ETH Zürich

Zwischenprüfung Winter 2016 – Analysis I D-BAUG

Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine, ausser das verteilte Blatt mit Standardintegralen.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig.
- Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antwort erhalten Sie einen Abzug von $\frac{1}{3}$ Punkten (bei vier Antwortmöglichkeiten), beziehungsweise 1 Punkt (bei wahr/falsch-Fragen). Wird eine Frage nicht beantwortet, erhalten Sie dafür weder Plus- noch Minuspunkte.
- Achten Sie darauf, dass Sie das Antwortblatt sauber ausfüllen. Im Zweifelsfall gilt eine Antwort als falsch.
- Schreiben Sie Name, Vorname, Legi-Nummer und den oben vermerkten Prüfungstyp in Grossbuchstaben auf ihr Antwortblatt.
- Tragen Sie am Ende der Prüfung die Anzahl der von Ihnen gemachten Kreuzchen als Prüfsumme unten auf dem Antwortblatt ein.

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

Bitte wenden!

1. Seien x und y zwei irrationale Zahlen, so ist auch $x + y$ irrational.

(a) wahr

(b) falsch

2.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z \cdot \bar{z}) = 0.$$

(a) wahr

(b) falsch

3. Die Aussage „$z \in \mathbb{C}$ ist reell oder rein imaginär“ ist äquivalent zu $(\bar{z})^2 = z^2$.

(a) wahr

(b) falsch

4. Gegeben sind zwei komplexe Zahlen, deren Summe 6 und deren Produkt 10 ist. So ist eine dieser Zahlen gleich

(a) $-6+i$

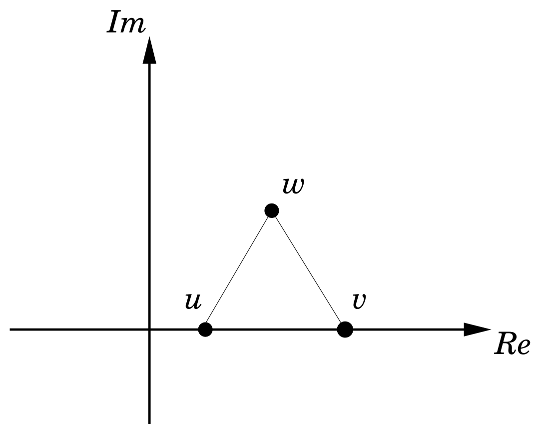
(b) $-3-i$

(c) $-3+i$

(d) $3+i$

Bitte wenden!

5. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit Ecken u, v und w in der komplexen Ebene, so dass $u, v \in \mathbb{R}$ und $u \neq v$.



(a) u, v und w sind die Lösungen der Gleichung $z^3 = c$ für irgendein $c \in \mathbb{C}$

(b) u, v und w sind die Nullstellen eines Polynom dritten Grades mit reellen Koeffizienten

(c) u, v und w sind die Nullstellen eines komplexen Polynom vierten Grades

(d) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

Siehe nächstes Blatt!

6. Bestimme den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{-\frac{n}{3}}$$

(a) 0

(b) $e^{-\frac{2}{3}}$

(c) 1

(d) $e^{\frac{2}{3}}$

Bitte wenden!

7. Für welchen Parameter $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-a)^n} = 3 \text{ ?}$$

(a) $a = -3$

(b) $a = -\frac{5}{3}$

(c) $a = \frac{2}{3}$

(d) Es gibt keinen solchen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

8. Seien $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$ und $g(x) = 2x$, so ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

gegeben durch

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$,

(c) $\left\{2\right\}$,

(d) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$,

Bitte wenden!

9. Es sei

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{2x - 1}.$$

Bestimme $f(-1)$, $f(0)$ und $f(1)$.

Was lässt sich dann mit dem Zwischenwertsatz folgern?

(a) $\exists x \in [-1, 0]$ mit $f(x) = 0$,

(b) $\exists x \in [0, 1]$ mit $f(x) = 0$,

(c) $\exists x_1 \neq x_2 \in [-1, 1]$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

(d) Keine der obigen Aussagen.

Siehe nächstes Blatt!

10. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}{x-2}, & \text{falls } x \neq 2, \\ k, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Wie muss man k wählen, damit f stetig ist?

(a) $k = 0$

(b) $k = \frac{1}{6}$

(c) $k = \frac{1}{3}$

(d) $k = 1$

11. Sei $f(x) = 7^x$ so gilt

(a) $f'(x) = x \cdot 7^{x-1}$

(b) $f'(x) = \log_7 x$

(c) $f'(x) = \ln 7 \cdot 7^x$

(d) $f'(x) = 7^x$

Bitte wenden!

12. Was sind die Koordinaten des Wendepunkts der Funktion

$$f(x) = (x+1)\arctan x?$$

(a) $(0, 0)$

(b) $(0, 1)$

(c) $(1, \frac{\pi}{4})$

(d) $(1, \frac{\pi}{2})$

Siehe nächstes Blatt!

13. Der Mittelwertsatz besagt, dass für jede auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f, die auf (a, b) differentierbar ist, ein Wert $c \in (a, b)$ existiert, so dass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Für die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist c das geometrische Mittel von a und b, wobei $a, b > 0$.

Hinweis: Das geometrische Mittel von n positiven reellen Zahlen ist gegeben durch

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

(a) wahr

(b) falsch

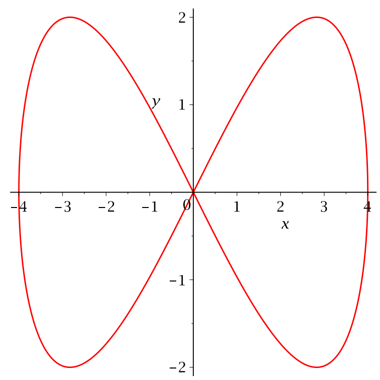
14. Gesucht ist eine Approximation der Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 4$. Verwende das Newton Verfahren mit Startwert $x_0 = 1$. Es gilt $x_2 = \frac{5}{3}$.

(a) wahr

(b) falsch

Bitte wenden!

15. Welche Abbildung parametrisiert die folgendene Kurve?



(a) $r(t) = (4\cos(2t), 2\sin(2t))$

(b) $r(t) = (-4\cos(2t), 2\sin(2t))$

(c) $r(t) = (4\cos(t), 2\sin(2t))$

(d) $r(t) = (4\cos(t), 2\sin(t))$

Siehe nächstes Blatt!

16. Für welches $n \in \mathbb{Z}$ liegt der Mittelpunkt des Krümmungskreises an den Punkt $(1, 1)$ der Kurve $y = x^n$ auf der Gerade $y = 2$?

(a) $n = -2$ und $n = -1$

(b) $n = -2$

(c) $n = -1$

(d) $n = 2$

17. Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(-3)^n}(x-5)^n$ konvergiert

(a) für alle $x \in [-8, -2)$.

(b) für alle $x \in (-8, -2]$.

(c) für alle $x \in (2, 8)$.

(d) für alle $x \in (2, 8]$.

Bitte wenden!

18. Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k+1}$$

in einer Umgebung von $x_0 = 0$ dar?

(a) $\dfrac{x^2}{1+x}$

(b) $\dfrac{x^2}{1-x}$

(c) $-\dfrac{x^2}{1+x}$

(d) $-\dfrac{x}{1-x}$

Siehe nächstes Blatt!

19. Welches Polyom approximiert die Funktion $\cos 2x$ am besten in der Nähe von $x = 0$?

(a) $1 - 2x^2$

(b) $1 - \dfrac{x^2}{2}$

(c) $1 - 2x + x^2$

(d) $1 + \dfrac{x}{2}$

20. Man kann $e^{-0.1}$ mit Hilfe der Taylorreihe berechnen. Dies ist — bis auf drei Dezimalstellen — gleich

(a) 0.900

(b) 0.905

(c) 0.949

(d) 0.950

Bitte wenden!

21. Sei $A = \int_0^2 \cos x \, dx$ und $B = \int_0^{-2} \cos x \, dx$, so gilt

(a) $A - B = 0$

(b) $A \cdot B = 0$

(c) $A + B = 0$

(d) $\dfrac{A}{B} = 0$

22.

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x|}{x} \, dx =$$

(a) -1

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Siehe nächstes Blatt!

23. Die folgende Substitution $\sqrt{x} = \sin u$ überführt das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \,\mathrm{d}x$$

in

(a) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u \,\mathrm{d}u$

(b) $2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 u}{\cos u} \,\mathrm{d}u$

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 u \,\mathrm{d}u$

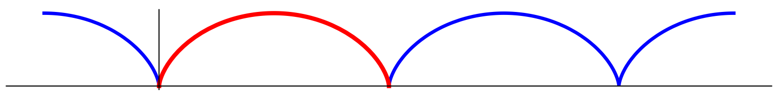
(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u \,\mathrm{d}u$

Bitte wenden!

24. Die Länge eines Bogens der Zykloide

$$r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

ist



(a) $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t$

(b) $2\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t$

(c) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t$

25. Der Schwerpunkt des Gebiets, welches durch $f(x) = 1 - x^2$ und die x-Achse begrenzt wird, ist

(a) $S = (\frac{1}{3}, 0)$.

(b) $S = (0, \frac{1}{3})$.

(c) $S = (\frac{2}{5}, 0)$.

(d) $S = (0, \frac{2}{5})$.