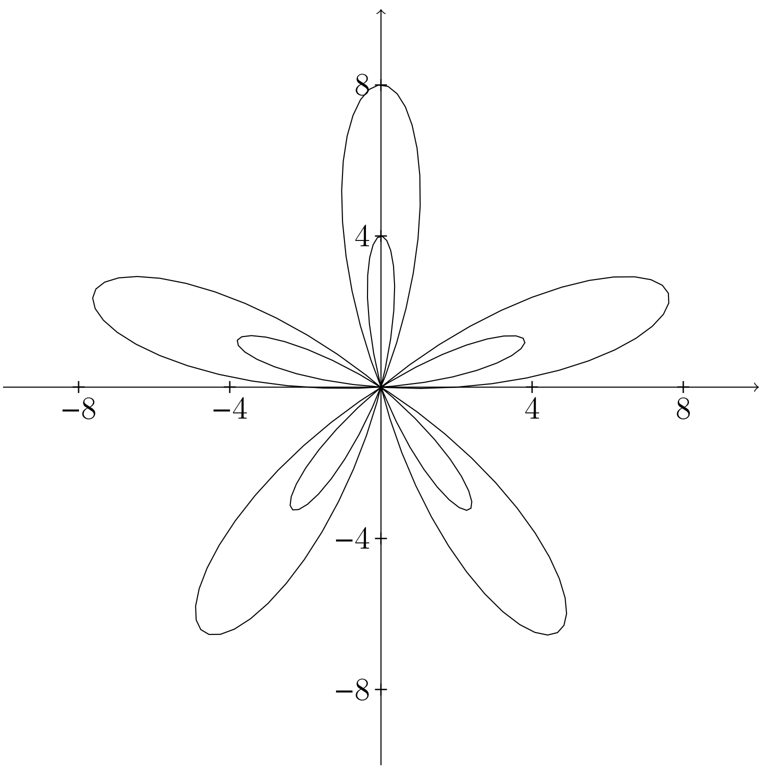
Lösung: Die Taylorreihe um 0 ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Somit ist $f^{(15)}(0)$ gleich 15! mal der Koeffizient von x^{15}, also

$$\begin{aligned} f^{(15)}(0) &= 15! \cdot (\text{Koeffizient von } x^{2 \cdot 6+3}) \\ &= 15! \cdot \frac{(-1)^6}{13!} = 15 \cdot 14 = 210. \end{aligned}$$

d) (3 Punkte) Welche Parametrisierung in Polarkoordinaten beschreibt die folgende Kurve?



(A) ✗

$$R(\varphi) = 6 + 2\sin(5\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(B) ✗

$$R(\varphi) = 6 + 2\sin(10\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(C) ✓

$$R(\varphi) = 2 + 6\sin(5\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(D) ✗

$$R(\varphi) = 2 + 6\sin(10\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Lösung: Bei $R(\varphi) = 6+2\sin(5\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$, und $R(\varphi) = 6+2\sin(10\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$, wird $R(\varphi)$ niemals 0, wie in der Abbildung. Wenn wir bei $R(\varphi) = 2 + 6\sin(10\varphi)$ den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ einsetzen, so gibt dies $R(\frac{\pi}{2}) = 2 + 6\sin(5\pi) = 2$, was nicht zu der gegebenen Abbildung passt. Übrig bleibt $R(\varphi) = 2 + 6\sin(5\varphi)$, was die korrekte Antwort ist.

5. (10 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) (2 Punkte) Berechnen Sie $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x = \boxed{e^{e^x}+c}$$

Lösung: *Variante 1:* Man sieht, dass die innere Ableitung bereits da steht:

$$\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x = \int e^x e^{e^x}\,\mathrm{d}x = e^{e^x}+c.$$

Variante 2: Mit der Substitution $y = e^x$, also $x = \ln y$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$ erhalten wir

$$\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x = \int e^{\ln y + y}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int y e^y \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int e^y\,\mathrm{d}y = e^y + c = e^{e^x}+c.$$

b) (2 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'' + 7y' + 12y = 6x$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der **homogenen** Gleichung.

$$y_h(x) = \boxed{C_1e^{-3x} + C_2e^{-4x}}$$

Lösung: Die homogene DGL ist

$$y'' + 7y' + 12y = 0.$$

Das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = (\lambda+3)(\lambda+4)$$

hat Nullstellen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -4$. Somit ist die homogene Lösung der DGL

$$y_h(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{-4x}$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene

$$14x + By + Cz = D$$

im Punkt $(1, 2, 7)$ der Fläche mit der Gleichung $xyz = 14$.

$B = \boxed{7}$ $C = \boxed{2}$ $D = \boxed{42}$

Lösung: Die partiellen Ableitungen von $F(x, y, z) = xyz$ sind

$$F_x(x, y, z) = yz \quad , \quad F_y(x, y, z) = xz \quad , \quad F_z(x, y, z) = yz.$$

Im Punkt $(1, 2, 7)$ ausgewertet ist das

$$F_x(1, 2, 7) = 14 \quad , \quad F_y(1, 2, 7) = 7 \quad , \quad F_z(1, 2, 7) = 2.$$

Somit ist die Tangentialebene (Satz 77 im Skript) gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(1, 2, 7)(x - 1) + F_y(1, 2, 7)(y - 2) + F_z(1, 2, 7)(z - 7) \\ &= 14(x - 1) + 7(y - 2) + 2(z - 7) = 14x + 7y + 2z - 42, \end{aligned}$$

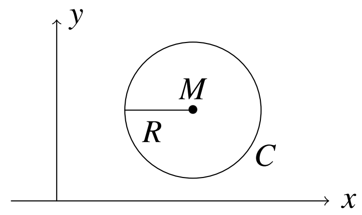
also

$$14x + 7y + 2z = 42.$$

d) (3 Punkte) Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{6} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{3} \end{pmatrix},$$

und C der Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt M und Radius $R = 3$ wie in der folgenden Grafik:



Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch C:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{n} = \boxed{\tfrac{3}{2}\pi}$$

Lösung: Wir benutzen den Satz von Green und bezeichnen mit K die Kreisscheibe, also $C = \partial K$. Es gilt

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{n} &= \iint_K \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \iint_K \left(\frac{yx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{6} - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}A \\ &= \iint_K \frac{1}{6}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{6}\iint_K 1\,\mathrm{d}A = \frac{1}{6}\cdot 9\pi = \frac{3}{2}\pi,\end{aligned}$$

da die Fläche der Kreisscheibe $\pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ ist.

6. (10 Punkte)

Betrachten Sie die Kurve Γ definiert als Schnittmenge zweier Flächen

$$\Gamma = \{((x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 3 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

Berechnen Sie den Punkt / die Punkte auf der Kurve Γ, die am weitesten entfernt sind vom Ursprung und bestimmen Sie diese Distanz.

Lösung: Wir wollen die Distanz zum Ursprung maximieren, also $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ maximieren. Wir bemerken zuerst, dass es äquivalent ist, das Quadrat davon zu maximieren, d.h. wir wollen die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

maximieren unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x - 2z = 3 \quad \text{und} \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Wir wollen Lagrange-Multiplikatoren verwenden. Dazu berechnen wir die Gradienten

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}.$$

Lokale Extrema von f auf Γ müssen daher das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z) \\ g_1(x, y, z) &= 3 \\ g_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 2y &= 2\lambda_2 y \\ 2z &= -2\lambda_1 - 2\lambda_2 z \\ x - 2z &= 3 \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass entweder $\lambda_2 = 1$ oder $y = 0$.

- *Fall 1:* $\lambda_2 = 1$. Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda_1 = 0$, weshalb mit der dritten Gleichung $z = 0$ folgt. Die letzte Gleichung würde nun aber $x^2 + y^2 = 0$, also $x = y = 0$ implizieren. Somit hätten wir $x = y = z = 0$, was in Widerspruch zur vierten Gleichung steht. Dieser Fall führt also zu keiner Lösung des Gleichungssystems.
- *Fall 2:* $y = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich die letzte Gleichung zu $x^2 = z^2$, also $x = \pm z$. Wir unterscheiden nun diese beiden neuen Fälle:
- *Fall 2.1:* $y = 0$ und $x = z$. Unser Gleichungssystem vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} 2z &= \lambda_1 + 2\lambda_2 z \\ 2z &= -2\lambda_1 - 2\lambda_2 z \\ -z &= 3 \end{aligned}$$

Also ist $z = -3$. Wir bemerken, dass das übriggebliebene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -6 &= \lambda_1 - 6\lambda_2 \\ -6 &= -2\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{aligned}$$

eine Lösung für λ_1, λ_2 besitzt ($\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 3$). Somit ist

$$(x, y, z) = (-3, 0, -3)$$

eine Lösung des Gleichungssystems.

- *Fall 2.2:* $y = 0$ und $x = -z$. Das Gleichungssystem vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} -2z &= \lambda_1 - 2\lambda_2 z \\ 2z &= -2\lambda_1 - 2\lambda_2 z \\ -3z &= 3. \end{aligned}$$

Also ist $z = -1$. Wir bemerken wieder, dass das übriggebliebene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -2 &= -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned}$$

eine Lösung für λ_1, λ_2 besitzt ($\lambda_1 = \frac{4}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$). Somit ist

$$(x, y, z) = (1, 0, -1)$$

eine Lösung des Gleichungssystems.

Die Extremalstellen von f unter den gegebenen Nebenbedingungen sind also

$$(x_1, y_1, z_1) = (-3, 0, -3) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2, z_2) = (1, 0, -1).$$

Die Funktion f nimmt an diesen beiden Stellen folgende Werte an:

$$f(-3, 0, -3) = 9 + 0 + 9 = 18 \quad \text{und} \quad f(1, 0, -1) = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Somit ist der Punkt auf der Kurve Γ, der am weitesten vom Ursprung entfernt ist, der Punkt $(-3, 0, -3)$. Seine Distanz zum Ursprung ist

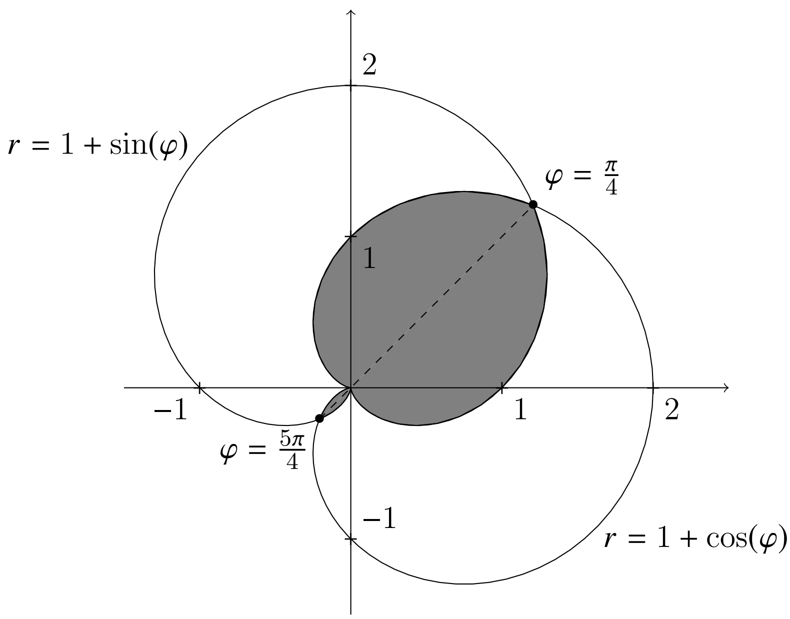
$$\sqrt{f(-3, 0, -3)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

7. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fläche des Gebiets, das von den beiden Kardioiden $r = 1 + \sin\varphi$ und $r = 1 + \cos\varphi$ eingeschlossen wird.

Hinweis: Machen Sie eine genaue Skizze.

Lösung: Die beiden Kardioiden sehen wie folgt aus:



Wir suchen also den Inhalt der grau gefärbten Fläche. Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte der beiden Kardioiden, also φ mit

$$\begin{aligned} 1+\sin(\varphi) &= 1+\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) &= \cos(\varphi) \\ \tan(\varphi) &= 1 \\ \varphi &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \pi k \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Die Schnittpunkte in $[0, 2\pi)$ sind also $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{5\pi}{4}$. Wir bemerken, dass die eingeschlossene Fläche symmetrisch ist. Somit ist die Fläche gleich zweimal der oberen Hälfte, die durch $r = 1 + \cos(\varphi)$ bestimmt wird:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 1 + 2\cos\varphi + \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left[\varphi + 2\sin\varphi + \tfrac{1}{2}(\cos\varphi\sin\varphi + \varphi)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \pi + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \pi\right) \\ &= \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

8. (10 Punkte)

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ durch die Oberfläche von

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq 1 \,\text{und}\, 0 \leq x \leq 3\}.$$

Lösung: Wir wollen den Satz von Gauss anwenden, also

$$\iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \,\mathrm{d}V.$$

Die Divergenz von $\vec{F}$ ist

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten $r(x,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ mit Volumenelement $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x$. Das Gebiet G ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$G = \{(x, r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Somit ist der Fluss von $\vec{F}$ durch die Oberfläche von G gegeben durch

$$\iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \,\mathrm{d}V = 3 \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (x^2 + r^2) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}x$$

$$= 6\pi \int_0^3 \int_0^1 x^2 r + r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}x = 6\pi \int_0^3 \left[\tfrac{1}{2} x^2 r^2 + \tfrac{1}{4} r^4\right]_0^1 \mathrm{d}x$$

$$= 6\pi \int_0^3 \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{4} \,\mathrm{d}x = 6\pi \left[\tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{4} x\right]_0^3$$

$$= 6\pi(\tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{4}) = \tfrac{63}{2}\pi.$$

Alternativer Lösungsweg (ohne Gauss, dafür mit Additionstheorem, deutlich umständlicher) Wir schreiben G in Zylinderkoordinaten wie oben. Die Oberfläche von G besteht aus drei Teilen:

$$S_1 = \{(x, r, \varphi) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le \varphi \le 2\pi, r = 1\}$$
$$S_2 = \{(x, r, \varphi) \mid x = 0, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1\}$$
$$S_3 = \{(x, r, \varphi) \mid x = 3, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1\}.$$

Wir berechnen die entsprechenden drei Integrale:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{dS} = \iint \vec{F}(x, \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \cdot \vec{n} \; dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \begin{pmatrix} x^3 \\ \cos^3(\varphi) \\ \sin^3(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\varphi = 3 \int_0^{2\pi} \cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 3 \left[\frac{1}{16} (12x + \sin(4x))\right]_0^{2\pi} = 3 \cdot \frac{24}{16}\pi = \frac{9}{2}\pi.$$

(Die Stammfunktion von $\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)$ berechnet man beispielsweise mit Additionstheoremen.)

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \mathrm{dS} = \iint \vec{F}(0, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \vec{n} \; dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ r^3 \cos^3(\varphi) \\ r^3 \sin^3(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \mathrm{dS} = \iint \vec{F}(3, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \vec{n} \; dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} 27 \\ r^3 \cos^3(\varphi) \\ r^3 \sin^3(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 27r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = 27 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^1 = 54\pi \cdot \frac{1}{2} = 27\pi.$$

Der Fluss durch die Gesamte Oberfläche ist

$$\iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \mathrm{dS} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{dS} + \iint_{\mathrm{S}_2} \mathrm{F} \cdot \mathrm{dS} + \iint_{\mathrm{S}_3} \mathrm{F} \cdot \mathrm{dS} = \frac{9}{2}\pi + 0 + 27\pi = \frac{63}{2}\pi.$$

9. (10 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y' + 2xy &= x^3 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Lösung: Wir lösen zuerst die homogene Gleichung

$$y' + 2xy = 0.$$

Wir bemerken, dass $y(x) \equiv 0$ eine Lösung ist. Für $y \neq 0$ können wir die Variablen separieren und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= -2\int x\,\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -x^2 + C_1 \text{ mit } C_1 \in \mathbb{R} \\ |y(x)| &= e^{-x^2+C_1} = C_2 e^{-x^2} \text{ mit } C_2 = e^{C_1} \in \mathbb{R}_{>0} \\ y(x) &= C_3 e^{-x^2} \text{ mit } C_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Da $y(x) = 0$ ebenfalls eine Lösung der homogenen Gleichung ist, erhalten wir als Lösungen der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = Ce^{-x^2} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Wir benutzen die Methode der Variation der Konstanten um die Lösungen der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Wir nehmen also den Ansatz $y(x) = C(x)e^{-x^2}$. einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$y'(x) + 2xy(x) = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = C'(x)e^{-x^2} \stackrel{!}{=} x^3.$$

Daraus folgt $C'(x) = x^3 e^{x^2}$, also mit partieller Integration

$$C(x) = \int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\downarrow} \cdot \underbrace{2xe^{x^2}}_{\uparrow}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\right] - \int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

für eine konstante $c \in \mathbb{R}$. Also ist

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c\right) e^{-x^2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + ce^{-x^2}.$$

Wir bestimmen die Konstante c durch Einsetzen in die Anfangsbedingung:

$$1 \overset{!}{=} y(0) = -\frac{1}{2} + c,$$

also ist $c = \frac{3}{2}$ und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}.$$