Initialen: _ _ _ _ _ _ _ _ Legi (6 letzte Ziffern): _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG

August 2021

Dr. Meike Akveld

1. (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie

$$\int \frac{8x+4}{x^3-2x^2-8x}\,\mathrm{d}x.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-7n)^n} x^n.$$

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)^2}{\ln(1+x)-x}.$$

2. (10 Punkte)

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten!

a) (4 Punkte) Betrachten Sie das Polynom

$$p(z) = z^5 - 7z^4 - 29z^3 + 330z^2 - 1020z + 1256, \quad z \in \mathbb{C}$$

mit der Nullstelle $2+2i$, d.h. $p(2+2i) = 0$. Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind:

(i) $p(2-2i) = 0$.

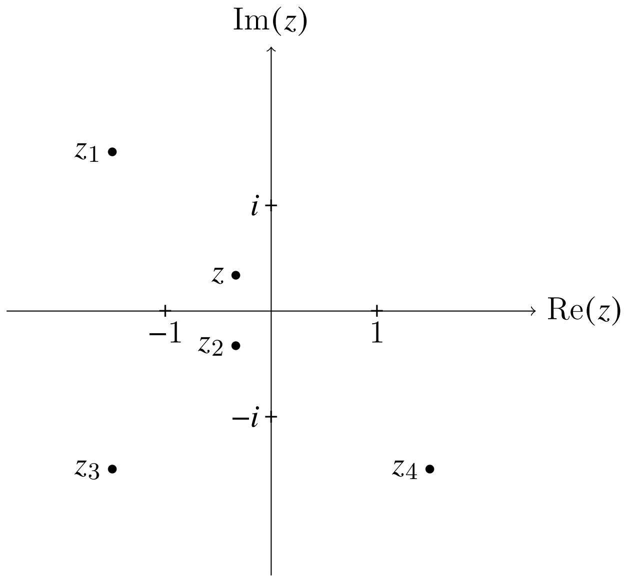
(ii) Das Polynom p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(iii) Die Nullstellen von p bilden ein regelmässiges Fünfeck in der komplexen Ebene, mit Zentrum der Ursprung.

(iv) Es gilt $p(-z) = -p(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) (6 Punkte)

(i) Die komplexe Zahl z sei wie in der Graphik. Welcher Punkt gehört zu $\frac{1}{z}$?



(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

(ii) Sei $\lambda = -5 + 2i$. So gilt für das Argument

(A) $-\pi < \arg(\lambda) < -\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{-\pi}{2} < \arg(\lambda) < 0$

(C) $0 < \arg(\lambda) < \frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{\pi}{2} < \arg(\lambda) < \pi$

Initialen: _ _ _ _ _ _ _ _ Legi (6 letzte Ziffern): _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

(iii) Sei $z = e^{\frac{2}{3}\pi i}(c - \sqrt{3}i)$ eine komplexe Zahl, die von dem reellen Parameter c abhängt. Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Re}(z) = 0$?

(A) $c = -\sqrt{3}$

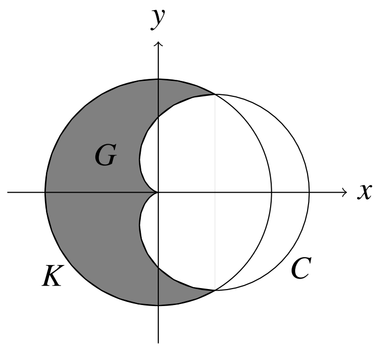
(B) $c = 3$

(C) $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $c = \sqrt{3}$

3. (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden beiden Kurven gegeben in Polarkoordinaten: Die Kardioide $C\colon r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$ und der Kreis $K\colon r(\varphi) = \frac{3}{2}$ wie in der folgenden Grafik.



a) Im Bild sehen Sie, dass die beide Kurven sich zweimal schneiden. Berechnen Sie die beiden Schnittpunkte in Polarkoordinaten.

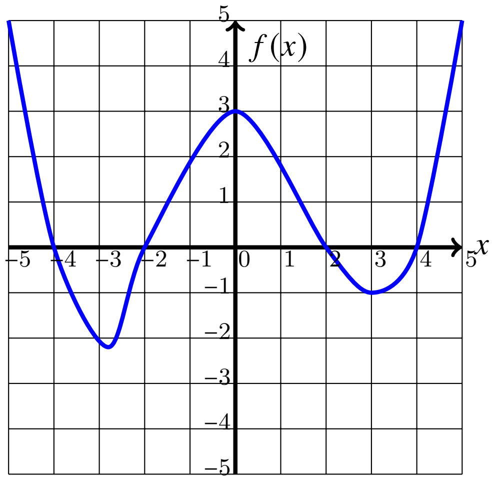
b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Gebietes G, das ausserhalb der Kardioide aber innerhalb des Kreises liegt.

c) Bestimmen Sie den Umfang von G.

4. Multiple-Choice (10 Punkte):

Diese Aufgabe ist auf dem Abgabeblatt zu beantworten!

a) (3 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f : [-5, 5] \to [-5, 5]$ mit Graph wie in der Abbildung. Wie viele Lösungen hat $f(f(x)) = 0$?



(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

b) (2 Punkte) Für alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$$

(A) Wahr

(B) Falsch

c) (3 Punkte) Welcher der folgenden Werte ist am nächsten zu $e^{\frac{0.001}{1.002}}\cos(0.003)$?

(A) 1

(B) 1.001

(C) 1.002

(D) 1.003

d) (2 Punkte) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2-3n}{n^3+7n+5}$ konvergiert.

(A) Wahr

(B) Falsch

5. (10 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Imaginärteil von $\frac{5+2i}{3+i}$.

$$\mathrm{Im}\left(\frac{5+2i}{3+i}\right) = \boxed{}$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene

$$z = Ax + By + C$$

an den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x, y) \mapsto e^{x^2-2xy}$$

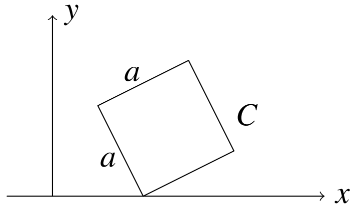
im Punkt $(2, 1, f(2, 1))$.

$$A = \boxed{} \quad B = \boxed{} \quad C = \boxed{}$$

c) (3 Punkte) Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^4(y-2) \\ \frac{1}{2}y - 2x^3y(y-4) \end{pmatrix},$$

und C der Rand des Quadrats mit Seitenlänge $a = 2$ wie in der folgenden Grafik:



Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch C:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{n} = \boxed{}$$

d) (2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie die korrekten Integrationsgrenzen an.

$$\int_1^3 \int_{x^2+1}^{4x-2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_2^{10} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

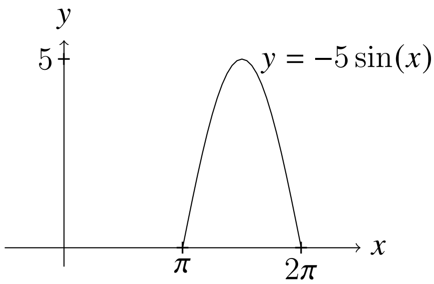
6. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Punkte mit maximaler und minimaler Distanz zum Ursprung auf der Schnittkurve des Kegels $K : z^2 = 4x^2 + 4y^2$ und der Ebene $E : 2x + 4z = 5$. Berechnen Sie auch die Distanz dieser Punkte zum Ursprung.

Initialen: _ _ _ _ _ _ _ _ Legi (6 letzte Ziffern): _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

7. (10 Punkte)

Ein Gugelhopf lässt sich modellieren, indem man das Gebiet zwischen dem Graphen von $y = -5 \sin x$ über dem Intervall $[\pi, 2\pi]$ und der x-Achse um die y-Achse rotieren lässt.



Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass der Gugelhopf konstante Dichte $\rho = 1$ hat.

a) Bestimmen Sie die Masse (ohne Einheiten) des Gugelhopfs.

b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt $S = (x_S, y_S, z_S)$ des Gugelhopfs.

8. (10 Punkte)

Betrachten Sie die Oberfläche der Halbkugel

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, \;\; z \geq 0\}$$

und den Äquatorkreis

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, \;\; z = 0\}$$

in der (x, y)-Ebene. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = (-2x, 0, -2z).$$

Bestimmen Sie

(a) Die Zirkulation $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entlang C (durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn).

(b) Den Fluss $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ durch die Oberfläche der Halbkugel nach aussen.

9. (10 Punkte)

Betrachten Sie einen Hügel modelliert als Graph der Funktion

$$f(x, y) = 10 - 2x^2 - y^2,$$

wobei wir uns nur für $f(x, y) \geq 0$ interessieren. Ein Ball wird im Punkt $(1, 1, f(1, 1))$ losgelassen und rollt hinunter. Die Projektion dieser Kurve auf die (x, y) - Ebene ist die Kurve $r(t) = (x(t), y(t))$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, diese Kurve zu bestimmen und somit herauszufinden, wo der Ball am Boden aufprallt, d.h. $f(r(t)) = 0$ zu lösen.

Bemerkung: Sie dürfen annehmen, dass der Ball entlang der Falllinie (= der Kurve des schnellsten Abstiegs) den Berg hinunterrollt.

a) Bestimmen Sie ein zugehöriges Anfangswertproblem (d.h. eine Differentialgleichung und eine Anfangsbedingung).

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem aus a).
Hinweis: Falls Sie das Anfangswertproblem in a) nicht gefunden haben, so können Sie stattdessen die Differentialgleichung $y' = \frac{2y}{x}$ mit Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{2}$ betrachten, um b) und auch c) zu lösen.

c) Bestimmen Sie den Punkt, wo der Ball am Boden ankommt.