Prüfungstyp A

ETH Zürich

Zwischenprüfung Analysis I D-BAUG
Winter 2015

Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 90 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine, ausser das verteilte Blatt mit Standardintegralen.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig
- Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antwort erhalten Sie einen Abzug von $\frac{1}{3}$ Punkten (bei vier Antwortmöglichkeiten), beziehungsweise 1 Punkt (bei wahr/falsch-Fragen). Wird eine Frage nicht beantwortet, erhalten Sie dafür weder Plus- noch Minuspunkte.
- Achten Sie darauf, dass Sie das Antwortblatt sauber ausfüllen. Im Zweifelsfall gilt eine Antwort als falsch.
- Schreiben Sie Name, Vorname, Legi-Nummer und den oben vermerkten Prüfungstyp in Grossbuchstaben auf ihr Antwortblatt.
- Tragen Sie am Ende der Prüfung die Anzahl der von Ihnen gemachten Kreuzchen als Prüfsumme unten auf dem Antwortblatt ein.

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

1. Es gilt $\forall n < m \in \mathbb{N}\, \exists s \in \mathbb{N} : n < s < m$.

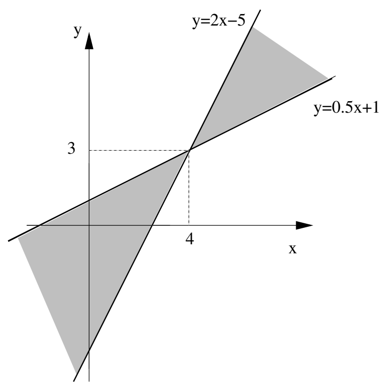
   (a) wahr
   (b) falsch

---

2. Die schraffierte Fläche in der folgenden Abbildung stellt die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0.5x + 1 \leq y \leq 2x - 5\}$$

   dar.



   (a) wahr
   (b) falsch

---

3. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen im Innern des ersten Quadranten der komplexen Ebene, so gilt:

   (a) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{w}}\right) > 0$ und $\mathrm{Re}(z\overline{w}) > 0$.
   (b) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{w}}\right) < 0$ und $\mathrm{Re}(z\overline{w}) > 0$.
   (c) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{w}}\right) > 0$ und $\mathrm{Re}(z\overline{w}) < 0$.
   (d) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{w}}\right) < 0$ und $\mathrm{Re}(z\overline{w}) < 0$.

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + \mathrm{i} = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

   (a) 0

   (b) $-\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (c) 1

   (d) $\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

---

5. Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, so gilt für den Betrag der Summe:

   (a) $|z_1 + z_2| < 1$.

   (b) $|z_1 + z_2| > 1$.

   (c) $|z_1 + z_2| = 1$.

   (d) alle drei obigen Fälle kommen vor.

---

6. Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

   (a) wahr

   (b) falsch

---

7. Jede konvergente Folge ist monoton.

   (a) wahr

   (b) falsch

8. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

   (a) wahr

   (b) falsch

---

9. Bestimme den Grenzwert der folgenden Reihe, falls sie konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n+1}$$

   (a) 2

   (b) 4

   (c) 9

   (d) Die Reihe divergiert.

---

10. Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto n^3 + n \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3 + x.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   (a) Weder f noch g ist bijektiv.

   (b) f ist bijektiv, g aber nicht.

   (c) g ist bijektiv, f aber nicht.

   (d) f und g sind beide bijektiv.

11. Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Falls $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so haben die Graphen von f und g ...

   (a) genau einen Schnittpunkt.

   (b) maximal einen Schnittpunkt.

   (c) nie einen Schnittpunkt.

   (d) mindestens einen Schnittpunkt.

---

12. Es sei $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$, wobei $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f'(x) = -g(x)$ und $g'(x) = f(x)$ sind. Dann gilt $h'(x) = \ldots$

   (a) 0

   (b) $-4f(x)g(x)$

   (c) $(-g(x))^2 - (-f(x))^2$

   (d) $2\left(-g(x) + f(x)\right)$

13.

$$\lim_{h\to 0} \frac{4\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} = \ldots$$

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) Dieser Grenzwert existiert nicht.

---

14. Die Iterationsvorschrift um mit dem Newtonverfahren die Wurzel aus einer Zahl $\alpha > 0$ als Lösung der Gleichung $x^2 - \alpha = 0$ zu approximieren, ist gegeben durch $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

   (a) wahr

   (b) falsch

15. An wie vielen Stellen schneidet die Kurve $r(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin t \end{pmatrix}$ die y-Achse?

   (a) an zwei Stellen
   (b) an drei Stellen
   (c) an vier Stellen
   (d) unendlich oft

---

16. Die parametrisierte Kurve definiert durch $r(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \end{pmatrix}$ für $t > 0$ ist identisch zum Graphen der Funktion

   (a) $y = \ln x$ für $x \in \mathbb{R}$
   (b) $y = \ln x$ für $x > 0$
   (c) $y = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$
   (d) $y = e^x$ für $x > 0$

---

17. Bestimme das Konvergenzintervall für die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(2x + \frac{1}{2}\right)^k .$$

   (a) $x = -\frac{1}{4}$
   (b) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
   (c) $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
   (d) $\mathbb{R}$

18. Wie lautet das Taylorpolynom zweiten Grades von $\sqrt{1+2x}$ um den Punkt $x_0 = 0$?

    (a) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$
    (b) $2 + x + \frac{x^2}{4}$
    (c) $1 + x - \frac{x^2}{2}$
    (d) $1 + x + x^2$

---

19. Gesucht ist eine Funktion f für welche $f'(x) = \sin(x^2)$ gilt. Bestimme den Koeffizienten a_3 von x^3 in der Taylorreihe von $f(x)$ um $x_0 = 0$.

    (a) $a_3 = \frac{1}{3!}$
    (b) $a_3 = \frac{1}{2}$
    (c) $a_3 = 0$
    (d) $a_3 = \frac{1}{3}$

---

20. Die Funktion

$$x \mapsto \int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t$$

ist monoton wachsend für $x > 0$.

    (a) wahr
    (b) falsch

21.
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dots$$

(a) $\frac{4-\pi}{4}$
(b) $\ln 2$
(c) $\frac{\ln 2}{2}$
(d) $\frac{4+\pi}{4}$

---

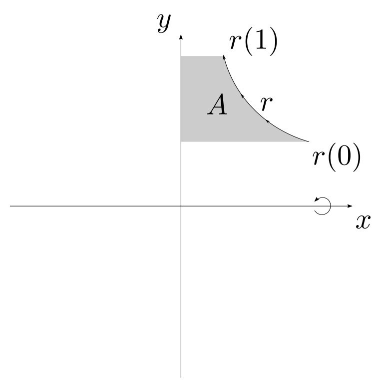
22. Sei n eine nicht-negative ganze Zahl. Folgende Gleichung
$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x$$
gilt ...

(a) nur für $n = 0$.
(b) nur für alle geraden n.
(c) nur für alle ungeraden n.
(d) für alle n.

23.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \dots$$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
(b) $\frac{\pi}{6}$
(c) $\frac{\pi}{3}$
(d) $2 - \sqrt{3}$

24. Gegeben sei eine Kurve $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, r(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$. Betrachte die Fläche A, die von der Kurve r, der y-Achse und den beiden horizontalen Geraden durch $r(0)$ und $r(1)$ begrenzt wird. Wir rotieren nun diese Fläche um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers?



(a) $2\pi \int_0^1 x(t)y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

(b) $2\pi \int_0^1 x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$

(c) $2\pi \int_0^1 y^2(t)x(t)\,\mathrm{d}t$

(d) $2\pi \int_0^1 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

---

25. Wir betrachten einen Vollzylinder mit Radius r und einen Hohlzylinder mit Radius ρ (die Wanddicke sei vernachlässigbar). Sie sind beide gleich hoch, haben dieselbe Masse und dasselbe Trägheitsmoment bezüglich ihrer Rotationssymmetrieachsen. Wie ist das Verhältnis zwischen den beiden Radien?

(a) $\rho = \frac{1}{2}r$

(b) $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}r$

(c) $\rho = \sqrt{2}r$

(d) $\rho = 2r$